учебник

М.С. Красс, Б.П. Чупрынов

ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ

И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

- МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
- ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
- ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
- ОСНОВЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
- ЭКОНОМЕТРИКА

Издательство "Дело"

АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

М.С Красс, Б.П. Чупрынов

ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

РЕКОМЕНДОВАНО
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ ВУЗОВ
ПО ОБРАЗОВАНИЮ В ОБЛАСТИ ФИНАНСОВ,
УЧЕТА И МИРОВОЙ ЭКОНОМИКИ
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ,
ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО СПЕЦИАЛЬНОСТЯМ
«ФИНАНСЫ И КРЕДИТ»,
«БУХГАЛТЕРСКИЙ УЧЕТ, АНАЛИЗ И АУДИТ»,
«МИРОВАЯ ЭКОНОМИКА»,
«НАЛОГИ И НАЛОГООБЛОЖЕНИЕ»

Издательство "ДЕЛО"
Москва 2008

УДК 65.012(075.8)
ББК 65в6я73
К 78

Рецензенты:

Гордеев Ю.Н., докт. физ.-мат. наук, профессор;

кафедра моделирования в экономике и управлении Российского государственного гуманитарного университета

Красс М.С., Чупрынов Б.П.
К 78 Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник. – 6-е изд., испр. – М.: Издательство "Дело" АНХ, 2008. – 720 с.

ISBN 978-5-7749-0500-3

Изложены основы математического анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, экономико-математического моделирования и оптимального управления, эконометрики. Именно такая базовая совокупность знаний необходима в экономическом образовании. По всем разделам, помимо решения соответствующих задач, приведены экономические приложения и модели. Материал полностью соответствует государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования для экономических специальностей.

Предназначена для студентов экономических и смежных технических специальностей вузов, аспирантов и преподавателей, слушателей программ заочного и дистанционного обучения, экономистов-практиков, а также для тех, кто хочет самостоятельно углубить свои знания.

УДК 65.012(075.8)
ББК 65в6я73

ISBN 978-5-7749-0500-3

© М.С. Красс, Б.П. Чупрынов, 2000, 2006, с изменениями
© ГОУ ВПО "Академия народного хозяйства при Правительстве РФ", 2008, с изменениями

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 11

Раздел I
ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ

Часть 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 14

Глава 1. МНОЖЕСТВА 14

1.1. Множества. Основные обозначения. Операции над множествами 14
1.2. Вещественные числа и их свойства 16
1.3. Числовая прямая (числовая ось) и множества на ней 18
1.4. Комплексные числа 20
1.5. Абсолютная величина числа 27
Упражнения 28

Глава 2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ 28

2.1. Числовые последовательности 28
2.2. Применение в экономике 35
Упражнения 37

Глава 3. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ 38

3.1. Понятие функции 38
3.2. Предел функции 46
3.3. Теоремы о пределах функций 48
3.4. Два замечательных предела 50
3.5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции 53
3.6. Понятие непрерывности функции 53
3.7. Непрерывность элементарных функций 55
3.8. Понятие сложной функции 58
3.9. Элементы аналитической геометрии на плоскости 59
Упражнения 64

Глава 4. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ... 66

4.1. Понятие производной ... 66
4.2. Понятие дифференциала функции ... 70
4.3. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного ... 72
4.4. Таблица производных простейших элементарных функций ... 72
4.5. Дифференцирование сложной функции ... 73
4.6. Понятие производной n-го порядка ... 75

Упражнения ... 76

Глава 5. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ В ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИЙ ... 78

5.1. Раскрытие неопределенностей ... 78
5.2. Формула Маклорена ... 81
5.3. Исследование функций и построение графиков ... 84
5.4. Применение в экономике ... 96

Упражнения ... 102

Глава 6. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ... 104

6.1. Первообразная и неопределенный интеграл ... 104
6.2. Основные свойства неопределенного интеграла ... 105
6.3. Таблица основных неопределенных интегралов ... 106
6.4. Основные методы интегрирования ... 108

Упражнения ... 114

Глава 7. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ... 116

7.1. Условия существования определенного интеграла ... 116
7.2. Основные свойства определенного интеграла ... 118
7.3. Основная формула интегрального исчисления ... 119
7.4. Основные правила интегрирования ... 121
7.5. Геометрические приложения определенного интеграла ... 124
7.6. Некоторые приложения в экономике ... 129
7.7. Несобственные интегралы ... 132

Упражнения ... 137

Глава 8. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ... 138

8.1. Евклидово пространство E^m ... 138
8.2. Множества точек евклидова пространства E^m ... 140
8.3. Частные производные функции нескольких переменных ... 146
8.4. Локальный экстремум функции нескольких переменных ... 151
8.5. Применение в задачах экономики ... 154

Упражнения ... 160

Часть 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ 162

Глава 9. ВЕКТОРЫ 162

9.1. Векторное пространство 162
9.2. Линейная зависимость векторов 165
9.3. Разложение вектора по базису 167

Упражнения 171

Глава 10. МАТРИЦЫ 171

10.1. Матрицы и операции над ними 171
10.2. Обратная матрица 181
10.3. Линейные операторы 182
10.4. Квадратичные формы 185

Упражнения 187

Глава 11. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 189

11.1. Операции над определителями и основные свойства 189
11.2. Ранг матрицы и системы векторов 194
11.3. Критерий знакоопределенности квадратичной формы 195

Упражнения 197

Глава 12. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 199

12.1. Основные понятия 199
12.2. Методы решения систем линейных уравнений 201
12.3. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса 212
12.4. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений 213
12.5. Однородные системы линейных уравнений 215

Упражнения 220

Глава 13. ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ЭКОНОМИКЕ 222

13.1. Использование алгебры матриц 222
13.2. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики 229
13.3. Линейная модель торговли 236

Упражнения 239

Часть 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ 241

Глава 14. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ 241

14.1. Основные понятия теории вероятностей 242
14.2. Теорема сложения вероятностей 245
14.3. Теорема умножения вероятностей 248
14.4. Обобщения теорем сложения и умножения 252
14.5. Схема независимых испытаний 259

Упражнения 266

Глава 15. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ 269

15.1. Случайные величины и законы их распределения 269
15.2. Числовые характеристики дискретных случайных величин 274
15.3. Система двух случайных величин 284
15.4. Непрерывные случайные величины 290
15.5. Основные распределения непрерывных случайных величин 298
15.6 Задачи математической статистики 305
15.7. Статистические оценки статистических гипотез 320
15.8. Закон больших чисел 326
15.9. Цепи Маркова 327

Упражнения 330

Часть 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 335

Глава 16. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА 336

16.1. Основные понятия 336
16.2. Уравнения с разделяющимися переменными 340
16.3. Неполные уравнения 342
16.4. Линейные уравнения первого порядка 343

Упражнения 346

Глава 17. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА 347

17.1. Основные понятия теории 347
17.2. Уравнения, допускающие понижение порядка 349
17.3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 352

17.4. Краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка ... 357
Упражнения ... 359

Глава 18. АППАРАТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ ... 360

18.1. Дифференциальные уравнения первого порядка ... 360
18.2. Дифференциальные уравнения второго порядка (модель рынка с прогнозируемыми ценами) ... 369
Упражнения ... 372

Раздел II
ОСНОВЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Часть 5. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ... 376

Глава 19. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ... 378

19.1. Основные понятия и определения ... 378
19.2. Решение систем m линейных неравенств с двумя переменными ... 382
Упражнения ... 386

Глава 20. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ... 387

20.1. Постановка задачи ... 387
20.2. Алгоритм решения задач ... 387
20.3. Выбор оптимального варианта выпуска изделий ... 388
20.4. Экономический анализ задач с использованием графического метода ... 390
Упражнения ... 394

Глава 21. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ... 397

21.1. Общая постановка задачи ... 397
21.2. Алгоритм симплексного метода ... 397
21.3. Анализ эффективности использования производственного потенциала предприятия ... 400
21.4. Альтернативный оптимум ... 402
Упражнения ... 405

Глава 22. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ 410

22.1. Виды двойственных задач и составление их математических моделей 410
22.2. Основные теоремы двойственности 412
22.3. Решение двойственных задач 413
22.4. Экономический анализ задач с использованием теории двойственности 419
22.5. Стратегическое планирование выпуска изделий с учетом имеющихся ресурсов 421

Упражнения 425

Глава 23. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА 428

23.1. Общая постановка задачи 428
23.2. Нахождение исходного опорного решения 430
23.3. Определение эффективного варианта доставки изделий к потребителю 430
23.4. Проверка найденного опорного решения на оптимальность 432
23.5. Переход от одного опорного решения к другому 434
23.6. Открытая транспортная задача 436
23.7. Определение оптимального варианта перевозки грузов с учетом трансформации спроса и предложений 438

Упражнения 440

Глава 24. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ 441

24.1. Общая формулировка задачи 441
24.2. Графический метод решения задач 443
24.3. Прогнозирование эффективного использования производственных площадей 444
24.4. Метод Гомори 445

Упражнения 447

Часть 6. ЭЛЕМЕНТЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ 450

Глава 25. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ 450

25.1. Общая постановка задачи 450
25.2. Графический метод 451
25.3. Метод множителей Лагранжа 457

Упражнения 460

Глава 26. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ 462

26.1. Постановка задачи 462
26.2. Некоторые экономические задачи, решаемые методами динамического программирования 464

Упражнения 479

Глава 27. СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ 483

27.1. Основные понятия сетевой модели 483
27.2. Минимизация сети 502

Упражнения 507

Глава 28. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР 513

28.1. Графическое решение игр вида $(2\times n)$ и $(m\times 2)$ 518
28.2. Решение игр $(a_{ij})_{m\times n}$ с помощью линейного программирования 526
28.3. Применение матричных игр в маркетинговых исследованиях 528
28.4. Сведение матричной игры к модели линейного программирования 530
28.5. Игры с "природой" 532
28.6. Определение производственной программы предприятия в условиях риска и неопределенности с использованием матричных игр 533
28.7. «Дерево» решений 537

Упражнения 543

Глава 29. ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ (СМО) 548

29.1. Формулировка задачи и характеристики СМО 548
29.2. СМО с отказами 551
29.3. СМО с неограниченным ожиданием 552
29.4. СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди 553
29.5. Определение эффективности использования трудовых и производственных ресурсов в системах массового обслуживания 555

Упражнения 560

Часть 7. ОСНОВЫ ЭКОНОМЕТРИКИ 563

Глава 30. Нелинейная регрессия и корреляция 563

30.1. Нелинейная регрессия 563
30.2. Нелинейная корреляция 570

Упражнения 573

Глава 31. Множественная регрессия и корреляция 574

31.1. Нормальная линейная модель множественной регрессии 574
31.2. Некоторые особенности множественной регрессии и корреляции 580
31.3. Отбор факторов и методы построения множественной линейной корреляционной и регрессионной зависимости 582
31.4. Множественная линейная регрессионная зависимость 588

Упражнения 595

Глава 32. Прогнозирование экономических процессов 597

32.1. Элементы временного ряда 597
32.2. Основные показатели динамики экономических процессов 605
32.3. Применение моделей кривых роста в экономическом прогнозировании 611

Упражнения 623

Часть 8. ПРАКТИКУМ 628

Ответы к упражнениям 681

Приложение 703

Литература 711

Предметный указатель 712

ВВЕДЕНИЕ

Математика — самая древняя наука, живущая и развивающаяся вместе с человечеством. Она появилась из насущных нужд человека, когда возникла потребность в количественном отображении окружающего его мира.

Статус самостоятельной науки математика приобрела в Древней Греции примерно в VI в. до н.э. Все философские школы того времени включали математику в круг вопросов миросозерцания; строгий язык формальной логики (именно он стал языком математики) формировал уровень и строй мышления. В III в. до н. э. математика выделилась из философии, что отражено в "Началах" — эпохальном труде, прославившем в веках имя Евклида и заложившем фундамент классической геометрии. Более двух тысяч лет математику изучали по этой книге.

XVII в. стал эпохой бурного развития математики. Труды Декарта, Ньютона и Лейбница ознаменовали новый этап ее эволюции и появление математики переменных величин. Начинается период дифференциации единой науки на ряд самостоятельных математических наук: алгебру, математический анализ, аналитическую геометрию.

Современная математика характеризуется интенсивным проникновением в другие науки, во многом этот процесс происходит благодаря разделению математики на ряд самостоятельных областей. Язык математики оказался универсальным, и это есть объективное отражение универсальности законов окружающего нас многообразного мира.

Экономика, как наука об объективных причинах функцио-

нирования и развития общества, еще со времен Луки Пачоли (основателя бухгалтерского дела в XV в.) и Адама Смита пользуется разнообразными количественными характеристиками, а потому вобрала в себя большое число математических методов. Современная экономика использует практически весь аппарат прикладной математики.

Современная концепция высшего экономического образования достаточно полно реализует специфику изучения математических дисциплин. Цикл математических дисциплин для экономических специальностей согласно Государственному стандарту высшего профессионального образования состоит из ряда взаимосвязанных разделов с иллюстрацией их применения в экономике. К ним относятся математический анализ, линейная алгебра и ее приложения в задачах оптимизации, обыкновенные дифференциальные уравления, теория вероятностей и математическая статистика. Наиболее современным разделом прикладной математики в экономике является эконометрика. Именно эти разделы и их экономические приложения вошли в настоящий учебник.

В изложении материала доказательная база почти отсутствует: основное внимание уделено приобретению навыков использования математического аппарата. Все главы учебника содержат подборку упражнений для самостоятельного выполнения. Кроме того, в книге имеется практикум с разделами по каждой теме.

Книга написана на основе лекций, прочитанных авторами в течение последних лет в экономических вузах, в том числе и при подготовке слушателей второго высшего образования. В книгу вошли материалы, прошедшие практическую проверку при преподавании цикла математических дисциплин в экономических государственных и негосударственных вузах для различных форм обучения.

При изложении материала авторы постарались сохранить как сложившуюся терминологию, так и традиционные обозначения в формулировках задач и математических моделей и в решениях.

Предлагаемый учебник рассчитан на самую широкую экономическую аудиторию — студентов, преподавателей, аспиран-

тов. Он может быть использован и в различных формах обучения по программам высшего экономического образования: очной, вечерней и дистанционной, а также при получении второго высшего образования.

Благодаря достаточно обширному материалу и большому числу разобранных задач и экономических приложений, предлагаемая книга может служить справочным пособием для специалистов, работающих в различных областях экономики.

Раздел I
ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ

Часть 1
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Математический анализ представляет собой основу всей высшей математики. Его содержание составляют дифференциальное и интегральное исчисления одной и нескольких переменных.

Глава 1
МНОЖЕСТВА

1.1. Множества. Основные обозначения. Операции над множествами

Понятие *множества* является одним из основных в математике. Система, семейство, совокупность — эти термины можно считать синонимами слова "множество". Множество можно определить как совокупность объектов, объединенных по определенному признаку. Например, множество зрителей в данном кинотеатре; множество студентов определенного учебного заведения; совокупность студентов, учащихся на "хорошо" и "отлично", в некоторой школе, совокупность коммерческих банков, имеющих уставный фонд не ниже 100 миллиардов рублей. Множество может содержать конечное или бесконечное число объектов.

Объекты, составляющие множество, называются его *элементами* или *точками*. Обычно множества обозначаются большими буквами, а входящие в них элементы — малыми буквами. Выражение "элемент x из множества X" соответствует записи

$x \in X$ (x принадлежит X); если же элемент x не входит в множество X, то это соответствует записи $x \notin X$ (x не принадлежит X).

Пусть X и Y — два множества. Тогда между ними можно определить следующие соотношения. Если оба множества состоят из одних и тех же элементов, то они совпадают, что соответствует записи $X=Y$. Если все элементы множества X содержатся в множестве Y, то X целиком содержится в Y, или $X \subset Y$ (X является подмножеством множества Y). Если ни один элемент множества X не содержится в Y, то, значит, и само множество X не содержится в Y, или $X \not\subset Y$.

В математике используется понятие *пустого множества*, обозначаемого символом $\varnothing$. Это множество, в котором не содержится ни один элемент, и потому оно является подмножеством любого множества.

Введем также понятия *суммы* множеств и их *пересечения*. Суммой или объединением двух множеств X и Y называется совокупность элементов, входящих как в множество X, так и в множество Y. Сумма этих множеств обозначается $X \bigcup Y$. Например, пусть X — множество государственных предприятий с годовым оборотом не ниже S денежных единиц, а Y — множество негосударственных предприятий с тем же порогом годового оборота; тогда $X \bigcup Y$ будет множеством всех предприятий с указанным нижним ограничением S.

Отметим, что добавление пустого множества $\varnothing$ к любому множеству X не меняет этого множества, т.е.

$$X \bigcup \varnothing = X.$$

Пересечением множеств X и Y (или их общей частью) является совокупность элементов, входящих как в множество X, так и в множество Y; это множество обозначается $X \bigcap Y$. Например, если X — это множество предприятий с годовым оборотом T не ниже s, а Y — совокупность предприятий с годовым оборотом не более S, причем $s < S$, то в пересечение $X \bigcap Y$ войдут объекты с годовым оборотом T, удовлетворяющим неравенству

$$s \leq T \leq S.$$

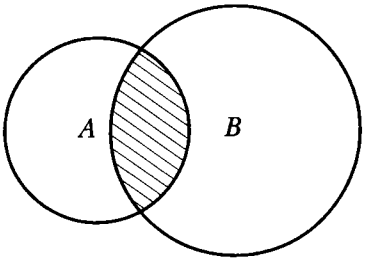


Рис. 1.1

Отсутствие элементов со свойствами множеств X и Y одновременно означает, что пересечение этих множеств представляет собой пустое множество $\varnothing$. Схематически пересечение двух множеств показано на рис. 1.1 (заштрихованная область).

Разностью множеств X и Y называется множество Z, содержащее все элементы множества X, не содержащиеся в Y; эта разность обозначается $Z = X \setminus Y$.

Дополнением до X множества Y называется множество всех элементов множества X, не принадлежащих Y; это множество обозначается $\overline{Y} = X \setminus Y$.

В общем случае сложение и пересечение определяются для любого конечного числа множеств путем последовательного попарного проведения соответствующих операций.

В математических формулировках довольно часто используются отдельные предложения и слова, так что при их записи целесообразно употреблять экономную логическую символику. Вместо выражения "любое x из множества X" употребима запись $\forall x \in X$, где перевернутая латинская буква A взята от начала английского слова **Any** — "любой". Аналогично вместо выражения "существует элемент x из множества X" кратко пишут: $\exists x \in X$, где перевернутая латинская буква E является начальной в английском слове **Existence** — "существование".

1.2. Вещественные числа и их свойства

Множество вещественных чисел является бесконечным. Оно состоит из рациональных и иррациональных чисел. *Рациональ-*

ным называется число вида p/q, где p и q — целые числа. Всякое вещественное число, не являющееся рациональным, называется *иррациональным*. Всякое рациональное число либо является целым, либо представляет собой конечную или периодическую бесконечную десятичную дробь. Например, рациональное число $1/9$ можно представить в виде $0{,}11111\ldots$. Иррациональное число представляет собой бесконечную непериодическую десятичную дробь; примеры иррациональных чисел:

$$\sqrt{2} = 1,41421356...; \quad \pi = 3,14159265\ldots .$$

Сведения о вещественных числах могут быть кратко систематизированы в виде перечисления их свойств.

A. Сложение и умножение вещественных чисел

Для любой пары вещественных чисел a и b определены единственным образом два вещественных числа $a + b$ и $a \cdot b$, называемые соответственно их *суммой* и *произведением*. Для любых чисел a, b и c имеют место следующие свойства.

1. $a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$ (переместительное свойство).
2. $a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (сочетательное свойство).
3. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (распределительное свойство).
4. *Существует единственное число* 0, *такое, что* $a+0=a$ *для любого числа* a.
5. *Для любого числа* a *существует такое число* $(-a)$, *что* $a + (-a) = 0$.
6. *Существует единственное число* $1 \neq 0$, *такое, что для любого числа* a *имеет место равенство* $a \cdot 1 = a$.
7. *Для любого числа* $a \neq 0$ *существует такое число* a^{-1}, *что* $a \cdot a^{-1} = 1$. *Число* a^{-1} *обозначается также символом* $\dfrac{1}{a}$.

B. Сравнение вещественных чисел

Для любых двух вещественных чисел имеет место одно из трех соотношений: $a = b$ (a равно b), $a > b$ (a больше b) или $a < b$ (a меньше b). Соотношение равенства обладает свойством *транзитивности*: если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.

Отношение “больше” обладает следующими свойствами.

8. *Если* $a > b$ *и* $b > c$, *то* $a > c$.

9. *Если* $a > b$, *то* $a + c > b + c$.

10. *Если* $a > 0$ *и* $b > 0$, *то* $ab > 0$.

Вместо соотношения $a > b$ употребляют также $b < a$. Запись $a \geq b$ ($b \leq a$) означает, что либо $a = b$, либо $a > b$. Соотношения со знаками $>$, $<$, $\geq$ и $\leq$ называются неравенствами, причем соотношения типа $8 < 10$ — строгими неравенствами.

11. *Любое вещественное число можно приблизить рациональными числами с произвольной точностью.*

C. Непрерывность вещественных чисел

12. *Пусть* X *и* Y *— два множества вещественных чисел. Тогда, если для любых чисел* $x \in X$ *и* $y \in Y$ *выполняется неравенство* $x \leq y$, *то существует хотя бы одно число* c, *такое, что для всех* x *и* y *выполняются неравенства* $x \leq c \leq y$.

Отметим здесь, что свойством непрерывности обладает множество всех вещественных (действительных) чисел, но не обладает множество, состоящее только из рациональных чисел.

Таким образом, вещественные числа представляют собой множество элементов, обладающих свойствами A–C. Такое определение, из которого выводятся остальные свойства, называется *аксиоматическим*, а сами свойства A–C — *аксиомами* вещественных чисел.

1.3. Числовая прямая (числовая ось) и множества на ней

Здесь нам понадобится понятие о соответствии множеств, позже мы еще раз обратимся к нему в разделе о функциональной зависимости. Будем говорить, что между множествами X и Y установлено *соответствие*, если по какому-либо закону или

правилу каждому элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$. Соответствие называется *взаимно однозначным*, если любому $x \in X$ соответствует только один элемент из Y и, наоборот, любому $y \in Y$ соответствует только один элемент $x \in X$.

Оказывается, что между множеством вещественных чисел и множеством точек на прямой может быть установлено взаимно однозначное соответствие. Это дает возможность наглядно геометрически изобразить вещественные числа на числовой оси. На прямой выберем точку O начала отсчета, укажем направление отсчета (обычно слева направо, рис. 1.2) и единицу измерения или масштаб.

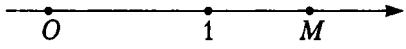


Рис. 1.2

Эти три действия полностью определяют нам числовую (координатную) ось. На ней вещественные числа изображаются в виде точек. Пусть M — произвольная точка на этой оси. Поставим ей в соответствие число x, равное по величине длине отрезка OM, со знаком $+$, если точка M находится справа от начала отсчета, или со знаком $-$, если M расположена слева от точки O. Тогда число x называется *координатой* точки x. Справедливо и обратное утверждение: каждому вещественному числу x соответствует определенная точка на координатной оси, координата которой равна x.

Пусть a и b — два числа, причем $a < b$. Укажем некоторые наиболее употребительные числовые множества:

1) множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$, называется отрезком (сегментом) и обозначается $[a, b]$;

2) множество всех чисел, удовлетворяющих строгому неравенству $a < x < b$, называется интервалом и обозначается (a, b);

3) множество всех вещественных (действительных) чисел будем обозначать

$$-\infty < x < \infty, \text{ или } (-\infty, \infty);$$

4) аналогично пп. 1–3 можно определить числовые множества типа $(a, b]$, $[a, b)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $[a, +\infty)$ и $(-\infty, b]$.

Все эти множества называются промежутками; промежутки типа 1 и 2 и первые два из п. 4 называются конечными, а числа a и b — их концами; остальные промежутки называются бесконечными. Промежутки первых двух типов из п. 4 называются полуинтервалами.

Числовым промежуткам соответствуют промежутки на координатной оси. Сегмент $[a, b]$ изображается отрезком M_1M_2, таким, что точка M_1 имеет координату a, точка M_2 — координату b. Вся координатная прямая является изображением множества всех вещественных чисел, и потому множество $(-\infty, \infty)$ называется *числовой прямой (осью)*, а любое число называется *точкой* этой прямой.

Пусть a — произвольная точка числовой прямой и δ — некоторое положительное число. Интервал $(a-\delta,\ a+\delta)$ называется *δ-окрестностью точки a.*

1.4. Комплексные числа

Основные понятия

В этом разделе мы расширим понятие числа, введя соответствующие определения.

Определение 1. Величина i, определяемая условием $i^2 = -1$, называвается *мнимой единицей.*

Отсюда сразу следует цепочка равенств:

$$i^3 = i \cdot i^2 = -i,\ \ i^4 = i^2 i^2 = 1,\ \ i^5 = i^4 i = i,\ \ 1/i = i/i^2 = -i \text{ и т.д.}$$

Определение 2. Число вида

$$z = a + bi, \tag{1.1}$$

где a и b — действительные числа, называется *комплексным числом.* При этом a и b называются соответственно *действительной частью* и *мнимой частью* комплексного числа.

Запись вида (1.1) называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Для действительной и мнимой частей комплексного числа часто используются обозначения: $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$ (от французских слов "действительный" и "мнимый").

Определение 3. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются *равными*, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Определение 4. Комплексное число $-z = -a - bi$ называется *противоположным* комплексному числу $z = a + bi$.

Определение 5. Комплексное число $a - bi$ называется сопряженным с комплексным числом $z = a + bi$ и обозначается $\bar{z}$.

Пример 1. Найти корни квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом

$$Az^2 + Bz + C = 0,$$

где A, B и C — действительные числа.

Решение. Как мы знаем, формулы для корней квадратного уравнения имеют вид:

$$z_{1,2} = -\frac{B}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}.$$

Поскольку дискриминант $D = B^2 - 4AC < 0$, то, согласно определению 1, $\sqrt{D} = \sqrt{-1 \cdot |D|} = \sqrt{|D|}\, i$. Поэтому формулы для корней уравнения в данном случае являются, согласно определению 5, сопряженными комплексными числами

$$z_{1,2} = -\frac{B}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}\, i.$$

Комплексные числа вида (1.1) удобно изображать точками на *комплексной плоскости* (рис. 1.3). На оси Ox расположены действительные числа, ось Oy соответствует мнимым числам. Любое комплексное число (1.1) соответствует точке на комплексной плоскости с координатами a и b. Верно и обратное: каждой точке комплексной плоскости с координатами (a, b) соответствует комплексное число с действительной частью a и мнимой частью b. При этом каждому комплексному числу $z = a + bi$

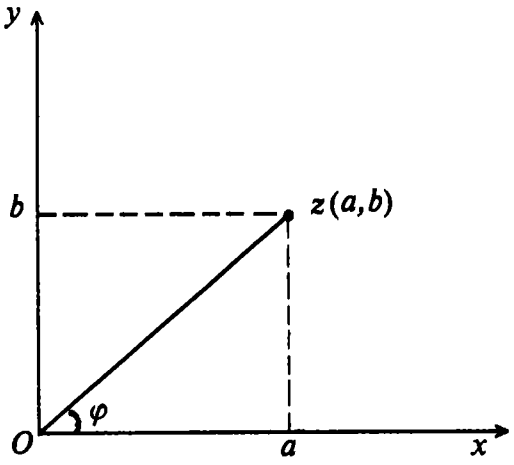


Рис. 1.3

может быть поставлен в соответствие двумерный вектор (a, b). Длина этого вектора, равная $\sqrt{a^2+b^2}$, называется *модулем* комплексного числа (1.1) и обозначается символом $|z|$.

Арифметические операции над комплексными числами

Алгебраические операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел выполняются аналогично соответствующим операциям над многочленами. Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ — два комплексных числа. Сумма (разность) и произведение этих чисел являются также комплексными числами и вычисляются по формулам:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i, \tag{1.2}$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \tag{1.3}$$

Для определения частного двух комплексных чисел в виде комплексного числа (1.1) умножим и поделим эту дробь на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \\ = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i. \tag{1.4}$$

Пример 2. Найти сумму, разность и произведение комплексных чисел $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 + 4i$.

Решение. По формулам (1.2)–(1.4) последовательно получаем: $z_1 + z_2 = 5 + 7i$, $z_1 z_2 = -6 + 13i$, $z_1/z_2 = 18/25 + (1/25)i$.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Угол φ между отрезком, соединяющим точку (a, b) с началом координат комплексной плоскости и положительным направлением оси Ox, называется *аргументом* комплексного числа z. Любое комплексное число $z = a + bi \neq 0$ может быть представлено через величины $|z|$ и φ. Действительно, как следует из рис. 1.3,

$$a = |z| \cos\varphi, \quad b = |z| \sin\varphi. \tag{1.5}$$

Подставляя эти слагаемые в выражение (1.1), получаем

$$z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi), \tag{1.6}$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}(b/a)$. Такой вид записи называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Тригонометрическая форма комплексного числа особенно удобна при вычислении произведения, частного и степеней комплексных чисел. Выведем основные формулы для этих случаев, приводя каждый раз результат к виду (1.6).

Пример 3. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Решение. Сначала вычислим модуль числа z: $|z| = \sqrt{1+3} = 2$. Запишем данное комплексное число в виде

$$z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

Пусть даны два комплексных числа в тригонометрической форме $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$.

1. Произведение комплексных чисел. Перемножив и разделив действительные и мнимые части произведения, получим: $z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)]$, или, что то же самое:

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \tag{1.7}$$

Таким образом, модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения — сумме аргументов сомножителей.

Из результата (1.7) следует, что особенно простой вид имеет n-я степень комплексного числа (*формула Муавра*)

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{1.8}$$

Пример 4. Найти 3-ю степень комплексного числа из примера 3.

Решение. Согласно формуле (1.8) получаем:

$$(1 - i\sqrt{3})^3 = 2^3\left(\cos 3\cdot\frac{5\pi}{3} + i\sin 3\cdot\frac{5\pi}{3}\right) = \\ = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8.$$

Пример 5. Вычислить $\left(\dfrac{1}{1-i}\right)^{12}$.

Решение. Представим основание степени в тригонометрической форме:

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Теперь по формуле Муавра (1.8) вычисляем

$$\left(\frac{1}{1-i}\right)^{12} = \frac{1}{2^6}(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = -1/64.$$

2. Частное двух комплексных чисел. Умножая числитель и знаменатель частного на комплексное число, сопряженное знаменателю, получаем:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\cdot\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} = \\ = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2},$$

или в окончательном виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \qquad (1.9)$$

Таким образом, модуль частного двух комплексных чисел равен отношению их модулей, а аргумент — разности аргументов делимого и делителя.

3. Приведем без вывода выражение для корня n-й степени из комплексного числа.

Определение 6. Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число u такое, что $u^n = z$. Число корней n-й степени равно n, и они вычисляются по формуле

$$\sqrt[n]{z_k} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (1.10)$$

Интересна геометрическая интерпретация корней (1.10). Соответствующие им точки комплексной плоскости располагаются на окружности радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$, причем разделяющие их дуги равны $2\pi/n$ (рис. 1.4). Достаточно знать положение одного корня, чтобы изобразить другие.

Пример 6. Найти все корни уравнения $z^3 = 1$.

Решение. Представим правую часть данного уравнения в тригонометрической форме, т.е. $z^3 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)$. Три корня уравнения определяются формулой (1.10)

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Придавая k указанные значения, получаем:

$$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$
$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

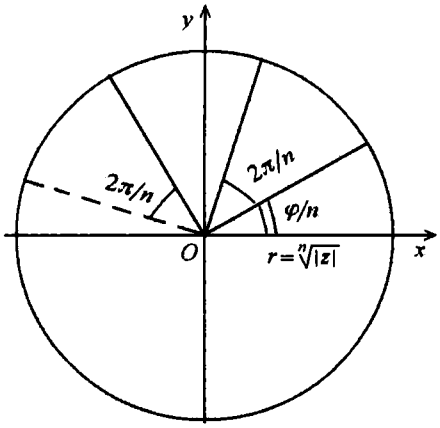


Рис. 1.4

Соответствующие этим корням точки комплексной плоскости расположены на окружности радиуса 1, и их разделяют равные углы по $2\pi/3$ каждый.

Отметим, что на комплексной плоскости окружность и круг заданного радиуса K определены весьма простыми уравнениями: соответственно $|z| = R$ и $|z| \leq R$ (или $|z| < R$, если граница круга не включена).

Комплексные многочлены

Многочлен вида

$$F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n, \qquad (1.11)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — заданные комплексные числа, называется *комплексным многочленом* n-й степени. При этом комплексные числа $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ называются *коэффициентами* многочлена.

Отметим важные особенности комплексного многочлена (1.11).

1. Комлексный многочлен n-й степени имеет n комплексных корней.

2. В случае если многочлен (1.11) с действительными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ имеет комплексные корни, то

эти корни попарно сопряженные. Если число z_k является корнем такого многочлена, то число $\bar{z}_k$ также будет корнем этого многочлена.

3. Для многочлена (1.11) нечетной степени n с действительными коэффициентами существует хотя бы один действительный корень.

1.5. Абсолютная величина числа

Приведем определение абсолютной величины вещественного числа x (модуля числа):

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Из этого определения следует ряд свойств абсолютной величины, который мы приводим ниже без доказательств.

1. $|x| \geq 0$.

2. $|x| = |-x|$.

3. $-|x| \leq x \leq |x|$.

4. *Пусть a — положительное число. Тогда неравенства $|x| \leq a$ и $-a \leq x \leq a$ равносильны.*

5. *Для любых двух действительных чисел x и y справедливо неравенство*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

В это свойство можно включить также и неравенство

$$|x - y| \leq |x| + |y|.$$

6. *Для любых двух действительных чисел x и y справедливо неравенство*

$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Определить множества значений x, удовлетворяющих следующим условиям.

1.1. $|x| < 2$. **1.2.** $x^2 \leq 9$. **1.3.** $x^2 > 25$. **1.4.** $|x-3| < 1$. **1.5.** $(x^2+1) \leq 17$. **1.6.** $(x^2-3) \geq 1$. **1.7.** $x - x^2 > 0$. **1.8.** $x^2 - 2x + 7 > 0$. **1.9.** $x^2 - 2x + 5 < 0$. **1.10.** Вычислить выражения: а) $(12-i)(2i+3)$, б) $\dfrac{1-i}{(1+i)(1-3i)}$, в) $\dfrac{(1+2i)^2}{3+2i}$.

1.11. Представить в тригонометрической форме комплексные числа: а) -1, б) 3, в) $-i$, г) $1-i$, д) $1+i$, е) $3i$, ж) $-1-\sqrt{3}i$, з) $\cos\varphi - i\sin\varphi$, и) $\sin\varphi + i\cos\varphi$, к) $1 + i\,\mathrm{tg}\,\varphi$. **6.12.** Вычислить выражения по формуле Муавра: а) $(1+i\sqrt{3})^3$, б) $(1+i)^8$, в) $(1-i)^{15}$, г) $(\sqrt{3}-i)^5$, д) $\left(\cos\dfrac{\pi}{14}+i\sin\dfrac{\pi}{14}\right)^{21}$, е) $\left(\sin\dfrac{\pi}{5}+i\cos\dfrac{\pi}{5}\right)^{15}$

1.13. Решить уравнения: а) $z^3 = -1$, б) $z^4 = 1$, в) $z^3 = i$, г) $z^3 = 27$, д) $z^4 = -1$, е) $z^8 = 6561$, ж) $z^5 + z^3 + z^2 + 1 = 0$.

Глава 2
ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

2.1. Числовые последовательности

Числовые последовательности и операции над ними

Числовые последовательности представляют собой бесконечные множества чисел. Примерами последовательностей могут служить: последовательность всех членов бесконечной геометрической прогрессии, последовательность приближенных значений $\sqrt{2}$ ($x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}4$, $x_3 = 1{,}41$, ...), последовательность периметров правильных n-угольников, вписанных в данную окружность. Уточним понятие числовой последовательности.

Определение 1. Если каждому числу n из натурального ряда чисел 1, 2, 3,..., n,... поставлено в соответствие вещественное число x_n, то множество вещественных чисел

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{2.1}$$

называется *числовой последовательностью* или просто последовательностью.

Числа x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... будем называть *элементами* или *членами* последовательности (2.1), символ x_n — *общим* элементом или членом последовательности, а число n — его *номером*. Сокращенно последовательность (2.1) будем обозначать символом $\{x_n\}$. Например, символ $\{1/n\}$ обозначает последовательность чисел

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots .$$

Иными словами, под последовательностью можно понимать бесконечное множество занумерованных элементов или множество пар чисел (n, x_n), в которых первое число принимает последовательные значения 1, 2, 3, ... Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого ее элемента. Например, формула $x_n = -1 + (-1)^n$ определяет последовательность 0, 2, 0, 2,... .

Геометрически последовательность изображается на числовой оси в виде последовательности точек, координаты которых равны соответствующим членам последовательности. На рис. 2.1 изображена последовательность $\{x_n\} = \{1/n\}$ на числовой прямой.

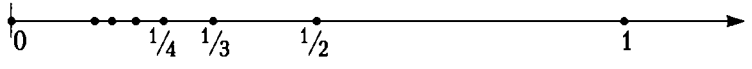


Рис. 2.1

Понятие сходящейся последовательности

Определение 2. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*. Если последовательность имеет своим пределом число

a, то это записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ или } x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся.*

Определение 3. Последовательность, имеющая своим пределом число $a = 0$, называется *бесконечно малой последовательностью.*

Замечание 1. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число a. Тогда последовательность $\{\alpha_n\}=\{x_n-a\}$ есть бесконечно малая, т.е. любой элемент x_n сходящейся последовательности, имеющей предел a, можно представить в виде

$$x_n = a + \alpha_n,$$

где α_n — элемент бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$.

Замечание 2. Неравенство (2.2) эквивалентно неравенствам (см. свойство 4 модуля числа из п. 1.5)

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \text{ или } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Это означает, что при $n > N$ все элементы последовательности $\{x_n\}$ находятся в *ε-окрестности* точки a (рис. 2.2), причем номер N определяется по величине ε.

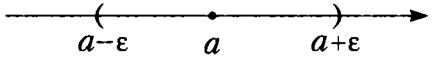


Рис. 2.2

Интересно дать геометрическую интерпретацию этого определения. Поскольку последовательность представляет собой бесконечное множество чисел, то если она сходится, в любой ε-окрестности точки a на числовой прямой находится бесконечное число точек — элементов этой последовательности, тогда как вне ε-окрестности остается конечное число элементов. Поэтому предел последовательности часто называют *точкой сгущения.*

Замечание 3. Неограниченная последовательность не имеет *конечного* предела. Однако она может иметь *бесконечный* предел, что записывается в следующем виде:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty. \tag{2.3}$$

Если при этом начиная с некоторого номера все члены последовательности положительны (отрицательны), то пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \right).$$

Если $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\{1/x_n\}$ — *бесконечно большая последовательность*, имеющая бесконечный предел в смысле (2.3), и наоборот.

Приведем примеры сходящихся и расходящихся последовательностей.

Пример 1. Показать, используя определение предела последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Решение. Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Так как

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1},$$

то чтобы выполнялось неравенство (2.2), достаточно решить неравенство $1/(n+1) < \varepsilon$, откуда получаем $n > (1-\varepsilon)/\varepsilon$. Достаточно принять $N = [(1-\varepsilon)/\varepsilon]$ (целая часть числа $(1-\varepsilon)/\varepsilon)$[1], чтобы неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ выполнялось при всех $n > N$.

Пример 2. Показать, что последовательность $\{x_n\} = (-1)^n$, или -1, 1, -1, 1,... не имеет предела.

Решение. Действительно, какое бы число мы ни предположили в качестве предела: 1 или -1, при $\varepsilon < 0{,}5$ неравенство (2.2), определяющее предел последовательности, не удовлетворяется — вне ε-окрестности этих чисел остается бесконечное число элементов x_n: все элементы с нечетными номерами равны -1, элементы с четными номерами равны 1.

[1]Символ $[a]$ означает целую часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a. Например, $[2] = 2$, $[2,5] = 2$, $[0,8] = 0$, $[-0,5] = -1$, $[-23,7] = -24$.

Основные свойства сходящихся последовательностей

Приведем основные свойства сходящихся последовательностей, которые в курсе высшей математики сформулированы в виде теорем.

1. *Если все элементы бесконечно малой последовательности* $\{x_n\}$ *равны одному и тому же числу* c, *то* $c = 0$.

2. *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

3. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

4. *Сумма (разность) сходящихся последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме (разности) пределов последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$.

5. *Произведение сходящихся последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$.

6. *Частное двух сходящихся последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *при условии, что предел последовательности* $\{y_n\}$ *отличен от нуля, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$.

7. *Если элементы сходящейся последовательности* $\{x_n\}$ *удовлетворяют неравенству* $x_n \geq b$ $(x_n \leq b)$ *начиная с некоторого номера, то и предел* a *этой последовательности удовлетворяет неравенству* $a \geq b$ $(a \leq b)$.

8. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность или на число есть бесконечно малая последовательность.*

9. *Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Рассмотрим применение этих свойств на примерах.

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+2n+4}{4n^2+n-3}$.

Решение. При $n \to \infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, т.е. применить сразу теорему о пределе частного нельзя, так как она предполагает существование конечных пределов последовательностей. Преобразуем данную последовательность, разделив числитель и знаменатель на n^2. Применяя затем теоремы о пределе частного, пределе суммы и снова о пределе частного, последовательно находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+4}{4n^2+n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2/n+4/n^2}{4+1/n-3/n^2} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+2/n+4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(4+1/n-3/n^2)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty}(2/n) + \lim\limits_{n\to\infty}(4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty} 4 + \lim\limits_{n\to\infty}(1/n) - \lim\limits_{n\to\infty}(3/n^2)} =$$

$$= \frac{3+0+0}{4+0-0} = \frac{3}{4}.$$

Пример 4. Найти предел последовательности $\{x_n\} = \dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$ при $n \to \infty$.

Решение. Здесь, как и в предыдущем примере, числитель и знаменатель не имеют конечных пределов, и потому сначала необходимо выполнить соответствующие преобразования. Поделив числитель и знаменатель на n, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/\sqrt{n})\cos n}{1+1/n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1/\sqrt{n})\cos n}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}(1/n)}.$$

Поскольку в числителе стоит произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность, то в силу свойства 8 окончательно получаем

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Пример 5. Найти предел последовательности $\{x_n\} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ при $n \to \infty$.

Решение. Здесь применить непосредственно теорему о пределе суммы (разности) последовательностей нельзя, так как не существует конечных пределов слагаемых в формуле для $\{x_n\}$. Умножим и разделим формулу для $\{x_n\}$ на сопряженное выражение $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1/\sqrt{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+1/n})+1} = \frac{0}{1+1} = 0.$$

Число e

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, общий член которой выражается формулой

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

В курсе математического анализа доказывается, что эта последовательность *монотонно возрастает* и имеет предел. Этот предел называют числом e. Следовательно, по определению

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e играет большую роль в математике. Далее будет рассмотрен способ его вычисления с любой требуемой точностью. Отметим здесь, что число e является иррациональным; его приближенное значение равно $e = 2,7182818\ldots$.

2.2. Применение в экономике

Рассмотрим два примера из экономики на использование числа e.

Пример 1. Известно, что формула сложных процентов имеет вид

$$Q = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, \tag{2.4}$$

где Q_0 — первоначальная сумма вклада в банк, p — процент начисления за определенный период времени (месяц, год), n — количество периодов времени хранения вклада, Q — сумма вклада по истечении n периодов времени. Формулы типа (2.4) используются также в демографических расчетах (прирост народонаселения) и в прогнозах экономики (увеличение валового национального продукта). Пусть первоначальный депозит Q_0 помещен в банк под $p = 100\%$ годовых, тогда через год сумма депозита составит $2Q_0$. Предположим, что через полгода счет закроется с результатом $Q_1 = Q_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}Q_0$ и эта сумма будет вновь помещена в качестве депозита в том же банке. В конце года депозит будет составлять $Q_2 = Q_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25Q_0$. Будем уменьшать срок размещения депозита в банке при условии его последующего размещения после изъятия. При ежеквартальном повторении этих операций депозит в конце года составит $Q_3 = Q_0 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 2,37Q_0$. Если повторять операцию изъятие–размещение в течение года сколько угодно раз, то при ежемесячном манипулировании сумма за год составит $Q_{12} = Q_0 \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2,61Q_0$; при ежедневном посещении банка $Q_{365} = Q_0 \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2,714Q_0$; при ежечасном —

$Q_{8720} = Q_0\left(1+\dfrac{1}{8720}\right)^{8720} \approx 2,718Q_0$ и т.д. Нетрудно видеть, что последовательность значений возрастания первоначального вклада $\{q_n\} = \{Q_n/Q_0\}$ как раз совпадает с последовательностью, пределом которой является число e при $n \to \infty$ согласно (2.4). Таким образом, доход, который можно получить при непрерывном начислении процентов, может составить за год не более чем

$$\lim_{n\to\infty}(Q_n - Q_0)\cdot 100\%/Q_0 = (e-1)100\% \approx 172\%.$$

В общем случае, если p — процент начисления и год разбит на n частей, то через t лет сумма депозита достигнет величины

$$Q_n = Q_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt},$$

где $r = p/100$. Это выражение можно преобразовать:

$$Q_n = Q_0\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt}.$$

Мы можем ввести новую переменную $m = \dfrac{n}{r}$ и при $n \to \infty$ получим $m \to \infty$, или

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{m\to\infty} Q_0\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} = Q_0 e^{rt}.$$

Расчеты, выполненные по этой формуле, называют вычислениями по непрерывным процентам.

Пример 2. Пусть темп инфляции составляет 1% в день. Насколько уменьшится первоначальная сумма через полгода?

Решение. Применение формулы сложных процентов дает

$$Q = Q_0\left(1-\frac{1}{100}\right)^{182},$$

где Q_0 — первоначальная сумма, 182 — число дней в полугодии. Преобразуя это выражение, получаем

$$Q = Q_0 \left[\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{-100} \right]^{-182/100} \approx Q_0/e^{1,82},$$

т.е. инфляция уменьшит первоначальную сумму примерно в 6 раз.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти пределы следующих последовательностей.

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{3n-1}$. **2.2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+5n+1}{3n+1}$. **2.3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+10n-5}{n^3+3n}$.

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n-3}{n^3-n^2}$. **2.5.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-3n+1}{2n^2-3n}$.

2.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2n^2+2}{3n^3+4n}$. **2.7.** $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$.

2.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

2.9. Прирост населения страны составляет p процентов в год. За сколько лет население страны удвоится? Дать ответ при **а)** $p = 3\%$ и **б)** $p = 5\%$.

2.10. Коммерческий банк, обслуживающий предприятие по выдаче заработной платы, задерживает перечисляемые ему средства в среднем на 9 месяцев. За это время он успевает три раза "прокрутить" эти деньги в виде краткосрочных кредитов, выдаваемых частным предпринимателям на три месяца, под 3% в месяц. Сколько процентов прибыли получает банк на этой операции?

2.11. В условиях предыдущей задачи рассчитать, что выгоднее банку: кредитовать из собственных средств предприятия на условиях ставки годового процента, равной 20%, или заниматься вышеуказанной деятельностью.

2.12. Темп инфляции составляет 6% в месяц. Каков должен быть процент годовой ставки кредита, выдаваемого банком, чтобы прибыль от кредитования составляла 12% в год?

Глава 3
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Понятие функции

Определение функциональной зависимости

Определение 1. Пусть X и Y — некоторые числовые множества и пусть каждому элементу $x \in X$ по какому-либо закону f поставлен в соответствие один элемент $y \in Y$. Тогда будем говорить, что определена *функциональная зависимость* y от x по закону $y = f(x)$. При этом x называют *независимой переменной (или аргументом)*, y — *зависимой переменной*, множество X — *областью определения* (существования) функции, множество Y — *областью значений* (изменения) функции.

Кроме буквы f для обозначения функции используются и другие буквы, другими буквами может обозначаться также и независимая переменная. Примеры записи функций: $y = y(x)$, $y = F(x)$, $y = g(x)$.

Если множество Y значений функции ограничено, то функция называется ограниченной, в противном случае — неограниченной.

Способы задания функций

Задать функцию — значит указать закон, по которому, согласно определению, каждому значению аргумента из области определения ставится в соответствие (вычисляется) значение зависимой переменной из области значений функции. Существуют три основных способа задания функций: *табличный, аналитический и графический.*

1. Табличный способ. Этот способ имеет широкое применение в разных отраслях знаний и приложениях: ряды экспериментальных измерений, социологические опросы, таблицы бухгалтерской отчетности и банковской деятельности и т.п. Как правило, в таких таблицах по крайней мере одну из переменных можно принять за независимую (например, время), тогда другие величины будут являться функциями от этого аргумента. По сути дела базы данных основаны на табличном способе

задания, хранения и обработки информации, а значит, и на табличной форме функциональной зависимости.

2. Аналитический способ. Этот способ состоит в задании связи между аргументом и функцией в виде формул. Следует подчеркнуть, что функция может определяться и набором формул — на разных промежутках области определения функции используются разные формулы.

Приведем примеры аналитического задания функций.

Пример 1. $y = x^3$. Эта функция задана на бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$. Множество значений этой функции тоже бесконечная числовая прямая $-\infty < y < \infty$. Функция называется кубической параболой (рис. 3.1).

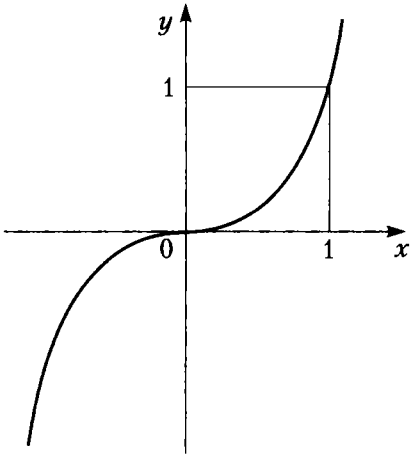


Рис. 3.1

Пример 2. $y = \sqrt{1 - x^2}$. Функция задана на отрезке $[-1, 1]$, множество ее значений — отрезок $[0, 1]$. Это половина окружности, лежащая в верхней полуплоскости (рис. 3.2).

Пример 3. $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Термин sign происходит от латинского signum — знак. Функция задана на всем бесконечном промежутке $(-\infty, \infty)$, а область ее значений состоит из трех чисел: -1, 0, 1 (рис. 3.3). Стрелки

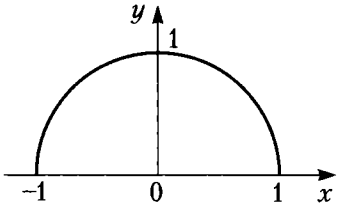


Рис. 3.2

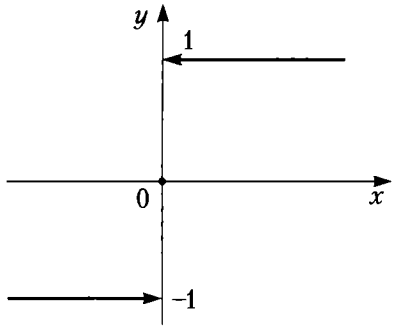


Рис. 3.3

означают, что полупрямые не достигают точек на оси ординат, так как при $x = 0$ значение функции определено по другому соответствию.

3. Графический способ. Здесь соответствие между аргументом и функцией задается посредством графика. Этот способ обычно используется в экспериментальных измерениях с употреблением самопишущих приборов (осциллографы, сейсмографы и т.п.).

Область определения функции

Остановимся на процедуре нахождения области определения функции.

1. В том случае, когда функция задана в аналитическом виде (посредством формулы)

$$y = f(x) \tag{3.1}$$

и никаких ограничений или оговорок более не имеется, область ее определения устанавливается исходя из правил выполнения математических операций, входящих в формулу f в (3.1). Эти ограничения хорошо известны: подкоренное выражение в корне четной степени не может быть отрицательным, знаменатель дроби не может быть равным нулю, выражение под знаком логарифма должно быть только положительным, а также некоторые другие. Приведем здесь два примера.

Пример 1. $y = \log_2(x^2 - 5x + 6)$.

Область определения этой функции находится из условия $x^2 - 5x + 6 > 0$. Поскольку $x = 2$ и $x = 3$ — корни квадратного трехчлена, стоящего под знаком логарифма, то это условие выполняется на двух полубесконечных интервалах: $(-\infty, 2)$ и $(3, \infty)$. На рис. 3.4 выделена заштрихованная полоса, в которой график функции отсутствует.

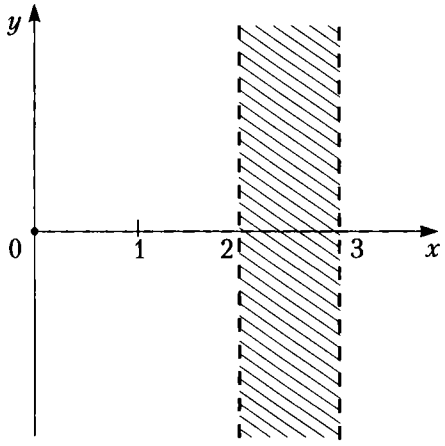


Рис. 3.4

Пример 2. $y = \arcsin \dfrac{1}{x+2}$.

Область определения этой функции находится из совокупности двух условий: аргумент под знаком arcsin не может быть по модулю больше единицы и знаменатель аргумента не должен равняться нулю, т.е.

$$-1 \le \frac{1}{x+2} \le 1, \quad x \ne -2.$$

Двойное неравенство эквивалентно двум более простым неравенствам: $x+2 \ge 1$ и $x+2 \le -1$. Отсюда получаем, что область определения функции состоит из двух полубесконечных промежутков: $(-\infty, -3]$ и $[-1, \infty)$. Запретная точка $x = -2$ сюда не попадает. В отличие от предыдущего примера концы полуинтервалов входят в область определения функции.

2. Область определения функции задана вместе с функцией $f(x)$.

Пример 3. $y = 3x^{-4/3} + 2$, $1 \le x \le 4$.

3. Функция имеет определенный прикладной характер, и область ее существования определяется также и реальными значениями входящих параметров (например, задачи с физическим смыслом).

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *четной* (симметрия относительно оси Oy), если для любых значений аргумента из области ее определения выполнено равенство

$$f(-x) = f(x).$$

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется *нечетной* (симметрия относительно начала координат O), если выполнено условие:

$$f(-x) = -f(x).$$

Например, функции $y = x^2$ и $y = \cos x$ являются четными, а функции $y = x^3$ и $y = \sin x$ — нечетными.

Простейшими элементарными функциями называются: постоянная функция $y = \text{const}$, степенная функция x^α (α — любое число), показательная функция $y = a^x$ ($0 < a$), логарифмическая функция $\log_a x$ ($0 < a \ne 1$), тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$. Графики основных элементарных функций показаны на рис. 3.5.

Функции, которые можно получить при помощи конечного числа арифметических операций над простейшими элементарными функциями, а также их суперпозицией (наложением), образуют класс *элементарных функций.*

Примеры элементарных функций:

$$f(x) = |x|/(1 - x^3), \quad f(x) = \log_2(\sin x - e^x), \quad f(x) = \operatorname{arctg} 3^x.$$

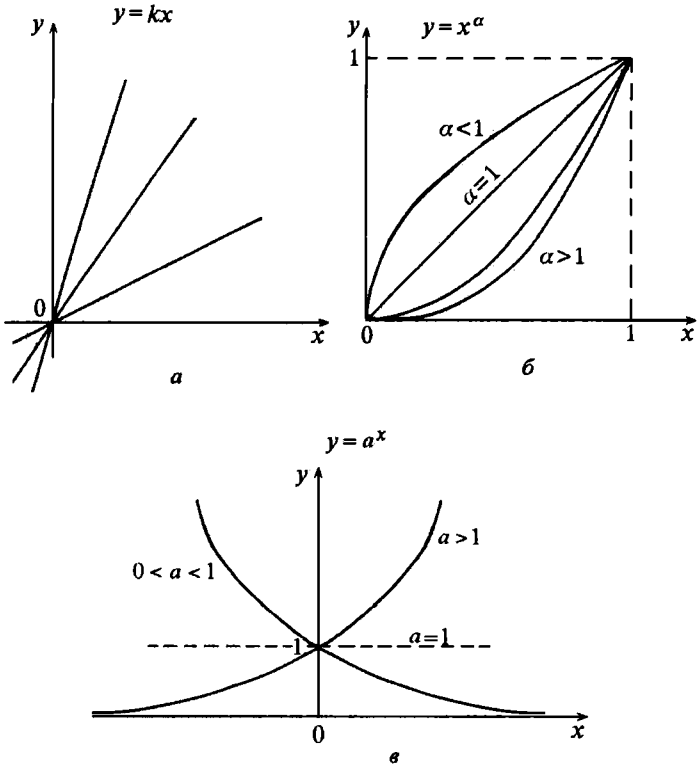


Рис. 3.5

Приложения в экономике

Приведем примеры использования функций в области экономики.

1. Кривые спроса и предложения. Точка равновесия. Рассмотрим зависимости спроса D (demand) и предложения S (supply) от цены на товар P (price). Чем меньше цена, тем больше спрос при постоянной покупательной способности населения. Обычно зависимость D от P имеет вид ниспадающей кривой:

$$D = P^a + c, \tag{3.2}$$

где $a < 0$. В свою очередь предложение растет с увеличением цены на товар, и потому зависимость S от P имеет следующую

характерную форму:

$$S = P^b + d, \tag{3.3}$$

где $b \geq 1$. В формулах (3.2) и (3.3) c и d — так называемые экзогенные величины; они зависят от внешних причин (благосостояние общества, политическая обстановка и т.п.). Вполне понятно, что переменные, входящие в формулы (3.2) и (3.3), положительны, поэтому графики функций имеют смысл только в первой координатной четверти.

Для экономики представляет интерес условие равновесия, т.е. когда спрос равен предложению; это условие дается уравнением

$$D(P) = S(P) \tag{3.4}$$

и соответствует точке пересечения кривых D и S — это так называемая точка равновесия (рис. 3.6). Цена P_0, при которой выполнено условие (3.4), называется *равновесной.*

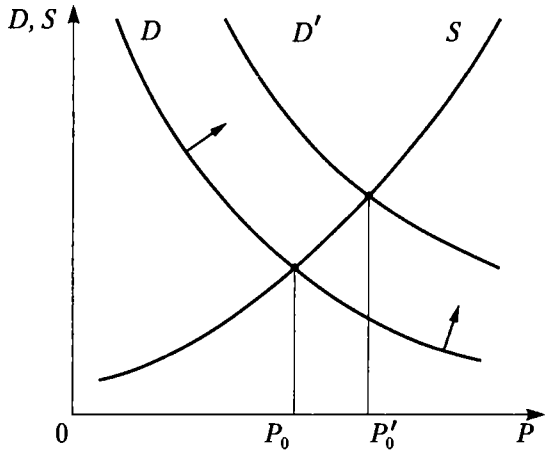


Рис. 3.6

При увеличении благосостояния населения, что соответствует росту величины c в формуле (3.2), точка равновесия смещается вправо, так как кривая D поднимается вверх; при этом цена на товар растет при неизменной кривой предложения S.

2. Паутинная модель рынка. Рассмотрим простейшую задачу поиска равновесной цены. Это одна из основных проблем рынка, означающая фактически торг между производителем и покупателем (рис. 3.7).

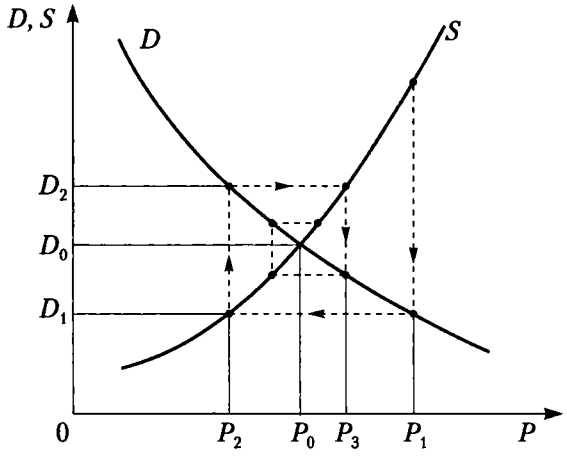


Рис. 3.7

Пусть сначала цену P_1 называет производитель (в простейшей схеме он же и продавец). Цена P_1 на самом деле выше равновесной (естественно, всякий производитель стремится получить максимум выгоды из своего производства). Покупатель оценивает спрос D_1 при этой цене и определяет свою цену P_2, при которой этот спрос D_1 равен предложению. Цена P_2 ниже равновесной (всякий покупатель стремится купить подешевле). В свою очередь производитель оценивает спрос D_2, соответствующий цене P_2, и определяет свою цену P_3, при которой спрос равен предложению; эта цена выше равновесной. Процесс торга продолжается и при определенных условиях приводит к устойчивому приближению к равновесной цене, т.е. к "скручиванию" спирали. Если рассматривать последовательность чисел, состоящую из называемых в процессе торга цен, то она имеет своим пределом равновесную цену P_0: $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$.

3.2. Предел функции

Предел функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве X. Возьмем из X последовательность точек

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, \tag{3.5}$$

сходящуюся к точке a, причем $a \in X$ или $a \notin X$. Соответствующие значения функции в точках этой последовательности также образуют числовую последовательность

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots, \tag{3.6}$$

и правомерно рассмотреть вопрос о ее сходимости.

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a (или пределом функции при $x \to a$), если для любой сходящейся к a последовательности (3.5) значений аргумента x, отличных от a, соответствующая последовательность значений функции (3.6) сходится к числу A.

Для обозначения предельного значения функции используется следующая символика: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Заметим, что функция $f(x)$ может иметь в точке a только одно предельное значение, поскольку последовательность $f(x_n)$ имеет только один предел.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Функция $f(x) = C = \text{const}$ имеет предел в каждой точке числовой прямой. Действительно, любой последовательности (3.5), сходящейся к точке a, соответствует последовательность (3.6), состоящая из одного и того же числа C, откуда следует, что $f(x_n) \to C$ при $n \to \infty$.

Пример 2. Функция $f(x) = x$ в любой точке a числовой прямой имеет предел, равный a. Действительно, последовательности значений аргумента (3.5) и значений функции (3.6) в этом случае тождественны, и если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, то и последовательность $\{f(x_n)\}$ также сходится к a.

Пример 3. Функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x - 1}$ имеет в точке $x = 0$ предел, равный -2. Действительно, пусть $\{x_n\}$ — любая последовательность значений аргумента, сходящаяся к нулю, т.е. $\lim x_n = 0$ при $n \to \infty$, тогда в силу свойств последовательностей 1–9 имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 3x_n + 2}{2x_n - 1} =$$
$$= \frac{(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^2 - 3(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) + 2}{2(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) - 1} = -2.$$

Левый и правый пределы функции

Здесь вводятся и в дальнейшем будут использоваться понятия односторонних пределов функции: когда последовательность значений аргумента $x_n \to a$ либо слева от точки a (*левый предел*), либо справа (*правый предел*), т.е. либо $x_n < a$, либо $x_n > a$. Для правого (левого) предела функции используется символическая запись:

$$\lim_{x\to a+} f(x) = A \quad \left(\lim_{x\to a-} f(x) = A\right).$$

Пример 4. Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{sign} x$ (п. 3.1, пример 3). В точке $x = 0$ эта функция имеет левый и правый пределы:

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{sign} x = -1, \quad \lim_{x\to 0+} \operatorname{sign} x = +1.$$

Действительно, для любой сходящейся к нулю последовательности $\{x_n\}$, у которой все элементы $x_n < 0$ ($x_n > 0$), соответствующая последовательность значений функции состоит только из одного числа -1 ($+1$), т.е. предел слева (справа) в точке $x = 0$ также равен этому числу.

ТЕОРЕМА 3.1. *Функция $f(x)$ имеет в точке a предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют левый и правый пределы, причем они равны. В таком случае предел функции равен односторонним пределам.*

Предел функции при $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$

Кроме понятия предела функции в точке существует также и понятие предела функции при стремлении аргумента к бесконечности. Для обозначения предела функции при $x \to \infty$ используется запись: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Приведем пример предела функции при $x \to \infty$. Пусть $f(x) = 1/x$. Эта функция имеет предел при $x \to \infty$, равный нулю. Действительно, если (3.5) — бесконечно большая последовательность значений аргумента, то соответствующая последовательность (3.6) значений функции имеет вид $1/x_1, 1/x_2, \ldots, 1/x_n, \ldots$; она является бесконечно малой (п. 2.1), т. е. ее предел равен нулю, или в символической записи $\lim\limits_{x\to\infty} (1/x) = 0$.

Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} (1/x^n) = 0$ при $n > 0$.

3.3. Теоремы о пределах функций

Арифметические операции над функциями, имеющими предел в точке a, приводят к функциям, также имеющим предел в этой точке.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке a пределы A и B. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\,g(x)$ и $f(x)/g(x)$ (при $B \neq 0$) имеют в точке a пределы, равные соответственно $A \pm B$, AB и A/B.*

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, и функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в этой точке предел, равный A: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$. Кроме того, пусть выполнены неравенства $f(x) \le h(x) \le g(x)$. Тогда*

$$\lim_{x\to a} h(x) = A.$$

Заметим, что теоремы 3.2 и 3.3 справедливы и в случае, когда a является ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Часто встречаются случаи, когда непосредственно применить теорему о пределе частного нельзя. Это так называемые неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Далее будет рассмотрен

метод раскрытия этих неопределенностей, связанный с дифференцированием. Однако зачастую решение связано с более простыми методами: разложением числителя и знаменателя на сомножители, делением числителя и знаменателя на степень x и т.д. Рассмотрим это на примерах.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$.

Решение. Нетрудно видеть, что непосредственная подстановка предельного значения $x=2$ в дробь под знаком предела приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Разложим квадратные трехчлены числителя и знаменателя на сомножители и сократим общий сомножитель, после чего уже подставим предельное значение $x=2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}=\frac{2-3}{2-1}=-1.$$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{x+1}$.

Решение. В задачах такого типа следует разделить числитель и знаменатель на старшую степень x (в данном случае это просто x) и затем применить теорему 3.2 о переходе к пределу в числителе и знаменателе с последующим переходом к пределу слагаемых. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+2/x}{1+1/x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3+2/x)}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)}=$$

$$=\frac{3+\lim\limits_{x\to\infty}(2/x)}{1+\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)}=\frac{3+0}{1+0}=3.$$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^3+x^2+3}$.

Решение. Поделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на x^3 (это старшая степень x), после чего вос-

пользуемся теоремой 3.2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x+1/x^2+1/x^3}{1+1/x+3/x^3}=\frac{0+0+0}{1+0+0}=\frac{0}{1}=0.$$

Поясним также раскрытие неопределенности вида $\infty-\infty$. Рассмотрим характерный случай.

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$.

Решение. Здесь следует умножить и разделить выражение под знаком предела на сопряженное выражение — в данном случае на $(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})$, после чего воспользоваться приемом деления числителя и знаменателя на старшую степень x, в данном случае — на $\sqrt{x}$. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-x}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2/\sqrt{x}}{(\sqrt{1+2/x}+1)}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=0.$$

3.4. Два замечательных предела

В этом разделе приводятся два предела функции, которые наиболее широко используются в математике и ее приложениях. Доказательства соответствующих теорем мы опускаем.

ТЕОРЕМА 3.4. *Предел функции* $\dfrac{\sin x}{x}$ *в точке* $x=0$ *существует и равен единице, т.е.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{3.7}$$

Предел (3.7) называется *первым замечательным пределом.* Этот предел применяется при вычислении ряда других пределов. Рассмотрим несколько примеров на применение предела (3.7).

Пример 1. Найти предел функции $\sin(ax)/bx$ при $x \to 0$.

Решение. Преобразуем данную дробь так, чтобы в знаменателе был аргумент синуса; только тогда можно будет применить первый замечательный предел, поскольку при $x \to 0$ пределом ax также является нуль. Получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}\frac{a}{b}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}\lim_{x\to 0}\frac{a}{b}=1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. Теорему 3.2 здесь непосредственно применить нельзя, так как при $x \to 0$ знаменатель дроби стремится к нулю. Для решения задачи необходимо сначала преобразовать данную дробь, а затем уже выполнить предельный переход:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

Решение. Как и в первых двух примерах, преобразуем данную дробь, чтобы "подогнать" ее под первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin 4x}{x^2}=$$

$$=2\cdot 2\cdot 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=16\cdot 1\cdot 1=16.$$

ТЕОРЕМА 3.5 (второй замечательный предел). *Предел функции* $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ *при* $x\to\infty$ *существует и равен* e, *т.е.*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (3.8)$$

Число e является одной из фундаментальных величин в математике. Показательная функция вида e^{ax} называется *экспонентой*, логарифм с основанием e называется *натуральным* и обозначается символом ln. В теории вероятностей и статистике функция e^{-x^2} является основополагающей.

Второй замечательный предел (3.8) широко применяется для вычисления других пределов. Рассмотрим примеры на его применение.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$.

Решение. Применим здесь замену переменной, полагая $1/x = y$. Тогда $y \to \infty$ при $x \to 0$, т.е. имеем

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to\infty}(1+1/y)^y = e.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$.

Решение. Заменим переменную, положив $x{=}2y$. При $x{\to}\infty$ (а значит, и $y \to \infty$) последовательно получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y} =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left[(1+\frac{1}{y})^y\right]^2 = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y \cdot \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y =$$

$$= e \cdot e = e^2.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\log_a(1+x)/x)$.

Решение. Сначала преобразуем дробь под знаком предела, а затем уже перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x} =$$

$$= \log_a[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}] = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

3.5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой функцией* (или просто бесконечно малой) в точке $x = a$, если предел ее в этой точке равен нулю: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Аналогично определяются бесконечно малые при $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$, $x \to a+$ и $x \to a-$.

ТЕОРЕМА 3.6. *Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций в точке a, как и произведение бесконечно малой на ограниченную функцию, являются бесконечно малыми функциями в точке a.*

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой функцией* в точке a (или просто бесконечно большой), если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции является бесконечно большой.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$) и говорят, что функция имеет в точке a бесконечный предел ($+\infty$ или $-\infty$). По аналогии с конечными односторонними пределами определены и односторонние бесконечные пределы:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a+} f(x) = -\infty.$$

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями существует та же связь, что и между соответствующими последовательностями, т.е. если $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$, то $f(x) = 1/\alpha(x)$ — бесконечно большая функция, и наоборот.

3.6. Понятие непрерывности функции

Понятие непрерывности функции является фундаментальным в математическом анализе. Сформулируем его на языке

последовательности. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если предел этой функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Так как $\lim\limits_{x\to a} x=a$, то это равенство можно переписать в следующей форме:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *непрерывной справа (слева)* в точке a, если правый (левый) предел этой функции в точке a равен значению функции в этой точке.

Символическая запись непрерывности функции справа (слева):

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a) \text{ или } f(a+0) = f(a)$$

$$(\lim_{x\to a-} f(x) = f(a) \text{ или } f(a-0) = f(a)).$$

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a слева и справа, то она непрерывна в этой точке.

Точки, в которых функция не является непрерывной, называются *точками разрыва* функции.

Рассмотрим пример точек, в которых функция не является непрерывной.

Пример 1. Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ (п. 3.1). Как было показано ранее, в точке $x = 0$ существуют левый и правый пределы этой функции, равные соответственно -1 и $+1$. Сама же точка $x = 0$ является точкой разрыва функции, поскольку пределы слева и справа не равны значению $f(0) = 0$.

Действия над непрерывными в точке функциями определяет следующая фундаментальная теорема.

ТЕОРЕМА 3.7. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\,g(x)$ и $f(x)/g(x)$ также непрерывны в точке a (частное при условии $g(a) \neq 0$).*

3.7. Непрерывность элементарных функций

Непрерывность элементарных функций в точке

Постоянная функция $f(x) = C$ является непрерывной в любой точке числовой прямой. Действительно, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = C = f(a)$, что соответствует определению непрерывности функции в точке.

Функция $f(x) = x$ непрерывна в каждой точке a числовой прямой, так как предел функции в точке a равен ее значению в этой точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a = f(a)$.

Из сказанного выше и теоремы 3.7 следует, что в любой точке числовой прямой функции $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x, \ldots$, $x^n = x^{n-1} \cdot x$ (n — натуральное число) непрерывны.

Алгебраический многочлен

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

также является непрерывной функцией в любой точке числовой прямой в силу теоремы 3.7, поскольку представляет собой сумму произведений непрерывных функций.

Дробно-рациональная функция

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — алгебраические многочлены, в силу теоремы 3.7 непрерывна во всех точках числовой прямой за исключением корней знаменателя.

Тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны в любой точке x числовой прямой.

Непрерывность функций $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ и $\sec x = 1/\cos x$ соблюдается во всех точках, $x \neq \pi/2 + n\pi$; аналогично непрерывность функций $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$ и $\sec x = 1/\sin x$ обеспечена во всех точках $x \neq n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Рассмотренные выше функции непрерывны в каждой точке, в окрестности которой они определены. В силу теоремы 3.7 функции, получаемые из них при использовании конечного числа арифметических операций, являются также непрерывными.

Непрерывность функции на интервале и отрезке

Говорят, что функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) и непрерывна в точке a справа, а в точке b слева:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to b-} f(x) = f(b).$$

Классификация точек разрыва функции

Точки разрыва, в которых функция не является непрерывной, классифицируются следующим образом.

1. Устранимый разрыв. Точка a называется точкой *устранимого разрыва* функции $f(x)$, если предел функции в этой точке существует, но в точке a функция $f(x)$ либо не определена, либо ее значение $f(a)$ не равно пределу в этой точке.

Пример 1. Функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$, как известно, имеет предел, равный единице (первый замечательный предел). Однако в самой точке $x = 0$ эта функция не определена, т.е. здесь разрыв первого вида. Этот разрыв можно устранить (потому он и называется устранимым), если доопределить функцию в этой точке значением предела в ней, т.е. ввести новую функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Функция $f_1(x)$ является непрерывной на всей числовой прямой.

2. Разрыв первого рода. Точка a называется точкой разрыва *первого рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы:

$$\lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x).$$

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

для нее точка $x = 0$ является точкой разрыва 1-го рода.

3. Разрыв второго рода. Точка a называется точкой разрыва *второго рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

Пример 3. Для функции $f(x) = 1/x$ точка $x = 0$ является точкой разрыва 2-го рода, поскольку $\lim\limits_{x \to 0+} (1/x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} (1/x) = -\infty$.

Пример 4. Для функции $f(x) = \sin(1/x)$ точка $x = 0$ является точкой разрыва 2-го рода, так как ни левого, ни правого предела функции в этой точке не существует.

Пример 5. Рассмотрим функцию $f(x) = e^{1/x} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (рис. 3.8).

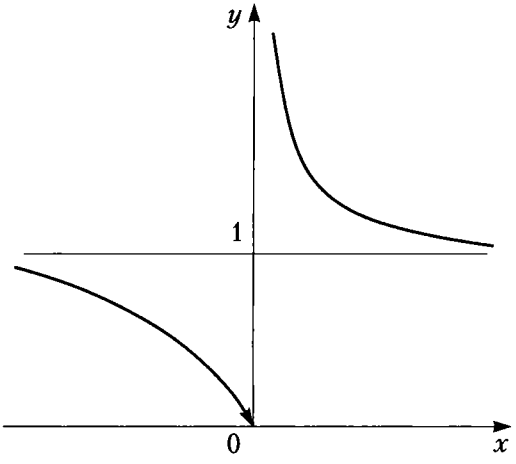


Рис. 3.8

Точка $x = 0$ является точкой разрыва 2-го рода для этой функции, так как предел слева равен нулю, а предел справа бесконечен:

$$\lim_{x\to 0-}(e^{1/x}) = 0, \quad \lim_{x\to 0+}(e^{1/x}) = +\infty.$$

3.8. Понятие сложной функции

Определение. Если на некотором промежутке X определена функция $z = \varphi(x)$ с множеством значений Z и на множестве Z определена функция $y = f(z)$, то функция $y = f[\varphi(x)]$ называется сложной функцией от x (или суперпозицией функций), а переменная z — промежуточной переменной сложной функции.

Приведем примеры сложных функций.

Пример 1. $y = \cos\sqrt{1-x}$ — сложная функция, определенная на полубесконечном интервале $(-\infty, 1]$, так как $y = f(z) = \cos z$, $z = \varphi(x) = \sqrt{1-x}$.

Пример 2. $y = e^{-x^2}$ — сложная функция, определенная на всей числовой прямой, поскольку $y = f(z) = e^z$, $z = \varphi(x) = -x^2$.

Пример 3. $y = \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{3/2}$ — сложная функция, определенная на полубесконечных интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, так как $y = f(z) = z^{3/2}$, $z = \varphi(x) = (1+x)/x$.

ТЕОРЕМА 3.8. *Пусть функция $z = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(z)$ непрерывна в точке $z_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.*

Пример 4. Функция $y = \operatorname{tg}(x^2+2x)$ непрерывна в точке $x=0$, так как функция $z = x^2 + x$ непрерывна в точке $x = 0$, а функция $y = \operatorname{tg} z$ непрерывна в точке $z = 0$.

3.9. Элементы аналитической геометрии на плоскости

Уравнение линии на плоскости

Пусть на плоскости задана система координат. Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y) = 0. \tag{3.9}$$

Говорят, что уравнение (3.9) определяет (задает) линию L в системе координат Oxy: геометрическое место точек на координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (3.9). Вообще говоря, линии на координатной плоскости могут быть самыми различными.

Линии первого порядка

К линиям первого порядка относятся те линии, для которых задающее их уравнение (3.9) содержит переменные x и y только в первой степени. Иными словами, такие линии описываются уравнениями вида

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.10}$$

где A, B и C — постоянные числа. Из этого уравнения можно выразить переменную y как функцию от аргумента x при $B \neq 0$:

$$y = kx + b. \tag{3.11}$$

Уравнение (3.11) называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом* $k = \operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox (рис. 3.9). Если $k = 0$, то прямая параллельна оси Ox и отстоит от нее на b масштабных единиц.

Определим самые необходимые элементы знания о прямых на плоскости.

1. Кроме "классического" уравнения прямой (3.11) следует знать еще две его разновидности. Первая из них — это уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

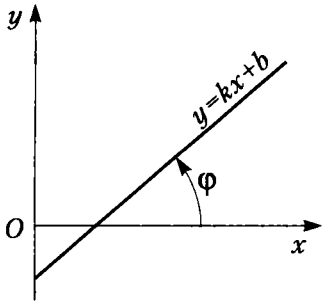


Рис. 3.9

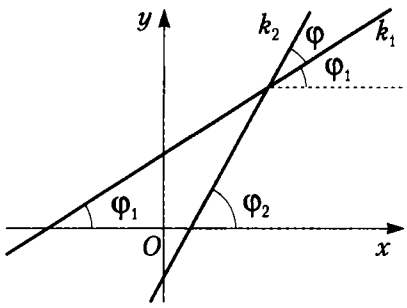


Рис. 3.10

Другой вид — это уравнение прямой, проходящей через две заданные точки на плоскости $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

2. **Угол между прямыми.** Рассмотрим две прямые, заданные уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, где $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$ и $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$ (рис. 3.10). Пусть φ — угол между этими прямыми. Тогда $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, и мы получаем $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}$, или, что то же самое,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{3.12}$$

Формула (3.12) определяет один из углов между пересекающимися прямыми; второй угол равен $\pi - \varphi$.

Из равенства (3.12) вытекают условия параллельности и перпендикулярности прямых. В самом деле, если прямые параллельны, то

$$k_1 = k_2.$$

Если прямые перпендикулярны, то $\alpha_2 = \pi/2 + \alpha_1$, откуда $\operatorname{tg}\alpha_2 = -\operatorname{ctg}\alpha_1 = -1/\operatorname{tg}\alpha_1$, или окончательно

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Пример 1. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $y = 2x - 5$ и $y = -3x + 4$.

Решение. Подставляя в формулу (3.12) значения $k_1 = 2$ и $k_2 = -3$, имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-3-2}{1-6} = 1,$$

откуда получаем, что один из углов равен $\varphi = \pi/4$.

3. **Расстояние от точки до прямой**. Пусть прямая задана уравнением общего вида (3.10). Тогда расстояние d от произвольной точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой (рис. 3.11) дается формулой

$$d = |Ax_0 + By_0 + C|/\sqrt{A^2 + B^2}.$$

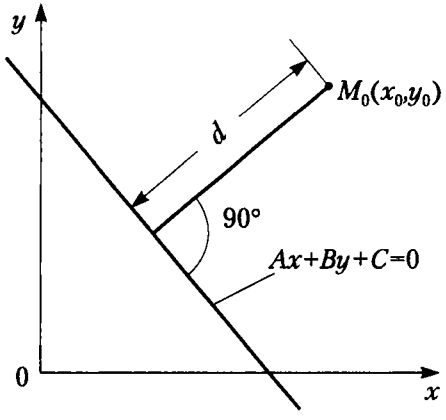


Рис. 3.11

Линии второго порядка

Рассмотрим здесь три наиболее используемых вида линий: эллипс, гиперболу и параболу.

1. Эллипс. Линия, для всех точек которой сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная и бóльшая, чем расстояние между фокусами, называется *эллипсом*.

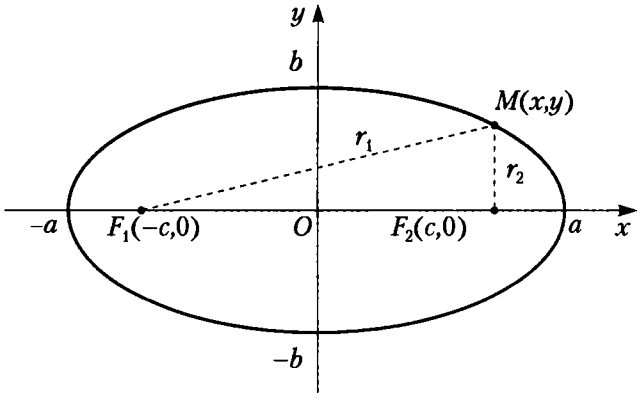


Рис. 3.12

Согласно определению эллипса, сумма расстояний от произвольной точки M на этой линии до его фокусов F_1 и F_2 постоянна (рис. 3.12):

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Отсюда можно вывести уравнение эллипса в его основной (*канонической*) форме:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.13}$$

где a и b — полуоси эллипса, $b^2 = a^2 - c^2$, точка $O(0,0)$ — центр эллипса, c — половина расстояния между фокусами эллипса. Из уравнения (3.13) следует, что оси эллипса являются его осями симметрии, а точка их пересечения — центром его симметрии.

В частном случае, когда $a = b$, фокусы эллипса сливаются, т.е. $c = 0$, и мы имеем окружность радиуса a с центром в начале координат. Характеристикой эллипса, показывающей меру его вытянутости, является *эксцентриситет* — величина, определяемая отношением

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

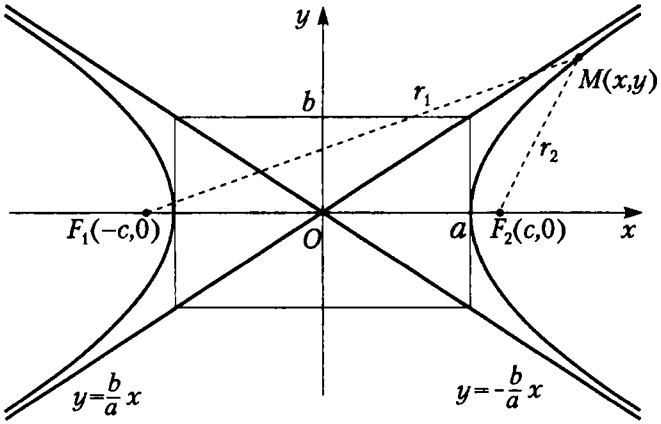


Рис. 3.13

2. Гипербола. *Гиперболой* называется линия, для всех точек которой модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная и меньшая, чем расстояние между фокусами.

На рис. 3.13 показаны все основные элементы гиперболы. Разность расстояний от произвольной точки M на гиперболе до фокусов F_1 и F_2, согласно определению, есть величина постоянная:

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Из этого равенства выводится *каноническое уравнение гиперболы*, которое имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.14}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Нетрудно видеть, что прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются наклонными асимптотами гиперболы. Линия (3.14) имеет две оси симметрии, точка пересечения которых является центром симметрии гиперболы.

3. Парабола. *Параболой* называется линия, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от данной точки,

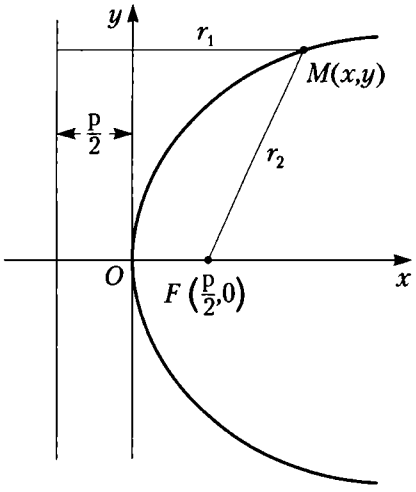


Рис. 3.14

называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Согласно определению, точка $M(x, y)$ лежит на параболе, если $r_1 = r_2$. Отсюда и выводится *каноническое уравнение параболы*, которое имеет вид

$$y = \sqrt{2px}. \tag{3.15}$$

График параболы (3.15) показан на рис. 3.14. Нетрудно видеть, что перемена осей координат приводит к более привычному уравнению параболы вида $y = Ax^2$, где A — постоянное число.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти области определения функций, заданных следующими формулами.

3.1. $y = 3x - 2$. **3.2.** $y = x^2 - 5x + 6$. **3.3.** $y = \dfrac{2x-4}{3x-2}$.

3.4. $y = \sqrt{x^2 - 9}$. **3.5.** $y = \sqrt{x-3} - \sqrt{x+3}$.

3.6. $y = \sqrt{x-3} + \dfrac{1}{\sqrt{x-6}}$. **3.7.** $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

3.8. $y = \dfrac{x^2 - 2}{\sqrt{3x - 2 - x^2}}$. **3.9.** $y = x + \cos 2x$.

3.10. $y = \operatorname{arctg}(2x + 1)$. **3.11.** $y = 2^{1/x}$. **3.12.** $y = \dfrac{\cos x}{x^2 - 3x + 2}$.

3.13. $y = \log_3(2x - 6)$. **3.14.** $y = \log_5(3x - x^2)$.

3.15. $f(x) = x^2 + x - 2$, найти $f(0)$, $f(1)$, $f(-3)$.

3.16. $f(x) = \arccos(\lg x)$, найти $f(1/10)$, $f(1)$, $f(10)$.

3.17. $y = \sqrt{\sin x - 1}$.

3.18. Спрос и предложение на некоторый товар на рынке описываются линейными зависимостями вида

$$D(P) = a - bP, \quad S(P) = dP + c.$$

1) Определить равновесную цену; 2) установить графическим способом, является ли модель паутинного рынка "скручивающейся". Варианты задания параметров зависимостей спроса и предложения:

а) $a = 19$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 2$; **б)** $a = 15$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 4$; **в)** $a = 11$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 1$; **г)** $a = 23$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 6$.

Найти пределы.

3.19. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$. **3.20.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x - 2}{x^2 - x + 4}$. **3.21.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - 5x + 7}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 4}{x^2 - 3}$. **3.23.** $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{1 + x^2} - x)$.

3.24. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$. **3.25.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 7x + 6}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$. **3.27.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$. **3.29.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$. **3.30.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} 3x}$.

3.31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$. **3.32.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x + 1}{2x - 3}\right)^{2x+1}$.

3.33. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x}{2x - 3}\right)^{3x}$.

Найти точки разрыва функций и определить типы разрывов.

3.34. $y = \dfrac{x}{x + 2}$. **3.35.** $y = 2^{-1/x}$. **3.36.** $y = \operatorname{tg} x$.

3.37. $y = e^{\operatorname{tg} x}$. **3.38.** $y = \exp(-|\operatorname{tg} x|)$.

3.39. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$. **3.40.** $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$.

Глава 4
ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

4.1. Понятие производной

Определение производной

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке X. Придадим значению аргумента в точке $x_0 \in X$ *произвольное приращение* Δx так, чтобы точка $x_0 + \Delta x$ также принадлежала X. Тогда соответствующее *приращение функции* $f(x)$ составит $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 1. *Производной функции* $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$ (если этот предел существует).

Для обозначения производной функции употребимы символы $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (4.1)$$

Если в некоторой точке x_0 предел (4.1) бесконечен:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \text{ или } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty,$$

то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет *бесконечную производную.*

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке множества X, то производная $f'(x)$ также является функцией от аргумента x, определенной на X.

Геометрический смысл производной

Для выяснения геометрического смысла производной нам понадобится определение касательной к графику функции в данной точке.

Определение 2. *Касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке M называется предельное положение секущей MN, когда точка N стремится к точке M по кривой $f(x)$.

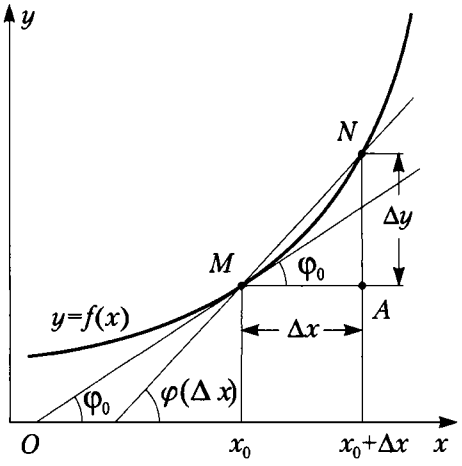


Рис. 4.1

Пусть точка M на кривой $f(x)$ соответствует значению аргумента x_0, а точка N — значению аргумента $x_0 + \Delta x$ (рис. 4.1). Из определения касательной следует, что для ее существования в точке x_0 необходимо, чтобы существовал предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(x) = \varphi_0$, который равен углу наклона касательной к оси Ox. Из треугольника MNA следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi(x_0 + \Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если производная функции $f(x)$ в точке x_0 существует, то, согласно (4.1), получаем

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = f'(x_0). \qquad (4.2)$$

Отсюда следует наглядный вывод о том, что *производная $f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту (тангенсу угла наклона к положительному направлению оси Ox) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$*. При этом угол наклона касательной определяется из формулы (4.2):

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} f'(x_0).$$

Физический смысл производной

Предположим, что функция $l = f(t)$ описывает закон движения материальной точки по прямой как зависимость пути l от времени t. Тогда разность $\Delta l = f(t + \Delta t) - f(t)$ — это путь, пройденный за интервал времени Δt, а отношение $\Delta l/\Delta t$ — средняя скорость за время Δt. Тогда предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} (\Delta l/\Delta t) = f'(t)$ определяет *мгновенную скорость точки* в момент времени t как производную пути по времени.

В определенном смысле производную функции $y = f(x)$ можно также трактовать как скорость изменения функции: чем больше величина $|f'(x)|$, тем больше угол наклона касательной к кривой, тем круче график $f(x)$ и быстрее растет (убывает) функция.

Правая и левая производные

По аналогии с понятиями односторонних пределов функции вводятся понятия правой и левой производных функции в точке.

Определение 3. *Правой (левой)* производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется правый (левый) предел отношения (4.1) при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует.

Для обозначения односторонних производных используется следующая символика:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \left(f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right).$$

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то она имеет левую и правую производные в этой точке, которые совпадают.

Приведем пример функции, у которой существуют односторонние производные в точке, не равные друг другу. Это $f(x) = |x|$. Действительно, в точке $x = 0$ имеем $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$ (рис. 4.2) и $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, т.е. функция не имеет производной при $x = 0$.

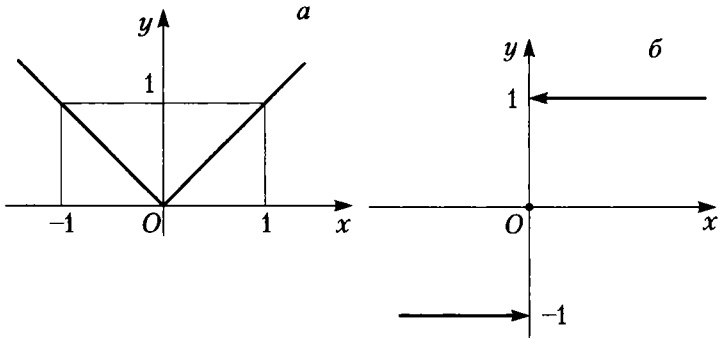


Рис. 4.2

Операцию нахождения производной функции называют ее *дифференцированием*; функция, имеющая производную в точке, называется *дифференцируемой*.

Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке устанавливает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. *Если функция дифференцируема в точке x_0, то она и непрерывна в этой точке.*

Обратное утверждение неверно: функция $f(x)$, непрерывная в точке, может не иметь производную в этой точке. Таким примером является функция $y = |x|$; она непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет производной в этой точке.

Таким образом, требование дифференцируемости функции является более сильным, чем требование непрерывности, поскольку из первого автоматически вытекает второе.

Уравнение касательной к графику функции в данной точке

Как было указано в разделе 3.9, уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$, с угловым коэффициентом k имеет вид

$$y - y_0 = k\,(x - x_0).$$

Пусть задана функция $y = f(x)$. Тогда поскольку ее производная в некоторой точке $M(x_0, y_0)$ является угловым коэффициентом касательной к графику этой функции в точке M, то отсюда следует, что уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в этой точке имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

4.2. Понятие дифференциала функции

Определение и геометрический смысл дифференциала

Определение 1. *Дифференциалом функции* $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке:

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \tag{4.3}$$

Дифференциалом dx независимой переменной x будем называть приращение этой переменной Δx, т.е. соотношение (4.3) принимает вид

$$dy = f'(x_0)\,dx. \tag{4.4}$$

Из равенства (4.4) производную $f'(x)$ в любой точке x можно вычислить как отношение дифференциала функции dy к дифференциалу независимой переменной dx:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{4.5}$$

Дифференциал функции имеет четкий геометрический смысл (рис. 4.3). Пусть точка M на графике функции $y =$

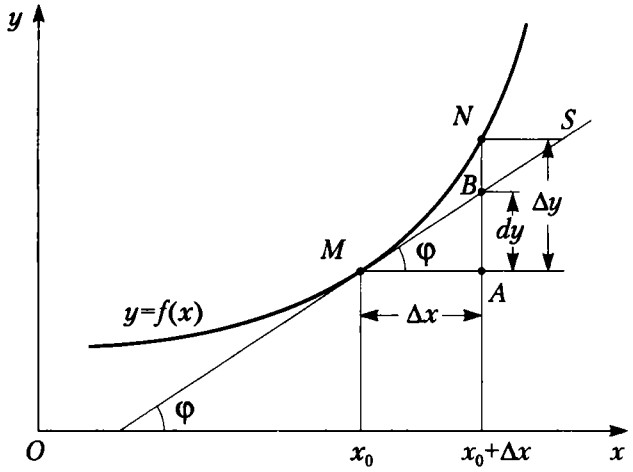


Рис. 4.3

$= f(x)$ соответствует значению аргумента x_0, точка N — значению аргумента $x_0 + \Delta x$, MS — касательная к кривой $f(x)$ в точке M, φ — угол между касательной и осью Ox. Тогда MA — приращение аргумента, AN — соответствующее приращение функции. Рассматривая треугольник ABM, получаем, что $AB = \Delta x \operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)\Delta x = dy$, т.е. это главная по порядку величины Δx и линейная относительно нее часть приращения функции Δy. Оставшаяся часть более высокого порядка малости соответствует отрезку BN.

Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Приближенные вычисления с применением дифференциала функции основаны на приближенной замене приращения функции в точке на ее дифференциал:

$$\Delta y \approx dy.$$

Абсолютная погрешность от такой замены является, как следует из рис. 4.3, при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с Δx. Подставляя в это приближенное соотношение формулу (4.4) и выражение для Δy, получаем

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (4.6)$$

Формула (4.6) является основной в приближенных вычислениях.

Пример. Вычислить приближенное значение корня $\sqrt{1,07}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^{0,5}$ в окрестности точки $x_0 = 1$. Поскольку, как будет показано далее, производная этой функции вычисляется по формуле $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, то, принимая $\Delta x = 0{,}07$, получаем из формулы (4.6)

$$f(1+0,07) = \sqrt{1,07} \approx f(1) + f'(1)0{,}07 = 1 + 0{,}0035.$$

4.3. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного

Приведем без доказательства одну из основных теорем дифференциального исчисления.

ТЕОРЕМА 4.2. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то сумма (разность), произведение и частное этих функций (частное при условии $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке, причем справедливы следующие формулы:*

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (u\,v)' = u'v + u\,v', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}.$$

4.4. Таблица производных простейших элементарных функций

Производные всех простейших элементарных функций можно свести в следующую таблицу.

1. $(C)' = 0$, где C — постоянное число.
2. $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$; в частности, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e$; в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
4. $(a^x)' = a^x \ln a$; в частности, $(e^x)' = e^x$.

5. $(\sin x)' = \cos x$.

6. $(\cos x)' = -\sin x$.

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Формулы, приведенные в таблице, вместе с правилами дифференцирования (теорема 4.2) являются основными формулами дифференциального исчисления. Отсюда можно сделать важный вывод: поскольку производная любой элементарной функции есть также элементарная функция, то операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций.

4.5. Дифференцирование сложной функции

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет производную в точке t_0, а функция $y = f(x)$ имеет производную в соответствующей точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда сложная функция $f[\varphi(t)]$ имеет производную в точке t_0 и справедлива следующая формула:*

$$y'(t_0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = f'(x_0)\,\varphi'(t_0). \tag{4.7}$$

В теореме 4.3 рассмотрена суперпозиция двух функций, где y зависит от t через промежуточную переменную x. Возможна и более сложная зависимость с двумя и более промежуточными переменными, однако правило дифференцирования сложной функции остается тем же. Например, если $y = y(x)$, $x = \varphi(u)$, $u = \psi(t)$, то производная $y'(t)$ вычисляется по формуле

$$y'(t) = y'(x)\,\varphi'(u)\,\psi'(t).$$

Рассмотрим несколько примеров на дифференцирование сложной функции.

Пример 1. Найти производную функции $y = \operatorname{tg}(x^3)$.

Решение. Эту функцию можно представить через промежуточную переменную u как $y = \operatorname{tg} u$, $u = x^3$. Тогда по формуле (4.7) имеем

$$y'(x) = y'(u)\,u'(x) = \frac{1}{\cos^2 u}3x^2 = \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = e^{\operatorname{tg}^2 4x}$.

Решение. Здесь функция представляется с помощью трех промежуточных переменных: $y = e^u$, $u = v^2$, $v = \operatorname{tg} w$, $w = 4x$. Применяя правило (4.7) дифференцирования сложной функции, последовательно получаем

$$y'(x) = y'(u)\,u'(v)\,v'(w)\,w'(x) = e^u 2v(w)v'(w)w'(x) =$$
$$= e^u 2v\frac{1}{\cos^2 v}4 = \frac{8\ \operatorname{tg} 4x}{\cos^2 4x}e^{\operatorname{tg}^2 4x}.$$

Пример 3. Найти угол наклона к оси Ox касательной к графику функции

$$y = e^{-\sin 3x} + \operatorname{tg} 4x \text{ в точке } x = 0.$$

Решение. Данная функция является суммой двух сложных функций, представляемых через промежуточные переменные как

$$y = e^u + \operatorname{tg}\alpha,\ u = -w,\ w = \sin z,\ z = 3x,\ \alpha = 4x.$$

Применяя правила дифференцирования суммы функций и сложных функций, получаем

$$y'(x) = e^u u'(w)\,w'(z)\,z'(x) + \frac{1}{\cos^2\alpha}\alpha'(x) =$$
$$= e^u(-1)\cos z\,3 + \frac{4}{\cos^2\alpha} = -3\cos 3x e^{-\sin 3x} + \frac{4}{\cos^2 4x}.$$

Поскольку тангенс угла наклона касательной к оси Ox при $x = 0$ равен значению производной в этой точке, из последнего равенства получаем, подставляя в него $x = 0$:

$$\operatorname{tg}\varphi = y'(0) = -3 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{4}{1} = -3 + 4 = 1,$$

откуда $\varphi = \operatorname{arctg} 1 = 45°$.

4.6. Понятие производной n-го порядка

Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ сама является функцией аргумента x, и по отношению к ней также можно ставить вопрос о производной. Производная от первой производной некоторой функции $y = f(x)$ называется *второй производной* или *производной второго порядка* этой функции. Производная от второй производной называется *третьей производной* или *производной третьего порядка*. Этот процесс можно продолжить. Производные начиная со второй называются *производными высших порядков*. Для их обозначения используют символы: y'', y''', $y^{(4)}$, $y^{(5)}$, ..., $y^{(n)}$ (для второй и третьей производных соответственно еще и $y^{(2)}$ и $y^{(3)}$) или вместо y пишут $f(x)$: $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$.

Производная n-го порядка определяется, таким образом, как производная от производной $(n-1)$-го порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Рассмотрим несколько примеров на вычисление производных высших порядков.

Пример 1. Найти производную второго порядка от функции $y = x^3 + 2x$.

Решение. Последовательно находим первую производную, а затем и производную от нее:

$$y' = 3x^2 + 2, \quad y'' = 6x.$$

Пример 2. Найти производную второго порядка от функции $y = e^{-x^2}$.

Решение. Сначала находим первую производную сложной функции:

$$y' = -2x\,e^{-x^2}.$$

Затем ищем вторую производную, дифференцируя полученное произведение функций:

$$y'' = -2\,e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = 2\,e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Пример 3. Найти производную третьего порядка от функции $y = x \ln x$.

Решение. Последовательно находим

$$y' = \ln x + 1, \quad y'' = 1/x, \quad y''' = -1/x^2.$$

Пример 4. Найти производную n-го порядка от функции $y = e^{2x}$.

Решение. Находим

$$y' = 2\,e^{2x}, \quad y'' = 4\,e^{2x},$$

т.е. каждое дифференцирование прибавляет к исходной функции сомножитель 2. Отсюда получаем

$$y^{(n)} = 2^n\,e^{2x}.$$

В заключение укажем формулы для вычисления производных n-го порядка для функций $\sin x$ и $\cos x$. Нетрудно убедиться, что

$$\sin^{(n)} x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

УПРАЖНЕНИЯ

Найти производные следующих функций.

4.1. $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$. **4.2.** $y = 5x^7 + 3x^3 - 4x - 1$.

4.3. $y = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$.

4.4. $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + x^4$. **4.5.** $y = \sqrt[4]{x^3} + \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{2}{x^4} - 2$.

4.6. $y = 3x^5 + 2\sin x + 5\,\mathrm{tg}\,x$. **4.7.** $y = \sqrt[6]{x^5} - 4x^6 + 2\ln x - \mathrm{ctg}\,x$.
4.8. $y = \log_2 x - 3\log_3 x$. **4.9.** $y = 3e^x + \mathrm{arctg}\,x - \arcsin x$.
4.10. $y = 5^x + 6^x + (\frac{1}{5})^x$. **4.11.** $y = x^2\,\mathrm{tg}\,x$. **4.12.** $y = \sqrt[7]{x^2}\ln x$.
4.13. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{6}{\sqrt[4]{x^3}} + x\arccos x$. **4.14.** $y = x^2\log_3 x - e^x\,\mathrm{tg}\,x$.
4.15. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. **4.16.** $y = \dfrac{\ln x}{\cos x} + x\,\mathrm{tg}\,x$. **4.17.** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.
4.18. $y = \dfrac{x\,\mathrm{tg}\,x}{1+x^2}$. **4.19.** $y = \dfrac{1+e^x}{1+e^{-x}}$. **4.20.** $y = \dfrac{\cos x}{1+2\sin x}$.
4.21. $y = x^2 - \dfrac{1}{2x^2}$, найти $f'(2) - f(-2)$.
4.22. $y = x\ln x$, найти $f'(1)$, $f'(e)$, $f'(1/e)$, $f'(1/e^2)$.
4.23. $y = \sin 4x$. **4.24.** $y = \cos(x^2 - 2x + 1)$. **4.25.** $y = \sin^2 x$.
4.26. $y = \sqrt{2x - \sin x}$. **4.27.** $y = \mathrm{tg}^3\,x$. **4.28.** $y = \ln(x^2 + \sqrt{x})$.
4.29. $y = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{2}$. **4.30.** $y = \ln\ln x$. **4.31.** $y = \arcsin\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}$.
4.32. $y = \mathrm{arctg}^2\,\dfrac{1}{x}$. **4.33.** $y = e^{\sin x}$. **4.34.** $y = \ln^2\sin x$.
4.35. $y = x^x$. **4.36.** $y = x^{\cos x}$.

Составить уравнения касательных к графикам следующих функций.

4.37. $y = x^2$ в точке $M(1,1)$. **4.38.** $y = \ln x$ в точке $M(1,0)$.
4.39. $y = e^{2x}$ в точке пересечения с осью Oy.

4.40. Найти угол наклона к оси Ox касательной к гиперболе $y = 1/x$ в точке $(1,1)$.
4.41. Найти приближенное приращение функции $y = x^2$, если $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}01$.
4.42. С помощью дифференциалов найти приближенные значения: **а)** $\sqrt{101}$, **б)** $\sqrt{1{,}04}$, **в)** $\sqrt{48}$, **г)** $\sqrt[3]{9}$, **д)** $\sqrt[5]{33}$.

Найти производные второго порядка от функций:

4.43. $y = \mathrm{tg}\,x$. **4.44.** $y = \sin^2 x$. **4.45.** $y = e^{-x^2}$.
4.46. $y = x\sin x$. **4.47.** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Найти производные третьего порядка от функций:

4.48. $y = x\,e^{-x}$. **4.49.** $y = e^x \sin x$. **4.50.** $y = x \ln x$.

Найти производные n-го порядка от функций:

4.51. $y = \ln x$. **4.52.** $y = \sin 2x$.
4.53. $y = 3^x$. **4.54.** $y = x^2 \ln x$.
4.55. $y = x \cos x$. **4.56.** $y = x^3 e^x$.

Глава 5
ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ В ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИЙ

5.1. Раскрытие неопределенностей

Правило Лопиталя

Будем говорить, что отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ есть неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Раскрыть эту неопределенность означает вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, если он существует.

ТЕОРЕМА 5.1 (теорема Лопиталя[1]). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a. Кроме того, пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, причем $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности точки a. Тогда если существует предел отношения $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), то*

[1] Гийом Франсуа Антуан де Лопиталь — французский математик (1661–1704).

существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *причем справедлива формула*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Эту теорему обычно называют *правилом Лопиталя.*

Замечание 1. *Правило Лопиталя можно применять повторно, если* $f'(x)$ *и* $g'(x)$ *удовлетворяют тем же требованиям, что и исходные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$.

Замечание 2. *Теорема остается верной и в случае, когда* $x\to\infty$ $(x\to\pm\infty)$.

Теперь рассмотрим примеры.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{4}=\dfrac{1}{4}.$

Здесь мы дважды последовательно применили правило Лопиталя, поскольку два раза имели дело с неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}}{1}=2.$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a\,x^{a-1}-a^x\ln a}{1}=a^a(1-\ln a).$

Неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

Будем называть отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$ неопределенностью вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, $-\infty$ или $+\infty$. В этом случае правило Лопиталя остается справедливым при замене условия $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ на условие $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}1/x=0.$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1/(x-1)}{-\pi\sin^{-2}\pi x}=-\dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2\pi x}{x-1}=$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{\sin 2\pi x}{1} = 0.$$

Другие виды неопределенностей

Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ можно свести к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Покажем это на примерах.

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$.

Решение. Здесь неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразуем функцию под знаком предела: $x\ln x = \frac{\ln x}{1/x}$ и теперь уже имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $x\to 0+$. Теперь, применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+} x = 0.$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x)$.

Решение. Это неопределенность вида $\infty-\infty$. Преобразуя функцию под знаком предела, получаем

$$\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

Теперь это неопределенность вида $\frac{0}{0}$ при $x\to 0$. Правило Лопиталя дает нам

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

Рассмотрим неопределенности вида 0^0, 1^∞, ∞^0, возникающие при вычислении пределов функций $y = u(x)^{v(x)}$. Неопределенности этого вида сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$,

уже рассмотренной выше, с помощью тождественного преобразования

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}. \tag{5.1}$$

Пример 8. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Решение. Это предел вида 0^0; используя формулу (5.1), имеем с учетом решения шестого примера

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^0 = 1.$$

Пример 9. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

Решение. Это предел вида 1^∞. Найдем предел функции $y = \operatorname{ctg} x \ln(1+x)$ при $x \to 0$. В соответствии с представлением (5.1) имеем следующую цепочку равенств:

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)\operatorname{ctg} x =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{1/\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1+x} = 1.$$

Следовательно, искомый предел равен

$$\lim_{x\to 0} e^y = e^1 = e.$$

5.2. Формула Маклорена

Разложение функций по формуле Маклорена

Одним из основных принципов математики является представление сложного через более простое. Формула Маклорена[1] как раз и является реализацией этого принципа. Любые функции, дифференцируемые достаточное число раз в точке $x = 0$,

[1] Колин Маклорен — шотландский математик (1698–1746).

могут быть представлены в виде многочлена некоторой степени. Многочлены же являются наиболее простыми элементарными функциями, над которыми удобно выполнять арифметические действия, вычислять значения в любой точке и т.д.

Итак, функцию $f(x)$, имеющую $(n+1)$ производных в точке $x = 0$, можно представить по формуле Маклорена вместе с остаточным членом:

$$f(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n). \qquad (5.2)$$

Формула (5.2) дает возможность разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена (в окрестности нуля) или, что то же самое, представить $f(x)$ в виде многочлена, коэффициенты которого вычисляются достаточно просто. Эта формула широко используется и для приближенных вычислений значений различных функций; при этом погрешность вычислений оценивается по остаточному члену $o(x^n)$: $o(x^n)/x^n \to 0$ при $x \to 0$.

Рассмотрим примеры разложения функций по формуле Маклорена.

Пример 1. $f(x) = e^x$.

Решение. Поскольку $(e^x)^{(n)} = e^x$, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ для любого n, формула Маклорена (5.2) имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \qquad (5.3)$$

Формула (5.3) используется для вычисления числа e с любой необходимой точностью. Отсюда при $x = 1$ получаем приближенное значение числа $e \approx 2{,}7182818\ldots$.

Пример 2. $f(x) = \sin x$.

Решение. Нетрудно проверить, что $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$; отсюда имеем

$$f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases} 0 & \text{при четном } n, \\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Подстановка в формулу (5.3) приводит к выражению

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}). \qquad (5.4)$$

Пример 3. $f(x) = \cos x$.

Решение. По аналогии с функцией синуса имеем $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, откуда получаем

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при нечетном } n, \\ (-1)^{n/2} & \text{при четном } n. \end{cases}$$

Подстановка в формулу (5.2) приводит к разложению по формуле Маклорена:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}). \qquad (5.5)$$

Пример 4. $f(x) = \ln(1+x)$.

Решение. Так как $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, то $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$; подстановка в формулу (5.2) приводит к разложению функции $\ln(1+x)$ по формуле Маклорена (при этом $0! = 1$):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n). \qquad (5.6)$$

Пример 5. $f(x) = (1+x)^\alpha$, где α — вещественное число.

Решение. Производная n-го порядка имеет вид $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, т.е. $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$, и формула Маклорена для данной функции такова:

$$\begin{gathered}(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).\end{gathered} \qquad (5.7)$$

В частном случае, когда $\alpha = n$ — целое число, имеем $f^{(n+1)} = 0$ и формула (5.7) переходит в формулу *бинома Ньютона*:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n,$$

т.е. бином Ньютона является частным случаем формулы Маклорена.

Формула Маклорена в асимптотических формулах и вычислениях пределов функций

Формулы (5.3)–(5.7) представляют собой *асимптотические* формулы (или оценки) соответственно для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ при $x \to 0$. Аналогичные разложения можно получить с использованием формулы (5.2) и для других функций. Асимптотические формулы эффективно применяются при вычислении пределов функций. Покажем это на примере.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

Решение. Применяя формулу (5.2) при $n = 2$, получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - x^3/3! + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-1/3! + o(x^4)/x^3}{1} = -\frac{1}{6}.$$

5.3. Исследование функций и построение графиков

Признак монотонности функции

Одной из существенных характеристик функции является ее поведение на отдельных интервалах — возрастание или убывание. Это определяется приводимой ниже теоремой, доказательство которой мы опускаем.

ТЕОРЕМА 5.2. *Если функция $f(x)$ дифференцируема и $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на интервале (a, b), то она не убывает (не возрастает) на этом интервале.*

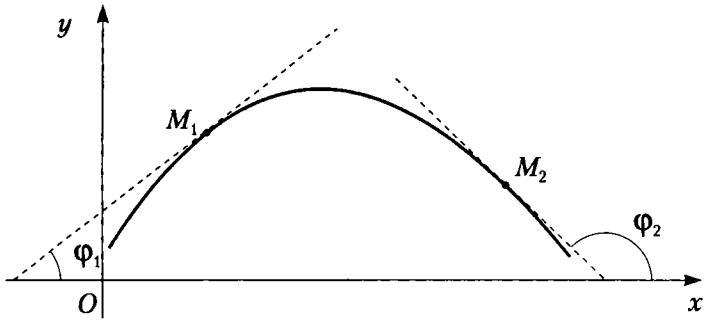


Рис. 5.1

При $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) имеем признак строгой монотонности, т.е. функция возрастает (убывает). Геометрическая интерпретация связи знака производной функции и характера ее изменения очевидна (рис. 5.1): если углы наклона касательных на каком-то интервале являются острыми, то функция на этом интервале возрастает: $\operatorname{tg}\varphi > 0$; при тупом угле наклона касательной функция убывает и $\operatorname{tg}\varphi < 0$.

Точки локального экстремума

Определение 1. Точка x_0 называется точкой *локального максимума (минимума)* функции $f(x)$, если для любого $x \neq x_0$ в некоторой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$).

Локальный минимум и локальный максимум объединены общим названием *локальный экстремум.*

ТЕОРЕМА 5.3 (необходимое условие существования локального экстремума). *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.*

Геометрический смысл теоремы 5.3 указан на рис. 5.2: если в точках локальных экстремумов существуют касательные, то они параллельны оси Ox.

Точки, в которых касательные параллельны оси Ox, а значит, производная равна нулю, называют *точками возможного экстремума, или стационарными точками.* Если x_0 — точка возможного экстремума, т.е. $f'(x_0) = 0$, то она может и не

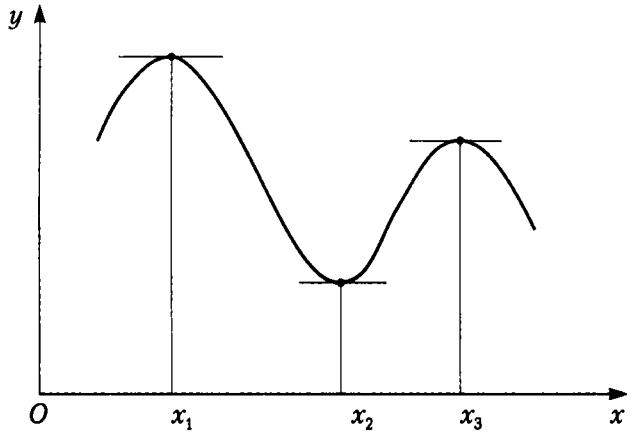


Рис. 5.2

быть точкой локального экстремума. Например, для функции $f(x) = x^3$ (рис. 3.1) производная при $x = 0$ равна нулю, однако в этой точке нет локального экстремума. Таким образом, теорема 5.3 не является достаточным условием существования локального экстремума.

ТЕОРЕМА 5.4 (достаточное условие существования локального экстремума). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Если при переходе через точку x_0 слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум). Если же $f'(x)$ не меняет знака в δ-окрестности точки x_0, то данная функция не имеет локального экстремума в точке x_0.*

Рассмотрим применение указанных теорем на примерах нахождения точек локальных экстремумов функций.

Пример 1. Найти точки локального экстремума и интервалы монотонности функции $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 18x$.

Решение. Сначала находим производную $f'(x) = 3x^2 - 15x + 18$. Приравнивая ее к нулю и решая уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, находим две точки возможного экстремума: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Нетрудно видеть, что $f'(x)$ при переходе через точку $x_1 = 2$ меняет знак с "+" на "−", т.е. в этой точке имеет

место локальный максимум; аналогично устанавливается, что в точке $x_2 = 3$ функция $f(x)$ имеет локальный минимум.

Найдем теперь интервалы монотонности данной функции (рис. 5.3). Поскольку $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, 2)$, то в силу теоремы 5.2 функция монотонно возрастает на этом интервале; $(2, 3)$ является интервалом монотонного убывания $f(x)$ ($f'(x) < 0$), а на интервале $(3, +\infty)$ функция монотонно возрастает ($f'(x) > 0$).

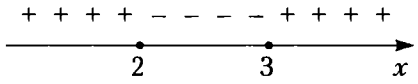


Рис. 5.3

Пример 2. Найти размеры консервной банки, имеющей форму цилиндра (радиус r и высоту h) заданного объема V, при которых полная поверхность сосуда будет минимальной. Эта задача имеет производственный смысл: найти оптимальные размеры банки, при которых затраты материала на ее изготовление будут минимальны.

Решение. Исходя из формулы объема цилиндра $V = \pi r^2 h$, выразим h:

$$h = V/\pi r^2.$$

Как известно, полная поверхность цилиндра дается формулой

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

Подставляя сюда формулу для h, получаем S как функцию от r:

$$S(r) = 2\pi\left(\frac{V}{\pi r} + r^2\right).$$

Минимум этой функции найдем из условия $S'(r) = 0$, откуда получаем уравнение $2r - V/\pi r^2 = 0$. Из этого уравнения находим оптимальное значение r; его подставляем в формулу для h и окончательно вычисляем оптимальные размеры банки:

$$r = \sqrt[3]{V/2\pi}, \quad h = \sqrt[3]{4V/\pi}.$$

Например, при $V = 0{,}33$ л оптимальные размеры банки составят: диаметр дна $\approx 7{,}5$ см и высота $\approx 7{,}5$ см.

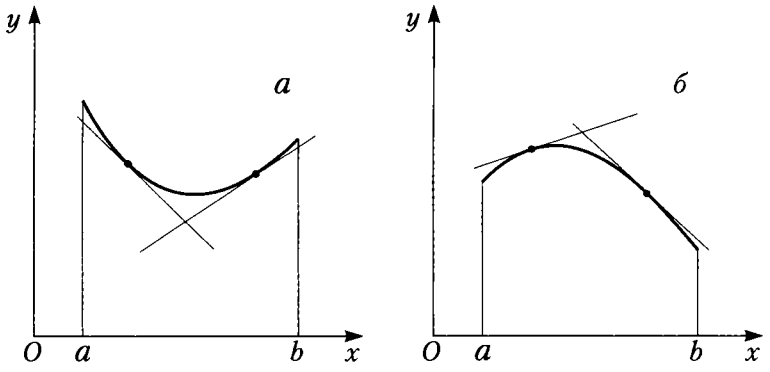


Рис. 5.4

Выпуклость и точки перегиба графика функции

Определение 2. Будем говорить, что график функции $y=f(x)$ имеет на интервале (a,b) *выпуклость, направленную вниз (вверх)*, если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на (a,b) (рис. 5.4).

Способ определения направления выпуклости графика функции дается теоремой, приведенной ниже без доказательства.

ТЕОРЕМА 5.5. *Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале (a,b) вторую производную и $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) на (a,b), то график функции имеет на (a,b) выпуклость, направленную вниз (вверх).*

Определение 3. Точка $M(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба* графика функции $y = f(x)$, если в точке M график имеет касательную и существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой график функции $f(x)$ имеет разные направления выпуклости.

В точке перегиба касательная пересекает график функции, поскольку он переходит с одной стороны касательной на другую, т.е. "перегибается" через нее (рис. 5.5).

ТЕОРЕМА 5.6. (необходимое условие существования точки перегиба). *Пусть график функции $y = f(x)$ имеет*

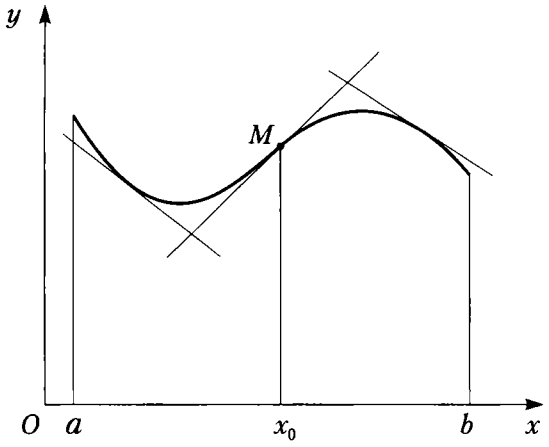


Рис. 5.5

перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$ и функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную. Тогда

$$f''(x_0) = 0. \tag{5.8}$$

Отметим, что не всегда условие $f''(x_0) = 0$ означает наличие точки перегиба на графике функции $y = f(x)$. Например, график функции $y = x^{2n}$ $(n > 1)$ не имеет перегиба в точке $(0, 0)$, хотя при $x = 0$ вторая производная равна нулю. Потому равенство (5.8) является только необходимым условием перегиба. Точки графика, для которых условие (5.8) выполнено, будем называть *критическими*. В каждой такой точке необходимо исследовать дополнительно вопрос о наличии перегиба; здесь имеется полная аналогия с существованием экстремума функции.

ТЕОРЕМА 5.7 (достаточное условие существования точки перегиба). *Пусть в некоторой окрестности точки x_0 вторая производная функции $y = f(x)$ имеет разные знаки слева и справа от x_0. Тогда график $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$.*

Теорема верна и для случая, когда $f''(x)$ существует в некоторой окрестности точки x_0 за исключением самой точки x_0 и

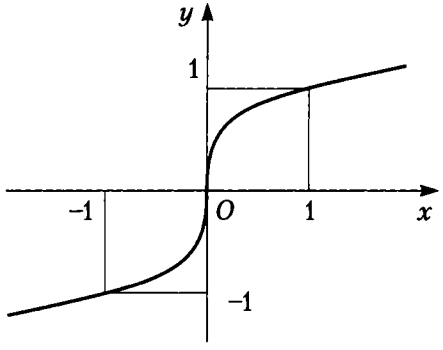


Рис. 5.6

существует касательная к графику функции в точке M. Например, функция $f(x) = x^{1/3}$ в точке x=0 имеет бесконечные производные; в точке $O(0,0)$ касательная совпадает с осью Oy. Однако график этой функции имеет перегиб в начале координат, поскольку вторая производная $f''(x) = -2/(9x^{5/3})$ имеет разные знаки слева и справа от точки $x = 0$ (рис. 5.6). Рассмотрим примеры: найти точки перегиба и направления выпуклости графиков следующих функций.

Пример 3. $f(x) = \exp(-x^2)$.

Решение. Последовательно находим $f'(x)=-2x\exp(-x^2)$, $f''(x) = 2\exp(-x^2)(2x^2 - 1)$. Приравнивая вторую производную к нулю, получаем критические точки $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Ввиду зависимости функции от x^2 достаточно исследовать точку $x = 1/\sqrt{2}$. Нетрудно видеть, что при переходе через эту точку слева направо $f''(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, на левой ветви функции точка $M_1(-1/\sqrt{2}, e^{-1/2})$ является точкой перегиба графика функции со сменой выпуклости вниз слева на выпуклость вверх справа (рис. 5.7). На правой ветви в точке перегиба $M_2(1/\sqrt{2}, e^{-1/2})$ графика функции имеет место смена выпуклости вверх слева на выпуклость вниз справа.

Пример 4. $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$.

Решение. Вторая производная равна $f''(x)=2\dfrac{2x-x^2}{(x^2-2x+2)^2}$.

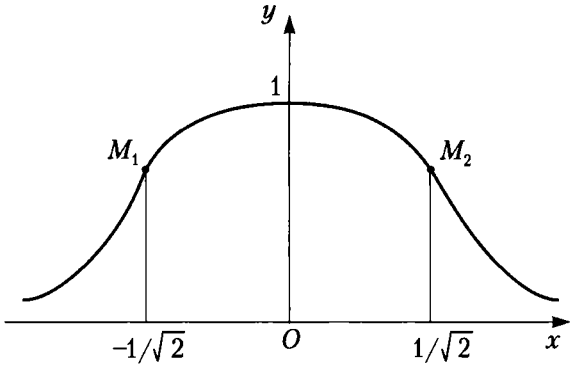


Рис. 5.7

Приравнивая ее к нулю, получаем критические точки $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Несложный анализ квадратного трехчлена $x(2-x)$, стоящего в числителе второй производной и определяющего ее знак, показывает, что точка перегиба $M_1(0, \ln 2)$ графика функции меняет выпуклость вверх слева на выпуклость вниз справа; в другой точке перегиба $M_2(2, \ln 2)$ выпуклость графика функции вниз слева меняется на выпуклость вверх справа.

Асимптоты графика функции

Часто оказывается, что график функции неограниченно приближается к некоторой прямой. Такого рода прямые называются *асимптотами*. Неограниченность приближения графика функции к асимптоте означает, что расстояние от графика до этой прямой (перпендикуляр, опущенный из произвольной точки графика на прямую) стремится к нулю.

Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Определение 4. Прямая $x=a$ называется *вертикальной* асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Вертикальные асимптоты обычно сопутствуют точкам разрыва второго рода. Например, график функции $y = e^{1/x}$ имеет

вертикальную асимптоту $x = 0$, так как $f(x) \to \infty$ при $x \to 0+$.

Определение 5. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{5.9}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Это определение относится как к наклонной, так и к горизонтальной асимптотам: в случае горизонтальной асимптоты угловой коэффициент k в (5.9) равен нулю.

Укажем способ нахождения коэффициентов k и b в уравнении наклонной асимптоты. Разделив обе части равенства (5.9) на x и перейдя к пределу при $x \to \infty$, получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k,$$

т.е. $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Затем из равенства (5.9) находим:

$$\lim_{x\to\infty} [b + \alpha(x)] = b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx].$$

Рассмотрим примеры: найти асимптоты графиков функций.

Пример 5. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x + 1}$.

Решение. Найдем вертикальную асимптоту. Точка $x = -1$ является точкой разрыва 2-го рода, причем

$$\lim_{x\to-1-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-1+} f(x) = -\infty.$$

Затем находим наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 8}{x^2 + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - 8/x^2}{1 + 1/x} = 2;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^2 - 8}{x + 1} - 2x\right] =$$

$$= -\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 8}{x + 1} = -2.$$

Таким образом, получаем уравнение наклонной асимптоты

$$y = 2x - 2.$$

Пример 6. $f(x) = x + e^{-x}$.

Решение. Вертикальных асимптот здесь нет, поскольку точки разрыва 2-го рода отсутствуют. Отыщем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + e^{-x}/x}{1} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left[x + e^{-x} - x\right] = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0.$$

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты имеет вид

$$y = x.$$

Схема исследования графика функции

Приведем схему исследования поведения функции и построения ее графика.

1. Найти область определения функции.

2. Определить возможный тип симметрии функции: четность или нечетность функции. Функция $f(x)$ называется *четной*, если выполнено условие симметрии ее графика относительно оси Oy:

$$f(-x) = f(x). \tag{5.10}$$

Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если выполнено условие симметрии ее графика относительно начала координат $O(0,0)$:

$$f(-x) = -f(x). \tag{5.11}$$

При наличии симметрии достаточно построить график функции на правой координатной полуплоскости и затем отобразить его на левую половину: зеркально относительно оси Oy в случае (5.10) (рис. 5.8, *а*) или с центральной симметрией в случае (5.11) (рис. 5.8, *б*).

3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат Ox и Oy, т.е. решить соответственно уравнения $y = f(0)$ и $f(x) = 0$.

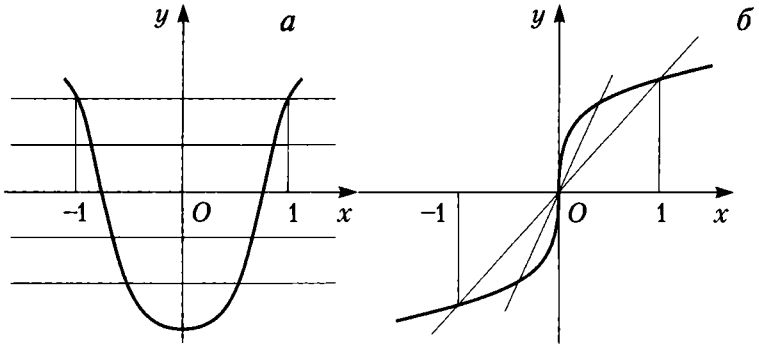


Рис. 5.8

4. Найти асимптоты.

5. Найти точки возможного экстремума.

6. Найти критические точки.

7. Исследовать знаки первой и второй производных, определить участки монотонности функции, направление выпуклости графика, точки экстремума и перегиба.

8. Определить максимум и минимум функции на области ее определения. Если областью определения функции является отрезок $[a, b]$, необходимо вычислить значения функции в его концах и сопоставить их с локальными экстремумами.

9. Построить график функции с учетом проведенного исследования.

Пример 7. Исследовать и построить график функции

$$y = \frac{x^2 - 1}{x}. \tag{5.12}$$

Решение. Действуем по приведенной выше схеме.

1. Область определения функции: $x \neq 0$ или $x \in (-\infty, 0) \cup \cup (0, \infty)$.

2. Функция (5.12) является нечетной, так как $f(-x) = -f(x)$.

3. Уравнение $f(x) = 0$ дает корни $x = \pm 1$ (точки пересечения с осью Ox). Пересечения с осью Oy нет в силу п.1.

4. Имеется вертикальная асимптота — ось Oy, так как предел $f(x)$ при $x \to 0$ бесконечен: $f(x) \to +\infty$ при $x \to 0-$, $f(x) \to -\infty$ при $x \to 0+$.

Определяем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2-1}{x} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} = 0.$$

Итак, уравнение наклонной асимптоты: $y = x$.

5. $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$, т.е. производная нигде не равна нулю и точек возможного экстремума нет. В области определения везде $f'(x)$ положительна.

6. $f''(x) = -2/x^3$ — критических точек нет.

7. Функция (5.12) монотонно возрастает на всей области своего определения, так как ее производная всюду положительна. В левой координатной полуплоскости выпуклость графика функции направлена вниз ($f''(x) > 0$), в правой полуплоскости выпуклость направлена вверх ($f''(x) < 0$).

8. Наибольшего и наименьшего значений функции не существует, поскольку область ее значений неограничена.

9. График функции (5.12) приведен на рис. 5.9.

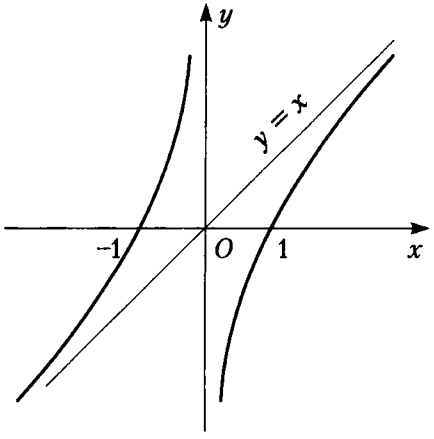


Рис. 5.9

5.4. Применение в экономике

Предельные показатели в микроэкономике

Приведем примеры двух предельных показателей в микроэкономике.

1. Первый из них связан с зависимостью себестоимости C произведенной продукции от ее объема Q: $C = f(Q)$. Так называемая *предельная себестоимость* характеризует себестоимость ΔC прироста продукции ΔQ:

$$MC = \frac{\Delta C}{\Delta Q}. \tag{5.13}$$

В предположении о непрерывной зависимости ΔC от ΔQ естественно напрашивается замена разностного отношения в (5.13) его пределом:

$$MC \approx \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = C'(Q). \tag{5.13a}$$

Обычно в приложениях с использованием аппарата математики под предельной себестоимостью понимают именно величину (5.13а).

Например, пусть зависимость издержек производства от объема выпускаемой продукции выражается формулой

$$C = 40Q - 0{,}03Q^3 \text{ ден. ед.}$$

Определим средние и предельные издержки при объеме продукции $Q = 15$ ден. ед.

А) Функция средних издержек на единицу продукции определяется по формуле $\bar{C} = C/Q$, или в нашем случае

$$\bar{C} = 40 - 0{,}03Q^2,$$

откуда $\bar{C}(15) = 40 - 0{,}03 \cdot 225 = 33{,}25$ ден. ед.

Б) Предельные издержки определяются, согласно (5.13а), по формуле

$$C' = 40 - 0{,}09Q^2,$$

откуда при $Q = 15$ получаем $C'(15) = 19{,}75$ ден. ед.

Иными словами, при средних издержках на производство единицы продукции в 33,25 ден. ед. дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции составят 19,75 ден. ед. и не превысят средних издержек.

2. В анализе и прогнозах ценовой политики применяется понятие *эластичности спроса*. Пусть $D = f(P)$ — функция спроса от цены товара P (см. п. 3.1). Тогда под эластичностью спроса понимается процентное изменение спроса при изменении цены товара на 1%:

$$E = \frac{\Delta D/D\,100\%}{\Delta P/P\,100\%}. \tag{5.14}$$

Как и в предыдущем случае, в случае непрерывной зависимости ΔD от ΔQ удобно перейти к пределу при $\Delta P \to 0$:

$$E(D) = P\frac{D'(P)}{D(P)}. \tag{5.14а}$$

Аналогичное понятие можно ввести и для функции предложения $S(P)$. Напомним, что функция $D(P)$ убывает, а функция $S(P)$ возрастает с ростом цены P.

Укажем некоторые свойства эластичности. Как следует из формулы (5.14а), ее можно выразить так:

$$E(D) = P(\ln D(P))'. \tag{5.14б}$$

Из равенства (5.14б) следует, что $E(D)$ обладает свойствами логарифма, а значит,

$$E(D_1D_2) = E(D_1) + E(D_2),\ E(D_1/D_2) = E(D_1) - E(D_2).$$

Заметим, что поскольку функция $D(P)$ убывающая, то $D'(P) < 0$, а тогда согласно формуле (5.14а) и $E(D) < 0$. Напротив, поскольку функция предложения возрастающая, то соответствующая эластичность $E(S) > 0$.

Различают три вида спроса в зависимости от величины $|E(D)|$:

а) если $|E(D)| > 1$ ($E(D) < -1$), то спрос считается эластичным;

б) если $|E(D)| = 1$ ($E(D) = -1$), то спрос нейтрален;

в) если $|E(D)| < 1$ ($E(D) > -1$), то спрос неэластичный.

Рассмотрим два примера из этой области.

Пример 1. Пусть функция спроса описывается формулой

$$D(P) = D_0 \exp(-kP^2),$$

где D_0 и k — известные величины. Найти, при каких значениях цены P спрос будет эластичным.

Решение. Согласно формуле (5.14а) составляем выражение для $E(D)$:

$$E(D) = \frac{-2kP\,D_0 \exp(-kP^2)}{D_0 \exp(-kP^2)} P = -2kP^2.$$

Для того чтобы спрос был эластичным (случай а), необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$2kP^2 > 1, \text{ откуда } P > 1/\sqrt{2k}.$$

Пример 2. Найти изменение выручки с увеличением цены на товар при разных вариантах эластичности спроса.

Решение. Выручка I равна произведению цены P на товар на величину спроса D:

$$I(P) = D(P)P.$$

Найдем производную этой функции:

$$I'(P) = D(P) + PD'(P). \tag{5.15}$$

Теперь проанализируем все варианты эластичности спроса, приведенные выше, с учетом формулы (5.14а).

1) $E(D) < -1$; тогда, подставляя (5.14а) в это неравенство, получаем, что правая часть уравнения (5.15) отрицательна. Таким образом, при эластичном спросе повышение цены P ведет к снижению выручки. Напротив, снижение цены на товар увеличивает выручку.

2) $E(D) = -1$. Из (5.14а) следует, что правая часть (5.15) равна нулю, т.е. при нейтральном спросе изменение цены на товар не влияет на выручку.

3) $E(D) > -1$. Тогда $I'(P) > 0$, т.е. при неэластичном спросе повышение цены P на товар приводит к росту выручки.

Понятие эластичности распространяется и на другие области экономики. Рассмотрим один характерный пример.

Пример 3. Пусть зависимость между себестоимостью продукции C и объемом Q ее производства выражается формулой

$$C = 50 - 0{,}4Q.$$

Требуется определить эластичность себестоимости при выпуске продукции $Q = 30$ ден. ед.

Решение. По формуле (5.14а) получаем

$$E(C) = -\frac{0{,}4Q}{50 - 0{,}4Q},$$

откуда при $Q = 30$ искомая эластичность составит около $-0{,}32$, т.е. при данном объеме выпуска продукции его увеличение на 1% приведет к снижению себестоимости примерно на 0,32%.

Максимизация прибыли

Пусть Q — количество реализованного товара, $R(Q)$ — функция дохода, $C(Q)$ — функция затрат на производство товара. В реальности вид этих функций зависит в первую очередь от способа производства, организации инфраструктуры и т.п. Прибыль от реализации произведенного товара дается формулой

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q). \tag{5.16}$$

В микроэкономике известно утверждение: для того чтобы прибыль была максимальной, необходимо, чтобы предельный доход и предельные издержки были равны. Оба упомянутых предельных показателя определяются по аналогии с (5.14а), так что этот принцип можно записать в виде

$R'(Q) = C'(Q)$. Действительно, из необходимого условия экстремума для функции (5.16) следует, что $\Pi'(Q) = 0$, откуда и получается основной принцип.

Пример 4. Найти максимум прибыли, если доход и издержки определяются следующими формулами:

$$R(Q) = 100Q - Q^2,$$
$$C(Q) = Q^3 - 37Q^2 + 169Q + 4000.$$

Решение. Согласно (5.16), прибыль $\Pi(Q) = -Q^3 + 36Q^2 - 69Q - 4000$. Приравнивая производную функции прибыли к нулю, получаем уравнение

$$Q^2 - 24Q + 23 = 0.$$

Корни этого уравнения $Q_1 = 1$, $Q_2 = 23$. Проверка показывает, что максимальная прибыль достигается при $Q = 23$: $\Pi_{\max} = 1290$.

Закон убывающей эффективности производства

Этот закон утверждает, что при увеличении одного из основных факторов производства, например капитальных затрат K, прирост производства начиная с некоторого значения K является убывающей функцией. Иными словами, объем произведенной продукции V как функция от K описывается графиком со сменой выпуклости вниз на выпуклость вверх.

Пример 5. Пусть эта функция дается уравнением

$$V(K) = V_{\lim}(1 + e^{-bK+c}), \tag{5.17}$$

где b и c — известные положительные числа (они определяются прежде всего структурой организации производства), а $V_{\lim}$ — предельно возможный объем выпускаемой продукции. Нетрудно подсчитать, что вторая производная функции (5.17) имеет вид

$$V''(K) = V_{\lim} b^2 e^{-bK+c} \frac{e^{-bK+c} - 1}{(1 + e^{-bK+c})^3}.$$

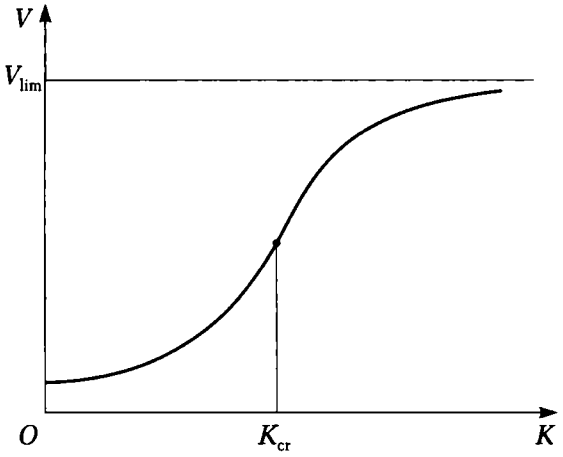


Рис. 5.10

Критическая точка находится из условия $V''(K) = 0$, откуда

$$K_{cr} = c/b. \tag{5.18}$$

График функции (5.17) приведен на рис. 5.10. В точке перегиба (5.18) выпуклость графика функции вниз меняется на выпуклость вверх. До этой точки увеличение капитальных затрат приводит к интенсивному росту объема продукции: темп прироста объема продукции (аналог первой производной) возрастает, т.е. $V''(K) > 0$. При $K > K_{cr}$ темп прироста объема выпускаемой продукции снижается, т.е. $V''(K) < 0$, и эффективность увеличения капитальных затрат падает.

Таким образом, в стратегии капиталовложений оказывается очень важным моментом определение критического объема затрат, сверх которого дополнительные затраты будут приводить все к меньшей отдаче при данной структуре организации производства. Зная этот прогноз, можно пытаться совершенствовать и менять структуру организации производства: "улучшать" показатели b, c и $V_{\lim}$ в сторону повышения эффективности капиталовложений.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти пределы с использованием правила Лопиталя.

5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$. **5.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$. **5.4.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$. **5.6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$. **5.7.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

5.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$. **5.9.** $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}(\pi x/2)}{\ln(1-x)}$. **5.11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{\sin x}$.

5.12. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)=\operatorname{tg} x$ до члена с x^3 включительно.

5.13. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)=e^{-x}$ до члена с x^2 включительно.

Найти пределы с использованием разложений по формуле Мак-
лорена.

5.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. **5.15.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

5.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$. **5.17.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}$.

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графиков функций.

5.18. $y=x^3-6x^2+x$. **5.19.** $y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$.

5.20. $y=2x^2+\ln x$.

Найти асимптоты графиков функций.

5.21. $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$. **5.22.** $y=xe^{-x}$.

5.23. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

Исследовать и построить графики функций.

5.24. $y = x^3 - 6x$. **5.25.** $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$.

5.26. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. **5.27.** $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

5.28. $y = xe^{-x}$. **5.29.** $y = \dfrac{x^2+1}{x}$.

5.30. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. **5.31.** $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

5.32. $y = \dfrac{x^2}{x-2}$. **5.33.** $y = e^{-x^2}$.

Решите задачи на наибольшее и наименьшее значения.

5.34. Разложить число 12 на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

5.35. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом V, при которых на облицовку дна и стен пойдет наименьшее количество материала.

5.36. Даны точки $A(0,3)$ и $B(4,5)$. На оси Ox найти точку, сумма расстояний от которой до точек A и B наименьшая.

Решите задачи с экономическим содержанием.

5.37. Зависимость между издержками производства C и объемом продукции Q выражается функцией $C = 30Q - 0{,}08Q^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции: а) $Q = 5$ ед., б) $Q = 10$ ед.

5.38. Функции долговременного спроса D и предложения S от цены p на мировом рынке нефти имеют соответственно вид

$$D = 30 - 0{,}9p,\ S = 16 + 1{,}2p.$$

1) Найти эластичность спроса в точке равновесной цены. 2) Как изменятся равновесная цена и эластичность спроса при уменьшении предложения нефти на рынке на 25%?

5.39. Функции спроса D и предложения S от цены p выражаются соответственно уравнениями

$$D = 9 - p,\ S = 1 + p.$$

Найти эластичность спроса и предложения при равновесной цене, а также изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на 10%.

5.40. Зависимость объема выпуска продукции V от капитальных затрат K определяется функцией $V = V_0 \ln(4+K^3)$. Найти интервал изменения K, на котором увеличение капитальных затрат неэффективно.

Глава 6
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Понятие первообразной функции

Предыдущие главы были посвящены одной из основных задач дифференциального исчисления — нахождению производной заданной функции. Множество вопросов математического анализа и приложений в разнообразных науках приводит к другой задаче: по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна функции $f(x)$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если для любого $x \in X$ функция $F(x)$ дифференцируема и выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Приведем примеры.

Пример 1. Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$ на бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$, так как при любых x выполнено равенство $(\sin x)' = \cos x$.

Пример 2. Функция $F(x) = \ln x$ — первообразная для функции $f(x) = 1/x$ на промежутке $(0, +\infty)$, так как в каждой точке этого интервала выполнено равенство $(\ln x)' = 1/x$.

Заметим, что задача нахождения по заданной функции $f(x)$ ее первообразной неоднозначна; если $F(x)$ — первообразная, то и функция $F(x) + C$, где C — произвольное постоянное число,

также первообразная для функции $f(x)$, так как $[F(x)+C]' = f(x)$.

Неопределенный интеграл

Определение 2. Совокупность всех первообразных функций для функции $f(x)$ на промежутке X называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

В этом обозначении $\int$ называется *знаком интеграла* (это стилизованная латинская буква S, означающая суммирование), $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, а переменная x — *переменной интегрирования*.

Операция нахождения первообразной по ее производной или неопределенного интеграла по заданной подынтегральной функции называется *интегрированием* этой функции. Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию. Для проверки правильности выполнения интегрирования нужно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Рассмотрим примеры.

Пример 3. $\int 2x\,dx = x^2 + C$; проверка: $(x^2+C)' = 2x$.

Пример 4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$; проверка: $(-\cos x + C)' = \sin x$.

Пример 5. $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$; проверка: $\left(\frac{1}{3}e^{3x} + C\right)' = e^{3x}$.

6.2. Основные свойства неопределенного интеграла

Прежде всего укажем свойства, которые непосредственно вытекают из определения неопределенного интеграла.

1. $d(\int f(x)\,dx) = f(x)\,dx$ и $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Следующие два свойства называются *линейными свойствами* неопределенного интеграла.

3. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$.

4. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)dx$.

Заметим, что последнее свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых в подынтегральной функции.

6.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Ранее мы получили таблицу основных производных элементарных функций. Приводимая ниже таблица *основных неопределенных интегралов* представляет собой вычислительный аппарат интегрального исчисления. Часть формул таблицы непосредственно следует из определения интегрирования как операции, обратной дифференцированию. Справедливость всех формул легко проверить дифференцированием.

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$.

3. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C \quad (-\operatorname{arcctg} x + C)$.

4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,\ -1 < x < 1 \quad (-\arccos x + C)$.

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C\ (0 < a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \; (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \; (x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \; (|x| \neq 1, \; a \neq 0).$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + k}| + C \; (|x| > |k| \text{ при } k < 0).$

Интегралы этой таблицы принято называть *табличными*.

Как было установлено в п. 4.4, операция дифференцирования не выводит нас из класса элементарных функций. С операцией интегрирования дело обстоит иначе: интегралы от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными функциями. Укажем некоторые из них.

1. $\int e^{-x^2} dx$ — интеграл Пуассона (интеграл ошибок).

2. $\int \sin(x^2) dx$ — интеграл Френеля.

3. $\int \cos(x^2) dx$ — интеграл Френеля.

4. $\int \frac{dx}{\ln x}$ — интегральный логарифм.

5. $\int \frac{\sin x}{x} dx$ — интегральный синус.

6. $\int \frac{\cos x}{x} dx$ — интегральный косинус.

Каждый из этих интегралов есть функция, которая не является элементарной, хотя подынтегральные функции в этих интегралах являются элементарными. Они играют большую роль в прикладных науках; так, интеграл 1 является одним из основных в теории вероятностей и статистике.

Как правило, интегралы, с которыми приходится иметь дело в различных приложениях, не выражаются элементарными функциями (или, как принято говорить, являются "неберущимися"). Тем не менее существуют достаточно хорошо разрабо-

танный аппарат приближенных формул с использованием элементарных функций и методы приближенных расчетов, позволяющие с любой степенью точности оценивать и вычислять "неберущиеся" интегралы.

6.4. Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Вычисление интегралов с использованием основных свойств неопределенных интегралов и таблицы простейших интегралов называется *непосредственным интегрированием.* Покажем это на примерах.

Пример 1. $\int (2\sin x + 6 - 3x^2)\,dx = 2\int \sin x\,dx + 6\int dx - 3\int x^2 dx = -2\cos x + 6x - x^3 + C.$

Пример 2. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) dx = 2\int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x\right) dx = 2\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C.$

Метод подстановки

Замена переменной интегрирования является одним из самых эффективных приемов сведения неопределенного интеграла к табличному. Такой прием называется *методом подстановки* или *методом замены переменной.* Он основан на следующей теореме.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T, а X — множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если функция $f(x)$ имеет первообразную на множестве X, то на множестве T справедлива формула*

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (6.1)$$

Выражение (6.1) называется *формулой замены переменной в неопределенном интеграле.* Рассмотрим применение этого приема на примерах вычисления интегралов.

Пример 3. $\int x(x-1)^{12}dx.$

Решение. Здесь разложение по биному Ньютона представляется весьма сложным. Введем новую переменную $t = x-1$. Тогда $x = t+1$, $dx = dt$, и исходный интеграл преобразуется следующим образом:

$$\int x(x-1)^{12}dx = \int (t+1)t^{12}dt = \int (t^{13}+t^{12})dt = \frac{t^{14}}{14} + \frac{t^{13}}{13} + C.$$

Сделав обратную замену переменной, получаем окончательный ответ:

$$\int x(x-1)^{12}dx = (x-1)^{13}\left(\frac{x}{14} + \frac{1}{182}\right) + C.$$

Пример 4. $\int \frac{x^3}{(2-x)^3}dx.$

Решение. Положим $t = 2-x$, тогда $x = 2-t$, $dx = -dt$. Отсюда по формуле (6.1) получаем

$$\int \frac{x^3}{(2-x)^3}dx = -\int \frac{(2-t)^3}{t^3}dt = -\int (8t^{-3} - 12t^{-2} + 6t^{-1} - 1)dt =$$

$$= 4t^{-2} - 12t^{-1} - 6\ln t + t + C =$$

$$= 4(2-x)^{-2} - 12(2-x)^{-1} - 6\ln(2-x) - x + C.$$

Пример 5. $\int \frac{dx}{\cos x}.$

Решение. Преобразуем этот интеграл, переписав его в виде

$$\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx.$$

Из вида подынтегральной функции следует, что целесообразно ввести новую переменную $t = \sin x$. Тогда $1-\sin^2 x = 1-t^2$, $dt = \cos x\, dx$; подстановка в интеграл дает

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Здесь использован табличный интеграл 10.

Пример 6. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8+1}\,dx.$

Решение. Введем новую переменную $t = x^4$ и выполним все необходимые операции: $x^8 + 1 = t^2 + 1$, $dt = 4x^3dx$, откуда имеем

$$\int \frac{x^3}{x^8+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^4 + C.$$

Пример 7. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}\ (n \neq 1).$

Решение. Положим $t = x^2 + 1$, тогда $dt = 2x\,dx$ или $xdx = \dfrac{dt}{2}$, и данный интеграл принимает вид табличного интеграла:

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{2(n-1)}t^{-(n-1)} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+1)^{(n-1)}} + C.$$

Интегрирование по частям

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на промежутке X и функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда функция $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную на промежутке X, причем справедлива формула*

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx. \qquad (6.2)$$

С учетом вида дифференциалов функций $v'(x)\,dx = dv$ и $u'(x)\,dx = du$ равенство (6.2) часто используют в форме

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du. \qquad (6.3)$$

Равенство (6.2) (или (6.3)) называется *формулой интегрирования по частям.*

В интегрировании по частям самым сложным является выбор в подынтегральном выражении сомножителя $v'(x)\,dx = dv$. Под знак дифференциала d можно в принципе внести все что угодно; однако выбор должен быть таким, чтобы интеграл в правой части (6.2) был проще исходного, а не сложнее. В этом смысле метод интегрирования по частям позволяет свести интеграл $\int u\,dv$ к интегралу $\int v\,du$, вычислить который существенно проще. Рассмотрим примеры нахождения интегралов методом интегрирования по частям.

Пример 8. $\int \ln x\,dx$.

Решение. Здесь берем $u(x) = \ln x$, $dv = dx$, т.е. $v = x$. По формуле (6.2) получаем

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x(\ln x)'dx = x\ln x - \int 1\,dx = x(\ln x - 1) + C.$$

В общем случае интегралы вида $\int x^n \ln x\,dx$, где $n \neq -1$ — целое число, берутся только интегрированием по частям: $u = \ln x$, $x^n dx = dv$, т.е. $v = x^{n+1}/(n+1)$. Аналогичным образом берутся и интегралы вида $\int x^n \operatorname{arctg} x\,dx$.

Пример 9. $\int xe^x dx$.

Решение. В этом случае $u = x$, $e^x dx = dv = d(e^x)$, тогда по формуле (6.2) имеем

$$\int xe^x dx = x\,e^x - \int e^x(x)'dx = x\,e^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C.$$

Интегралы вида $\int x^n e^{kx} dx$, где $n > 0$ — целое число и $k \neq 0$ — любое число, берутся n-кратным интегрированием по частям до исчезновения степени x в подынтегральной функции; при этом каждый раз под знак d вносится e^{kx}, т.е. $e^{kx}dx = dv = \frac{1}{k}d(e^{kx})$.

Пример 10. $\int x^2 \cos x\, dx.$

Решение. Интегралы вида $\int x^n \cos kx\, dx$ и $\int x^n \sin kx\, dx$, где k — любое число и $n > 0$ — целое число, вычисляются так же, как и интеграл общего вида, приведенный в примере 1. Под знак d каждый раз вносится тригонометрическая функция, и процедура интегрирования по частям повторяется n раз: $\cos kx\, dx = dv = \frac{1}{k} d(\sin kx)$, затем $\sin kx\, dx = -\frac{1}{k} d(\cos kx)$ и т.д. В данном случае мы имеем

$$\int x^2 \cos x\, dx = \int x^2 d(\sin x) = x^2 \sin x - \int 2x \sin x\, dx =$$

$$= x^2 \sin x + 2 \int x d(\cos x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x\, dx =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

Введем понятие *рациональной* функции от двух переменных. Это функция, полученная из переменных u и v путем проведения над ними арифметических операций. Например, функция

$$R(u, v) = \frac{3u^3 v + u\, v^2}{u - v}$$

является рациональной от переменных u и v. В свою очередь переменные u и v также могут являться функциями. Например,

$$R(x, \sin x) = \frac{x^2 - \sin x}{x \sin x}, \quad R(\sin x, \cos x) = \frac{\cos x - \sin^2 x}{\cos x + \sin^2 x}.$$

Рациональная функция от $\sin x$ *и* $\cos x$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \tag{6.4}$$

где R — рациональная функция. Этот интеграл рационализируется универсальной подстановкой

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi.$$

Действительно,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (6.5)$$

Подстановка формул (6.5) в интеграл (6.4) дает

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — другая рациональная функция аргумента t. Рассмотрим примеры вычисления интегралов, содержащих рациональные функции от $\sin x$ и $\cos x$.

Пример 11. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

Решение. Подставляя сюда формулы (6.5), после очевидных упрощений получаем

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int dt = t + C = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Пример 12. $\displaystyle\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, m и n — натуральные числа.

Решение. Универсальная подстановка приведет здесь к громоздким выкладкам; гораздо удобнее применить метод замены переменной. В зависимости от четности m и n употребимы три следующих варианта.

1) m — четное, n — нечетное; подстановка $t = \sin x$.

2) m — нечетное, n — четное; подстановка $t = \cos x$.

3) m и n — оба нечетные; любая из двух подстановок 1 или 2.

4) m и n — оба четные; понизить степени тригонометрических функций и в полученной сумме проверить каждое слагаемое по пп. 1–3.

Например, найти интеграл $\displaystyle\int \sin^5 x \cos^2 x\,dx$.

Согласно п. 2 выполним подстановку $t = \cos x$; тогда $dt = -\sin x\,dx$, $\sin^4 x = (1-t^2)^2$; отсюда имеем

$$\int \sin^5 x \cos^2 x\,dx = -\int (1-t^2)^2 t^2 dt = -\int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt =$$

$$= \frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{7}t^7 + C = \cos^3 x \left(\frac{2}{5}\cos^2 x - \frac{1}{7}\cos^4 x - \frac{1}{3}\right) + C.$$

Рациональная функция от e^x

Интеграл вида

$$\int R(e^x)\,dx$$

рационализируется подстановкой

$$t = e^x, \text{ откуда } x = \ln t, dx = \frac{dt}{t}. \tag{6.6}$$

Пример 13. Найти интеграл $\int \frac{e^{5x}dx}{e^x+1}$. Применяя подстановку (6.6), получим

$$\int \frac{e^{5x}}{e^x+1}dx = \int \frac{t^5}{(t+1)}\frac{dt}{t} = \int \frac{t^4}{(t+1)}dt =$$

$$= \int (t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1})\,dt =$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1) + C =$$

$$= \frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(e^x+1) + C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить интегралы методом непосредственного интегрирования.

6.1. $\int (x^2 + 2x^3 + x + 1)\,dx$. **6.2.** $\int \left(x^4 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$.

6.3. $\int \left(\frac{3}{1+x^2} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$. **6.4.** $\int (2^x + 3^x + 4e^x)\,dx$.

6.5. $\int (\sqrt{x}+1)(x+\sqrt{x}-1)\,dx$. **6.6.** $\int (\sin x + 3\cos x)dx$.

6.7. $\int \left(x^2\sqrt{x} + x\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\,dx$.

6.8. $\int \frac{x^4+x^2+x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2}dx$.

6.9. $\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$. **6.10.** $\int \frac{2-\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$.

6.11. $\int \frac{1+3x^2}{x^2(1+x^2)}dx$. **6.12.** $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

6.13. $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$. **6.14.** $\int \frac{x^5-x+1}{x^2+1}dx$.

Вычислить интегралы методом подстановки.

6.15. $\int \sin 5x\,dx$. **6.16.** $\int \cos(3x+5)\,dx$. **6.17.** $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$.

6.18. $\int x(2x+1)^9\,dx$. **6.19.** $\int \frac{dx}{2+3x}$. **6.20.** $\int \frac{dx}{(2+x)^4}$.

6.21. $\int \sqrt{2x+5}\,dx$. **6.22.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$. **6.23.** $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

6.24. $\int \frac{\sin x}{1+2\cos x}dx$. **6.25.** $\int \frac{1}{\cos^2 2x}dx$. **6.26.** $\int \sin^2 x\cos x\,dx$.

6.27. $\int \frac{e^{3x}+2e^{2x}+e^x-1}{e^x}dx$. **6.28.** $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$.

6.29. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$. **6.30.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$. **6.31.** $\int \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{1+x^2}dx$.

6.32. $\int \sqrt{2+\cos 5x}\,\sin 5x\,dx$. **6.33.** $\int \frac{2x-1}{x^2-2x+5}dx$.

Вычислить интегралы методом интегрирования по частям.

6.34. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$. **6.35.** $\int x\ln x\,dx$. **6.36.** $\int (2x^2+x)\ln x\,dx$.

6.37. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$. **6.38.** $\int x\,e^{-x}\,dx$. **6.39.** $\int x\,e^{5x}\,dx$.

6.40. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}\,dx$. **6.41.** $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$. **6.42.** $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

6.43. $\int \ln^2 x\,dx$. **6.44.** $\int \ln(x^2+1)\,dx$. **6.45.** $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

Глава 7
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

7.1. Условия существования определенного интеграла

Определение определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Выберем в каждом из частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ произвольную точку ξ_i:

$$x_i \le \xi_i \le x_{i+1}, \quad 0 \le i \le n.$$

Теперь образуем сумму произведений:

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{7.1}$$

которую будем называть *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Геометрический смысл величины σ указан на рис. 7.1: это сумма площадей прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(\xi_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Введем еще одну величину. Обозначим через λ длину максимального частичного отрезка данного разбиения:

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\}.$$

Определение. Конечный предел I интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$, если он существует, называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{7.2}$$

Определенный интеграл обозначается символом

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

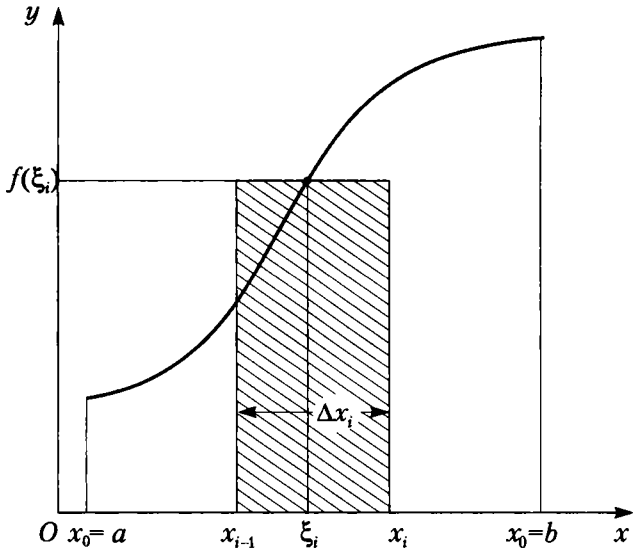


Рис. 7.1

Если определенный интеграл (7.2) существует, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$, числа a и b — соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, x — *переменной интегрирования*.

Величина определенного интеграла, согласно данному выше определению, однозначно определяется видом функции $f(x)$ и числами a и b. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz.$$

Классы интегрируемых функций

Ответ на вопрос о том, какие функции являются интегрируемыми (т.е. существует определенный интеграл (7.2)), дают следующие теоремы, которые мы приводим без доказательства.

ТЕОРЕМА 7.1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем.*

ТЕОРЕМА 7.2. *Если определенная и ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.*

ТЕОРЕМА 7.3. *Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.*

7.2. Основные свойства определенного интеграла

1. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ был определен для случая, когда $a < b$. Обобщим понятие определенного интеграла и на другие случаи.

По определению полагаем

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{7.3}$$

как определенный интеграл на отрезке нулевой длины.

Также по определению полагаем, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx, \tag{7.4}$$

поскольку при движении от b к a все длины частичных отрезков $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$ имеют отрицательный знак в интегральной сумме (7.1).

2. Для любых чисел a, b и c имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{7.5}$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b k\,f(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{7.6}$$

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (7.7)$$

Заметим, что свойство 4 имеет место для любого конечного числа слагаемых.

Будем полагать далее, что $a < b$.

5. Если функция $f(x) \geq 0$ всюду на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

6. Если $f(x) \leq g(x)$ всюду на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

7. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

8. Если M и m — соответственно максимум и минимум функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

7.3. Основная формула интегрального исчисления

ТЕОРЕМА 7.4. *Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную. Одной из первообразных является функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \qquad (7.8)$$

В формуле (7.8) переменная интегрирования обозначена буквой t, чтобы избежать путаницы с верхним переменным пределом x.

Поскольку всякая другая первообразная отличается от $F(x)$ на постоянную величину, то связь между неопределенным и определенным интегралами имеет вид

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Согласно теореме 7.4 непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную, которая определяется формулой

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \tag{7.9}$$

где C — некоторая постоянная. Подставляя в (7.9) $x = a$, с учетом свойства 1 определенного интеграла получаем

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C, \quad 0 = F(a) + C, \quad \text{откуда } C = -F(a).$$

Тогда из (7.9) имеем

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Полагая $x = b$, получаем формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{7.10}$$

Равенство (7.10) называется *основной формулой интегрального исчисления* или *формулой Ньютона–Лейбница*.

Разность $F(b)-F(a)$ условно записывают символом $F(x)\Big|_a^b$, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{7.11}$$

Формула (7.11) дает широкие возможности вычисления определенных интегралов. Нужно вычислить неопределенный интеграл и затем найти разность значений первообразной согласно (7.11). Рассмотрим примеры вычисления определенных интегралов.

Пример 1. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$

Пример 2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) =$

$\displaystyle = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$

Пример 3. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_{-1}^2 = \ln\left(2+\sqrt{5}\right) -$

$\displaystyle - \ln\left(\sqrt{2}-1\right) = \ln\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1}.$

Пример 4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{5x^8+1}{x^4}\,dx = \int_1^2 \left(5x^4+\frac{1}{x^4}\right)dx = \left(x^5 - \frac{1}{3}x^{-3}\right)\Big|_1^2 =$

$\displaystyle = \frac{751}{24}.$

7.4. Основные правила интегрирования

Замена переменной в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 7.5. *Пусть:* 1) $f(x)$ — *непрерывная функция на отрезке* $[a,b]$; 2) *функция* $\varphi(t)$ *дифференцируема на* $[\alpha,\beta]$, *причем* $\varphi'(t)$ *непрерывна на* $[\alpha,\beta]$ *и множеством значений функ-*

ции $\varphi(t)$ является отрезок $[a, b]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \tag{7.12}$$

Формула (7.12) называется *формулой замены переменной* или *подстановки* в определенном интеграле.

Заметим, что при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной нет нужды возвращаться к прежней переменной, как это делалось при вычислении неопределенного интеграла, так как определенный интеграл представляет собой число, которое согласно формуле (7.12) равно значению каждого из рассматриваемых интегралов. Теперь при подстановке следует сначала найти новые пределы интегрирования и затем выполнить необходимые преобразования подынтегральной функции.

Кроме того, при замене переменной в определенном интеграле необходимо соблюдать условия теоремы 7.5, иначе можно получить неверный результат (особое внимание следует уделять выполнению условия 2 теоремы).

Вычислить определенные интегралы методом подстановки.

Пример 1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x\,dx}{1+x^2}$.

Решение. Выполним подстановку $t = 1 + x^2$. Тогда $dt = 2x\,dx$, $t = 1$ при $x = 0$ и $t = 2$ при $x = 1$. Поскольку функция $x = \sqrt{1-t}$ непрерывна на $[1, 2]$, то и новая подынтегральная функция также непрерывна, и, значит, для нее в силу теоремы 7.5 существует первообразная на этом отрезке. Получаем

$$\int_0^1 \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^2 = \ln 2.$$

Пример 2. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

Решение. Применим здесь подстановку $x = a\sin t$. Тогда $dx = a\cos t\,dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$, $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$, $t = 0$ при $x = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$ при $x = a$. Подставляя все это в исходный интеграл, получим

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Пример 3. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} dx.$

Решение. По формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int\limits_0^{\pi} dx = x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Вычислим этот интеграл при помощи замены переменной $t = \operatorname{tg} x$. Тогда $t = 0$ при $x = 0$ и $t = 0$ при $x = \pi$, $x = \operatorname{arctg} t$, т.е. $dx = dt/(1 + t^2)$. Подстановка в исходный интеграл дает

$$\int\limits_0^{\pi} dx = \int\limits_0^{0} \frac{dt}{1 + t^2} = 0.$$

Полученное противоречие объясняется тем, что функция замены переменной $t = \operatorname{tg} x$ имеет разрыв при $x = \pi/2$ и не удовлетворяет условию 2 теоремы 7.5.

Интегрирование по частям в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 7.6. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$; тогда справедлива формула*

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (7.13)$$

Равенство (7.13) называется *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.* Рассмотрим ряд примеров вычисления определенных интегралов методом интегрирования по частям.

Пример 4. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx.$

Решение. Положим здесь $u = x$, $v = e^{-x}$, тогда $dv = -e^{-x}dx$ и

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = -\int_0^1 x\,d\left(e^{-x}\right) = -x\,e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx =$$

$$= -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}.$$

Пример 5. $\int\limits_0^\pi x\sin x dx.$

Решение. Здесь $u = x$, $\sin x dx = dv$ или $v = -\cos x$; далее по формуле (7.13) имеем

$$\int_0^\pi x\sin x dx = -\int_0^\pi x\,d(\cos x) = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx =$$

$$= -\pi(-1) + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

7.5. Геометрические приложения определенного интеграла

Площадь плоской фигуры

Рассмотрим на плоскости Oxy фигуру, ограниченную графиком непрерывной и положительной функции $f(x)$ на отрезке

$[a, b]$, отрезком $[a, b]$ и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 7.2). Эту фигуру будем называть *криволинейной трапецией.*

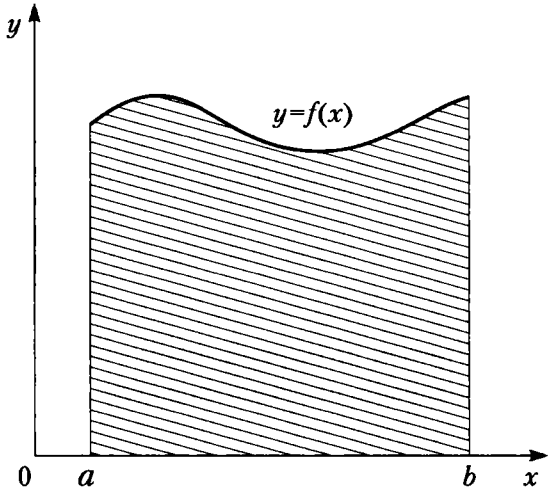


Рис. 7.2

Величина площади криволинейной трапеции равна определенному интегралу от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если фигура ограничена сверху и снизу неотрицательными функциями $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, непрерывными на отрезке $[a, b]$, то площадь S криволинейной фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций, ограниченных сверху графиками $f(x)$ и $g(x)$:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx. \qquad (7.14)$$

Рассмотрим задачи на вычисление площадей фигур.

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \ln x \geq 0$, осью Ox и прямой $x = 2$.

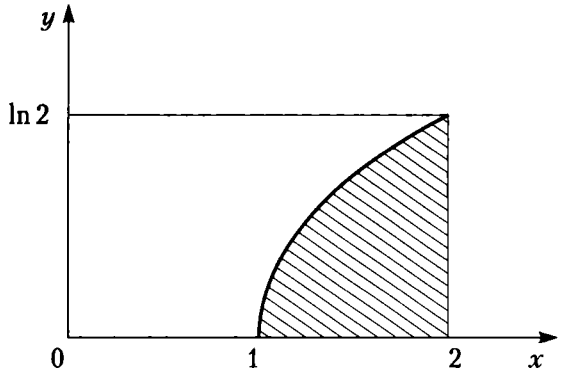


Рис. 7.3

Решение. Отрезок интегрирования: $1 \le x \le 2$ (рис. 7.3), так что искомая площадь согласно формуле (7.14) равна:

$$S = \int_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 1\,dx = 2\ln 2 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.

Решение. Вычислим абсциссы точек пересечения указанных кривых, для чего приравняем правые части этих уравнений: $x^2 = \sqrt{x}$. Корни этого уравнения суть $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Следовательно, площадь фигуры, ограниченной сверху функцией $y = \sqrt{x}$ и снизу функцией $y = x^2$ (рис. 7.4), дается определенным интегралом на отрезке $[0, 1]$:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Объем тела вращения

Рассмотрим тело, которое образуется при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху непрерывной и положительной на отрезке $[a, b]$ функцией $f(x)$ (рис. 7.5). Объем этого тела вращения определяется формулой

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (7.15)$$

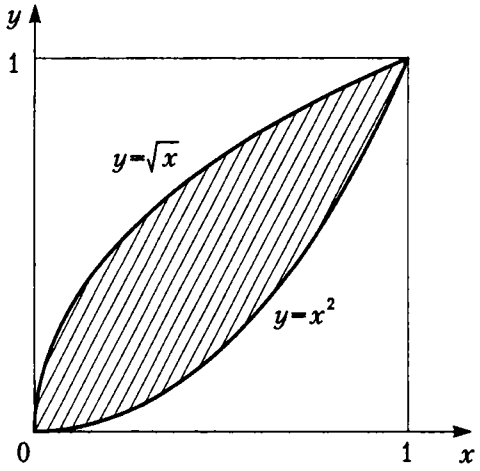


Рис. 7.4

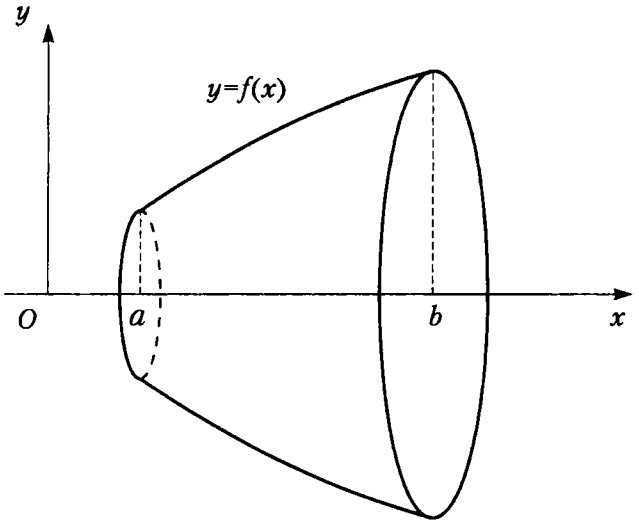


Рис. 7.5

Если тело образовано вращением криволинейной трапеции вокруг оси Oy, то, выражая x через y как обратную функцию, мы можем получить аналогичным образом формулу для объема тела вращения:

$$V = \pi \int_c^d x^2(y)\,dy,$$

где $[c, d]$ — область изменения функции $y = f(x)$.

Рассмотрим примеры вычисления объемов тел, образованных вращением фигур, ограниченных следующими линиями.

Пример 3. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ вокруг оси Ox.

Решение. Искомый объем вращения равен разности объемов, образованных вращением криволинейных трапеций с верхними границами соответственно $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$. Пределы интегрирования определяются по точкам пересечения этих кривых: $a = 0$ и $b = 1$. По формуле (7.15) получаем

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x\,dx - \pi \int_0^1 x^4 dx =$$

$$= \pi \left(\frac{x}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 0{,}3\pi.$$

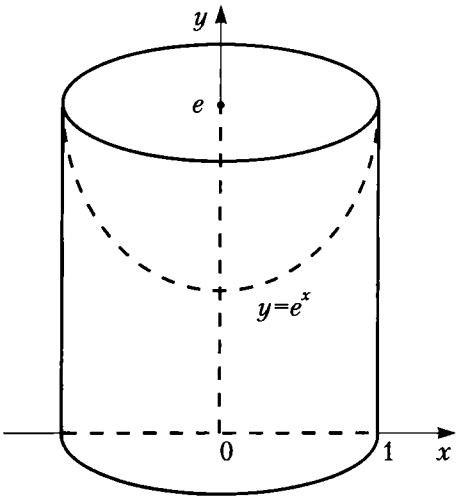


Рис. 7.6

Пример 4. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ вокруг оси Oy.

Решение. Выражаем x через y: $x = \ln y$; промежуток интегрирования $[1, e]$ определяется очевидным образом. Объем тела вращения (рис. 7.6) равен разности объемов соответственно цилиндра радиуса 1 и высоты e и тела вращения вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $x = \ln y$. Согласно формуле (7.15) получаем

$$V = \pi e - \pi \int_1^e \ln^2 y\, dy = \pi e - \pi y \ln^2 y \Big|_1^e + \pi \int_1^e 2 \ln y\, dy =$$

$$= 2\pi y \ln y \Big|_1^e - \pi \int_1^e 2\, dy = 2\pi e - 2\pi e + 2\pi = 2\pi.$$

7.6. Некоторые приложения в экономике

Вообще говоря, в экономических задачах переменные меняются дискретно. Для использования определенного интеграла нужно составить некоторую идеализированную модель, предполагающую непрерывное изменение зависимых переменных (функций) и независимых переменных (аргумента). Рассмотрим соответствующие примеры.

Дневная выработка

Найти дневную выработку P за рабочий день продолжительностью восемь часов, если производительность труда в течение дня меняется по эмпирической формуле

$$p = f(t) = p_0(-0{,}2t^2/t_0^2 + 1{,}6t/t_0 + 3),$$

где t — время в часах, p_0 — размерность производительности (объем продукции в час), t_0 — размерность времени (ч). Эта формула вполне отражает реальный процесс работы (рис. 7.7): производительность сначала растет, достигая максимума в середине рабочего дня при $t = 4$ ч, а затем падает.

Решение. Полагая, что производительность меняется в течение дня непрерывно, т.е. p является непрерывной функци-

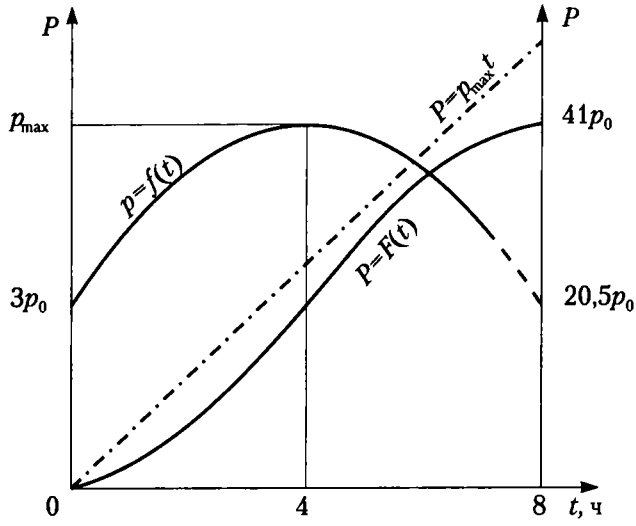


Рис. 7.7

ей аргумента t на отрезке $[0, 8]$, дневную выработку P можно выразить определенным интегралом:

$$P = p_0 \int_0^8 (-0{,}2t^2/t_0^2 + 1{,}6t/t_0 + 3)dt = F(t)\Big|_0^8 =$$

$$= p_0(-0{,}2\frac{t^3}{3}/t_0^2 + 0{,}8t^2/t_0 + 3t)\Big|_0^8 = 41{,}06p_0t_0 = 41{,}06a_0,$$

где a_0 — множитель, имеющий размерность единицы продукции. Если бы в течение всего дня работа велась ритмично и с максимальной производительностью $p_{max} = 6{,}2p_0$, то дневная выработка составила бы $P_{max} = 49{,}6a_0$, или примерно на 21% больше. Рис. 7.7 иллюстрирует решение задачи: дневная выработка численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $f(t)$; вторая кривая показывает рост выпуска продукции во времени (график первообразной $F(t)$ соответствует правой оси ординат P). Значение $T = 4$ ч соответствует точке перегиба кривой $F(t)$: в первой половине рабочего дня интенсивность выработки продукции выше, чем во второй. Штрихпунктирная прямая $P = p_{max}t$ соответствует выпуску продукции с равномерной производительностью p_{max}.

Выпуск оборудования при постоянном темпе роста

Производство оборудования некоторого вида характеризуется темпом роста его выпуска

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{1}{y},$$

где Δy — прирост выпуска этого оборудования за промежуток времени Δt, а y — уровень его производства за единицу времени на момент времени t. Найти общее количество оборудования, произведенного к моменту времени t, полагая, что K — известная постоянная величина, единицей времени является год, а в начальный момент времени $t = 0$ уровень ежегодного производства оборудования составлял y_0.

Решение. Перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$, полагая, что он существует. Будем также полагать, что y является непрерывной функцией от времени t. Согласно определению производной функции

$$K = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{1}{y} = \frac{y'}{y} = (\ln y)'.$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до t, получаем

$$\ln y\Big|_{y_0}^{y} = Kt\Big|_0^t = Kt, \text{ или } \ln\frac{y}{y_0} = Kt,$$

$$\text{откуда } y = y_0 e^{Kt}.$$

Суммарное количество оборудования, выпущенного за промежуток времени t, дается определенным интегралом

$$Y(t) = \int_0^t y(t)\,dt = \int_0^t y_0 e^{Kt} dt =$$

$$= \frac{1}{K} y_0 e^{Kt}\Big|_0^t = \frac{1}{K} y_0 (e^{Kt} - 1).$$

Например, при $K = 0{,}05$ (5% ежегодного темпа роста) общее количество оборудования, выпущенного за 10 лет, составит

$$Y(10) = 20y_0(e^{0,5} - 1) \approx 13y_0,$$

причем уровень производства за указанный период времени увеличится почти на 65%.

7.7. Несобственные интегралы

При рассмотрении определенного интеграла как предела интегральных сумм предполагалось, что подынтегральная функция, во-первых, задана на конечном отрезке и, во-вторых, ограничена. Данное выше определение определенного интеграла не имеет смысла при невыполнении хотя бы одного из этих условий. Нельзя разбить бесконечный интервал на конечное число отрезков конечной длины; при неограниченной функции интегральная сумма не имеет предела. Тем не менее возможно обобщить понятие определенного интеграла и на эти случаи, с чем и связано понятие *несобственного интеграла.*

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, R]$, $R > 0$, так что интеграл

$$\int_a^R f(x)\,dx$$

имеет смысл. Предел этого интеграла при $R \to \infty$ называется *несобственным интегралом с бесконечным пределом интегрирования*:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx. \qquad (7.16)$$

Если этот предел конечен, говорят, что несобственный интеграл (7.16) *сходится*, а функцию $f(x)$ называют *интегрируемой на бесконечном промежутке* $[a, \infty)$; если же предел в (7.16) бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл *расходится.*

Аналогичным образом вводится понятие несобственного интеграла по промежутку $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_{R}^{b} f(x)\,dx. \qquad (7.17)$$

Наконец, несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами можно определить как сумму несобственных интегралов (7.16) и (7.17):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx, \qquad (7.18)$$

где c — любое число.

Геометрический смысл несобственного интеграла первого рода заключается в следующем: это площадь бесконечной области (рис. 7.8), ограниченной сверху неотрицательной функцией $f(x)$, снизу — осью Ox, слева — прямой $x = a$.

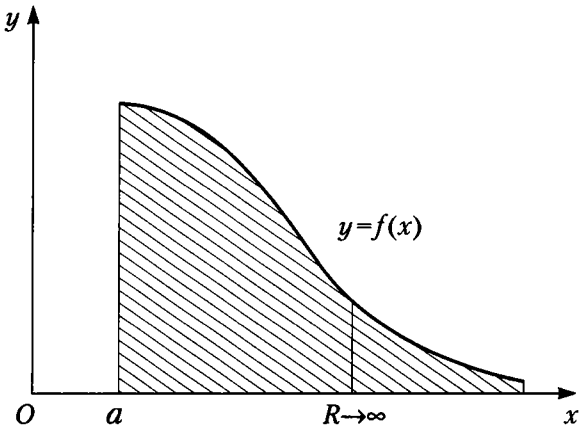


Рис. 7.8

Рассмотрим несколько примеров несобственных интегралов.

Пример 1. $\int\limits_0^\infty \cos x\,dx = \lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_0^\infty \cos x\,dx = \lim\limits_{R\to\infty} \sin x\Big|_0^R =$ $= \lim\limits_{R\to\infty} \sin R$, но предел функции $\sin R$ при $R \to \infty$ не существует, т.е. данный интеграл расходится.

Пример 2. $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx = \lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_0^R e^{-x}\,dx = -\lim\limits_{R\to\infty} e^{-x}\Big|_0^R =$ $= -\lim\limits_{R\to\infty} e^{-R} + 1 = 1$, т.е. данный интеграл сходится.

Пример 3. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} =$

$$= \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{B\to\infty}\int\limits_0^B \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_A^0 +$$

$$+ \lim_{B\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^B = 0 - \lim_{A\to-\infty} \operatorname{arctg} A + \lim_{B\to\infty} \operatorname{arctg} B - 0 =$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Здесь пришлось разделить исходный интеграл на два и к каждому из них применить определение несобственного интеграла.

Пример 4. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$, где α — некоторое положительное число.

Решение. Рассмотрим разные случаи для числа α.

1. При $\alpha = 1$ для любого $R > 0$ имеем

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty}\int\limits_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \ln x\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} \ln R - 0 = +\infty,$$

т.е. конечного предела не существует и несобственный интеграл расходится.

2. При $\alpha \neq 1$ для любого $R > 0$ получаем

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{R\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^R = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{R\to\infty} R^{1-\alpha} - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при} \quad \alpha > 1, \\ \infty & \text{при} \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

Следовательно, данный интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

В приведенных выше примерах сначала с помощью первообразной вычислялся интеграл по конечному промежутку, а затем осуществлялся переход к пределу. Между тем если для функции $f(x)$ существует первообразная $F(x)$ на всем промежутке интегрирования $[a, \infty)$, то по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^R f(x)\,dx = F(R) - F(a) = F(x)\Big|_a^R.$$

Отсюда следует, что несобственный интеграл существует (сходится) в том и только в том случае, когда существует конечный предел

$$\lim_{R\to\infty} F(R) = F(\infty),$$

и тогда можно записать:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^\infty = F(\infty) - F(a). \tag{7.19}$$

Аналогичный вывод справедлив и для несобственных интегралов вида (7.17) и (7.18):

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^b, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}. \tag{7.20}$$

Иными словами, формула Ньютона–Лейбница (основная формула интегрального исчисления) применима и в случае, когда пределы интегрирования бесконечны.

Интегралы от неограниченных функций

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на промежутке $[a, b)$, но неограниченную на нем. Для определенности положим, что $f(x)$ ограничена и интегрируема на любом отрезке $[a,\ b-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < b - a$, но неограничена в любой окрестности точки b или на промежутке $[b-\varepsilon,\ b]$. В таком случае точка b называется *особой точкой.*

Определение. Предел интеграла $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ при $\varepsilon \to 0$ называется *несобственным интегралом второго рода* и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{7.21}$$

Если этот предел конечный, то говорят, что интеграл (7.21) *существует* или *сходится*, а функцию $f(x)$ называют *интегрируемой* на промежутке $[a, b)$; если же предела нет или он бесконечен, то говорят, что интеграл (7.21) *расходится.*

Аналогично, если особой является точка $x = a$, то несобственный интеграл второго рода определяется как

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx. \tag{7.22}$$

Если функция $f(x)$ неограничена в окрестности некоторой внутренней точки $c \in [a, b]$, то по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

где несобственные интегралы второго рода в правой части этого равенства определяются соответственно по формулам (7.21) и (7.22).

Наконец, если a и b — особые точки, т.е. функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на интервале (a, b), то несобственный интеграл второго рода определяется в виде суммы

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

где c — произвольная точка на (a, b), а несобственные интегралы второго рода в правой части этого равенства определяются по формулам (7.21) и (7.22) соответственно.

Все вычислительные формулы для несобственных интегралов второго рода аналогичны формулам для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования: справедлив как предельный переход при $\varepsilon \to 0$, так и непосредственное применение формулы Ньютона–Лейбница.

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить определенные интегралы.

7.1. $\int\limits_0^2 (3x^2 - 1)dx$. **7.2.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. **7.3.** $\int\limits_0^8 \left(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{x}\right) dx$.

7.4. $\int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$. **7.5.** $\int\limits_0^2 x(2-x)^5 dx$. **7.6.** $\int\limits_{2\pi}^{3\pi} x \sin x\, dx$.

7.7. $\int\limits_1^e \ln^2 x\, dx$. **7.8.** $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\, dx$. **7.9.** $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$.

7.10. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\, dx$. **7.11.** $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4x\, dx$. **7.12.** $\int\limits_0^1 xe^x dx$.

Найти площади фигур, ограниченных следующими линиями.

7.13. $y = 4 - x^2$, $y = 0$. **7.14.** $y = x^2$, $y = 1$.
7.15. $y = \ln x$, $y = e$, $y = 0$. **7.16.** $y = \sqrt{x}$, $y = x$.
7.17. $y = 1/x$, $x = 1$, $x = 3$. **7.18.** $y = \operatorname{tg} x$, $x = 0$, $x = \pi/3$.
7.19. $y = x^3$, $x = 0$, $x = 2$. **7.20.** $y = \sin x$, $y = x^2 - \pi x$.

Найти объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной следующими линиями.

7.21. $y = 1 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$. **7.22.** $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

7.23. $y = 4x - x^2$, $y = x$. **7.24.** $y = \sqrt{x}$, $y = x$.
7.25. $y = x^2$, $y = 1$, $x = 0$. **7.26.** $y = x^3$, $y = x^2$.

Вычислить несобственные интегралы в случае их сходимости.

7.27. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$. **7.28.** $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx$. **7.29.** $\int\limits_0^\infty \ln x\, dx$.

7.30. $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$. **7.31.** $\int\limits_0^\infty x\, e^{-x}dx$.

7.32. Найти площадь, заключенную между кривой $y = xe^{-x^2/2}$ и ее асимптотой при $x \geq 0$.
7.33. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = e^{-x}$ от $x = 0$ до $x = +\infty$.

Решить задачи с экономическим содержанием.

7.34. Найти стоимость перевозки M т груза по железной дороге на расстояние l км при условии, что тариф y перевозки одной тонны убывает на a р. на каждом последующем километре.
7.35. Мощность y потребляемой городом электроэнергии выражается формулой

$$y = \begin{cases} a, & t < 6; \\ a + b\sin\frac{\pi}{18}(t-6), & t \geq 6, \end{cases}$$

где t — текущее время суток. Найти суточное потребление электроэнергии при $a = 15\,000$ кВт, $b = 12\,000$ кВт.

Глава 8
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1. Евклидово пространство E^m

Евклидова плоскость и евклидово пространство

Как мы знаем, множество всех упорядоченных пар вещественных чисел (x, y) называется координатной плоскостью и

каждая точка на ней характеризуется парой своих координат: $M(x, y)$.

Определение 1. Координатная плоскость называется *евклидовой плоскостью*, если расстояние между двумя любыми точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определено по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Аналогично вводится и понятие евклидова пространства. В этом случае каждая точка координатного пространства характеризуется тройкой чисел и тогда расстояние между двумя любыми точками пространства $M(x_1, y_1, z_1)$ и $M(x_2, y_2, z_2)$ определяется формулой

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Стало быть, евклидова плоскость и евклидово пространство определяются способом измерения расстояния между двумя любыми своими точками.

Понятия m-мерного координатного пространства и m-мерного евклидова пространства

Определение 2. Множество всевозможных упорядоченных совокупностей m действительных чисел (x_1, x_2, x_3, ..., x_m) называется *m-мерным координатным пространством* A^m.

Каждую упорядоченную совокупность (x_1,x_2,x_3,...,x_m) называют *точкой* этого пространства и обозначают одной буквой M. При этом числа x_1, x_2, x_3, ..., x_m называются *координатами* точки M, что символически записывается следующим образом: $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Определение 3. Координатное пространство A^m называется *m-мерным евклидовым пространством* E^m, если между двумя любыми точками $M'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$ и $M''(x''_1, x''_2, \ldots, x''_m)$ пространства A^m определено расстояние $\rho(M', M'')$ по формуле

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2 + \ldots + (x'_m - x''_m)^2}. \qquad (8.1)$$

Очевидно, что введенные понятия m-мерного координатного пространства A^m и m-мерного евклидова пространства E^m являются обобщениями понятий соответственно координатных плоскости и пространства и евклидовых плоскости и пространства.

8.2. Множества точек евклидова пространства E^m

Примеры множеств евклидова пространства E^m

Будем обозначать символом $\{M\}$ некоторое множество точек m-мерного пространства E^m. Рассмотрим некоторые примеры множеств в этом пространстве.

1. Множество $\{M\}$ всевозможных точек, координаты x_1, x_2,..., x_m которых удовлетворяют неравенству

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_m - x_m^0)^2 \leq R^2, \qquad (8.2)$$

называется *m-мерным шаром* радиуса R с центром в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$.

Этот пример является m-мерным обобщением соответственно круга на евклидовой плоскости и шара в трехмерном евклидовом пространстве, которые задаются следующими неравенствами:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2,$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2.$$

Неравенство (8.2) можно переписать с учетом (8.1) в виде

$$\rho(M, M_0) \leq R. \qquad (8.3)$$

В случае строгого неравенства $\rho(M, M_0) < R$ множество $\{M\}$ называется *открытым m-мерным шаром.* Часто это множество также называют *R-окрестностью* точки M_0. В случае (8.3) если неравенство не строгое, множество $\{M\}$ называется *замкнутым m-мерным шаром.* Эти понятия переносятся на случай любой размерности при $m \geq 2$.

2. Множество $\{M\}$ точек, таких, что расстояние от каждой из них до некоторой точки M_0 удовлетворяет равенству

$\rho(M, M_0) = R$, называется *m-мерной сферой* радиуса R с центром в точке M_0.

Аналогия: для плоскости — окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$, для пространства — сфера $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Понятие функции нескольких переменных

Введем понятие функции нескольких переменных.

Определение 1. Пусть каждой точке M из множества точек $\{M\}$ евклидова пространства E^m по какому-либо закону ставится в соответствие некоторое число u из числового множества U. Тогда будем говорить, что на множестве $\{M\}$ задана функция $u = f(M)$. При этом множества $\{M\}$ и U называются соответственно областью определения (задания) и областью изменения функции $f(M)$.

Как известно, функция одной переменной $y = f(x)$ изображается на плоскости в виде линии. В случае двух переменных область определения $\{M_n\}$ функции $z = f(x, y)$ представляет собой некоторое множество точек на координатной плоскости Oxy (рис. 8.1). Координата z называется *аппликатой*, и тогда сама функция изображается в виде некоторой поверхности в пространстве E^3. Аналогичным образом функция от m переменных

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_m),$$

определенная на множестве $\{M\}$ евклидова пространства E^m, представляет собой гиперповерхность в евклидовом пространстве E^{m+1}.

Некоторые виды функций нескольких переменных

Рассмотрим примеры функций нескольких переменных и найдем их области определения.

Пример 1. $z = x^2 + y^2$.

Решение. Это поверхность в евклидовом пространстве E^3. Областью определения этой функции является все множество точек плоскости Oxy. Область значений этой функции —

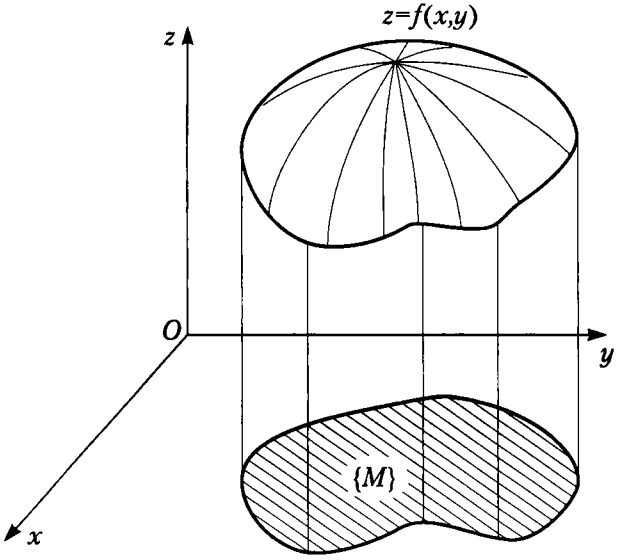


Рис. 8.1

промежуток $[0, \infty)$. Данная функция представляет собой параболоид вращения (рис. 8.2): в вертикальных сечениях этой поверхности плоскостями Oxz и Oyz получаются соответственно параболы $z = x^2$ и $z = y^2$.

Пример 2. $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

Решение. Это поверхность в евклидовом пространстве E^3. Область определения данной функции — все множество точек евклидова пространства E^2 или плоскости Oxy. Эта функция является так называемым эллиптическим конусом с вершиной в начале координат $O(0, 0, 0)$; приведенная формула суммирует две функции, задающие две его симметричные относительно плоскости Oxy части (рис. 8.3):

$$z = \pm\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

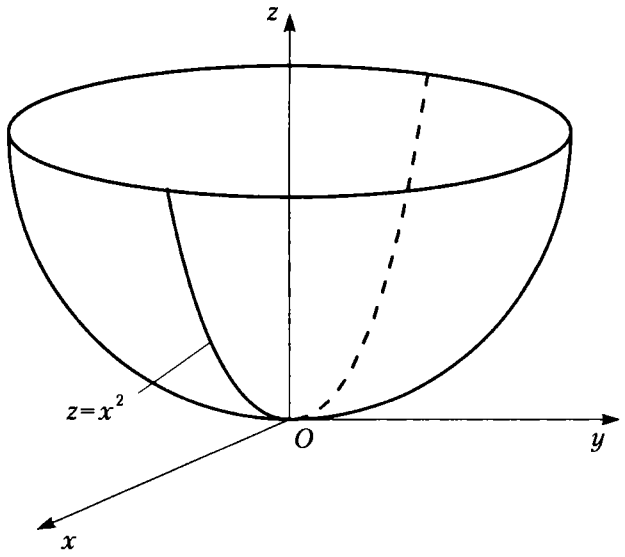


Рис. 8.2

Приведем теперь наиболее часто встречающиеся в различных приложениях виды функций нескольких переменных.

1. Уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{8.4}$$

называется *общим уравнением плоскости* в системе координат $Oxyz$. Вектор $\vec{N} = (A, B, C)$ перпендикулярен плоскости (8.4); он называется *нормальным вектором* этой плоскости. Если известно, что плоскость проходит через некоторую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то она может быть задана уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{8.5}$$

Например, составим уравнение плоскости с перпендикулярным вектором $\vec{N} = (1, 2, -1)$, проходящей через точку $M_0(2, 1, 1)$. Согласно формуле (8.5) имеем

$$1(x - 2) + 2(y - 1) - 1(z - 1) = 0, \text{ или } x + 2y - z - 3 = 0.$$

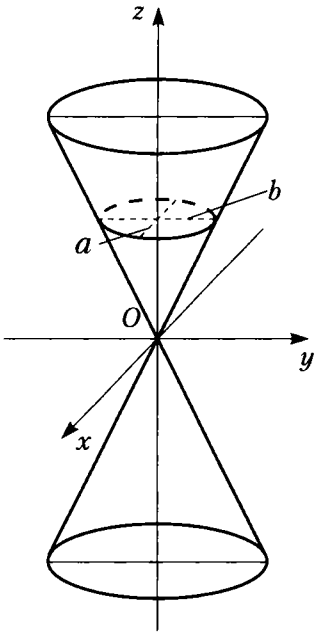


Рис. 8.3

2. *Функция Кобба-Дугласа* — производственная функция, показывающая объем выпуска продукции Q при затратах капитала K и трудовых ресурсов L. Для случая двух переменных она имеет вид

$$Q = A\,K^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

где $A > 0$ — параметр производительности конкретно взятой технологии, $0 < \alpha < 1$ — доля капитала в доходе.

Линии уровня

Понятие линии уровня широко используется прежде всего в геодезии, картографии, при составлении синоптических карт, а также при описании различных физических полей (температура, давление и пр.).

Определение 2. *Линией уровня* функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется плоская кривая, получаемая при пересечении графика этой функции плоскостью $z = C$, где C —

постоянная величина, параллельной координатной плоскости Oxy.

Обычно линии уровня, соответствующие различным значениям постоянной величины C, проецируются на одну плоскость, например на координатную плоскость Oxy; тогда их удобно анализировать и с их помощью исследовать сложный характер поверхности, описываемой функцией $z = f(x, y)$.

Таким образом, можно сказать, что линии уровня функции $z = f(x, y)$ — это семейство кривых на координатной плоскости Oxy, описываемое уравнениями вида

$$f(x, y) = C. \tag{8.6}$$

Обычно берут арифметическую прогрессию чисел C_i с постоянной разностью h; тогда по взаимному расположению линий уровня можно получить представление о форме поверхности, описываемой функцией $z = f(x, y)$. Там, где функция изменяется быстрее, линии уровня сгущаются, а там, где поверхность пологая, линии уровня располагаются реже (рис. 8.4).

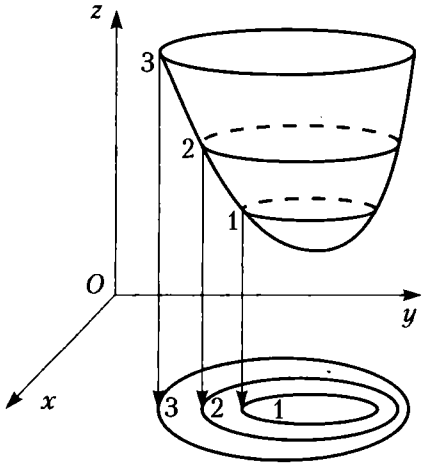


Рис. 8.4

Пример 3. Найти линии уровня функции $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y$.

Решение. Линии уровня данной функции — это семейство кривых на плоскости Oxy, описываемое уравнением

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = C, \text{ или } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 + C.$$

Последнее уравнение описывает семейство окружностей с центром в точке $O_1(1,1)$ радиуса $r = \sqrt{2+C}$. Поверхность вращения (параболоид), описываемая данной функцией, становится "круче" по мере ее удаления от оси, которая дается уравнениями $x = 1$, $y = 1$.

8.3. Частные производные функции нескольких переменных

Частные производные первого порядка

Пусть функция двух переменных $z = f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x,y)$ евклидова пространства E^2. *Частная производная* функции $z = f(x,y)$ по аргументу x является обыкновенной производной функции одной переменной x при фиксированном значении переменной y и обозначается как

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z'_x, \quad f'_x.$$

Аналогичным образом определяется частная производная функции $f(x,y)$ по переменной y в точке M, обозначаемая как

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z'_y, \quad f'_y.$$

Функция, имеющая частные производные, называется *дифференцируемой*.

Совершенно аналогично определяются частные производные функций трех и более переменных. Частная производная функции нескольких переменных характеризует скорость ее изменения по данной координате при фиксированных значениях других координат.

Найти частные производные следующих функций.

Пример 1. $z = x^2 - 2xy + 2y^2$.

Решение. Дифференцируем функцию $z = f(x, y)$ сначала по x, полагая y фиксированной величиной, потом повторяем эту же процедуру, меняя роли x и y. Получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 2x.$$

Пример 2. $z = \operatorname{arctg} xy$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{1 + (xy)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{1 + (xy)^2}$.

Пример 3. $u = ye^{yz} + \ln(x^2 - 2y + z)$.

Решение. Частные производные этой функции трех переменных выражаются следующими формулами:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - 2y + z}, \frac{\partial u}{\partial y} = (1 + yz)e^{yz} - \frac{2}{x^2 - 2y + z},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = y^2 e^{yz} + \frac{1}{x^2 - 2y + z}.$$

Пример 4. Найти предельные показатели продукции Q при изменении одного из факторов: затрат капитала K или величины трудовых ресурсов L — по функции Кобба–Дугласа

$$Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}.$$

Решение. Частные производные этой функции

$$Q'_K = A\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}, \quad Q'_L = A(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}$$

дают решение сформулированной выше задачи. Очевидно, что в функции Кобба—Дугласа показатели степеней α и $1-\alpha$ представляют собой соответственно коэффициенты эластичности $E_K(Q)$ и $E_L(Q)$ по каждому из входящих в нее аргументов.

Градиент

Рассмотрим функцию трех переменных $u = f(x, y, z)$, дифференцируемую в некоторой точке $M(x, y, z)$.

Определение 1. *Градиентом* функции $u = f(x, y, z)$ называется вектор, координаты которого равны соответственно частным производным $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ в точке M.

Для обозначения градиента функции используется символ

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}. \tag{8.7}$$

Аналогично в случае функции двух переменных $u = f(x, y)$ имеем

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right\}. \tag{8.8}$$

Градиент функции характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания этой функции в точке.

Для определения геометрического смысла градиента функции введем понятие поверхности уровня. Это понятие аналогично понятию линии уровня, рассмотренному в п. 8.2.

Определение 2. *Поверхностью уровня* функции $u = f(x, y, z)$ называется поверхность, на которой эта функция сохраняет постоянное значение

$$f(x, y, z) = c = \text{const}. \tag{8.9}$$

В курсе математического анализа доказывается, что градиент в данной точке ортогонален к этой поверхности.

В случае функции двух переменных все сказанное выше остается в силе, только вместо поверхности уровня будет фигурировать линия уровня. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 5. Найти градиент и его модуль функции $z = \frac{xy}{x+y+1}$ в точке $M(0, 1)$.

Решение. По формуле (8.8) имеем для функции двух переменных

$$\operatorname{grad} z = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right\} = \left\{ \frac{y(y+1)}{(x+y+1)^2}, \frac{x(x+1)}{(x+y+1)^2} \right\}.$$

При $x = 0$ и $y = 1$ получаем

$$\operatorname{grad} z\Big|_{(0,1)} = \{1/2, 0\}, \quad |\operatorname{grad} z| = 1/2.$$

Пример 6. Найти градиент и его модуль функции $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точке $M(1, 1, -2)$.

Решение. По формуле (8.7) имеем

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = \{2x, 2y, -2z\}.$$

Подставляя в это выражение координаты точки M, получаем

$$\operatorname{grad} u\Big|_{(1,1,-2)} = \{2, 2, -4\}, \quad |\operatorname{grad} u| = \sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6}.$$

Пример 7. Найти поверхности уровня функции $u = x^2 - 2x + y^2 + 2y - z$.

Решение. Согласно определению поверхности уровня (8.9) имеем

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y - z = c, \text{ откуда } z = (x-1)^2 + (y+1)^2 - C,$$

где $C = c + 2$. Следовательно, поверхностями уровня данной функции являются параболоиды вращения с осью $x=1$, $y=-1$, параллельной оси Oz, вершины которых лежат в точках с координатами $(1, -1, -C)$.

Частные производные высших порядков

Частные производные первого порядка от функции двух и более переменных также представляют собой функции нескольких переменных, и их можно также продифференцировать, т.е. найти частные производные от этих функций. Так, для функции двух переменных вида $z = f(x, y)$ возможны четыре вида частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}).$$

Частные производные, в которых дифференцирование производится по разным переменным, называются *смешанными производными.* Аналогичным образом для функций нескольких переменных определяются частные производные более высоких порядков.

Рассмотрим два примера нахождения частных производных второго порядка для функции двух переменных.

Пример 8. $z = x^3 - xy^2 + x + y + y^4$.

Решение. Последовательно дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - y^2 + 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2xy + 1 + 4y^3,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 2x.$$

Пример 9. $z = e^x \cos 2y$.

Решение. По правилам дифференцирования произведения имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos 2y, \frac{\partial z}{\partial y} = -2e^x \sin 2y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \cos 2y, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2e^x \sin 2y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2e^x \sin 2y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4e^x \cos 2y.$$

В рассмотренных примерах смешанные производные оказались равными друг другу, хотя это бывает и не всегда. Ответ на вопрос о независимости смешанных вторых производных от порядка дифференцирования функции двух переменных дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8.1. *Если функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее смешанные производные в этой точке равны.*

8.4. Локальный экстремум функции нескольких переменных

Определение и необходимые условия существования локального экстремума

Пусть функция $z=f(x, y)$ определена на множестве $\{M\}$, а $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая точка этого множества.

Определение. Функция $z = f(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки M_0, принадлежащая $\{M\}$, что для любой точки $M(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(M) \leq f(M_0)$ $(f(M) \geq f(M_0))$; для случая функции трех и более переменных локальный экстремум определяется аналогично.

Согласно данному определению локального экстремума (минимума или максимума) полное приращение функции $z = f(M) - f(M_0)$ удовлетворяет одному из условий в окрестности точки M_0:

$$\Delta z \leq 0, \text{ если } M_0 \text{ — точка локального максимума;}$$

$$\Delta z \geq 0, \text{ если } M_0 \text{ — точка локального минимума.}$$

Теперь установим необходимые условия существования локального экстремума.

ТЕОРЕМА 8.2. *Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ локальный экстремум и частные производные первого порядка, то все эти частные производные равны нулю:*

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0. \tag{8.10}$$

Для случая функции двух и более переменных необходимое условие существования локального экстремума имеет вид, аналогичный (8.10): все частные производные первого порядка должны обращаться в нуль в точке M_0.

Следует особо отметить, что условия (8.10) не являются достаточными условиями экстремума. Например, для функции $z = x^2 - y^2$ частные производные равны нулю в точке $O(0,0)$, однако в этой точке функция (которая является уравнением гиперболического параболоида) не имеет экстремума: $f(0,0)=0$, но в любой окрестности точки O есть значения функции как положительные, так и отрицательные.

Точки, в которых выполняются условия (8.10), называются точками возможного экстремума или *стационарными точками.*

Рассмотрим задачи на отыскание возможного экстремума функций.

Пример 1. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$.

Решение. Согласно условиям (8.10) имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, откуда получаем систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 2x + y &= 4, \\ 2y + x &= 5. \end{cases}$$

Решение этой системы $x = 1$, $y = 2$, т.е. точка с координатами $(1,2)$ является стационарной для данной функции двух переменных.

Пример 2. $u = x^2 + 2x + y^2 + 2xy + z^2 + zy$.

Решение. По условию (8.10) все три первые частные производные функции равны в этой точке нулю, откуда получаем систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x + y &= -1, \\ 2x + 2y + z &= 0, \\ y + 2z &= 0. \end{cases}$$

Решение этой системы дает единственную стационарную точку возможного экстремума: $(3, -4, 2)$.

Достаточные условия существования локального экстремума

Рассмотрим случай функции двух переменных $z = f(x, y)$, часто используемый на практике. Обозначим вторые частные производные этой функции $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в некоторой точке M_0 через a_{11}, a_{12}, a_{22} соответственно. Тогда достаточное условие локального экстремума формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 8.3. *Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ возможного экстремума функции $u = f(x, y)$ и в некоторой ее окрестности все вторые частные производные этой функции непрерывны. Тогда если*

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0,$$

то функция $u = f(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум: минимум при $a_{11} > 0$ и максимум при $a_{11} < 0$. Если же $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \leq 0$, то данная функция не имеет локального экстремума в точке M_0.

Пример 3. Найти точки локального экстремума и значения в них функции $z = x^3 - y^3 - 3xy$.

Решение. Сначала находим стационарную точку из условий $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. Получаем систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} x^2 - y &= 0, \\ x + y^2 &= 0, \end{cases}$$

решения которой дают координаты двух точек $(0, 0)$ и $(-1, 1)$. Найдем вторые производные:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6y,$$

откуда получаем $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -36xy - 9$. В точке $(0, 0)$ имеем $\Delta < 0$, и, значит, в ней нет локального экстре-

мума. В точке $(-1,1)$ получаем $\Delta = 27 > 0$, т.е. в этой точке данная функция имеет локальный экстремум; поскольку $a_{11} < 0$, то это точка максимума. Значение функции в ней: $u_{\max} = f(-1,1) = 1$.

8.5. Применение в задачах экономики

Экстремум функции нескольких переменных

Рассмотрим типичную задачу нахождения экстремума функции нескольких переменных, возникающую в экономике.

Прибыль от производства разных видов товара

Пусть x_1, x_2, ..., x_m — количества производимых m разновидностей товара, а их цены — соответственно P_1, P_2, ..., P_m (все P_i — постоянные величины). Пусть затраты на производство этих товаров задаются функцией издержек

$$C = S(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Тогда функция прибыли имеет вид

$$\Pi = P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_mx_m - S(x_1, x_2, \ldots, x_m). \qquad (8.11)$$

Максимум прибыли естественно искать как условие локального экстремума функции многих переменных (8.11) при $x_i \geq 0$ (при отсутствии других ограничений)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Это условие приводит к системе алгебраических уравнений относительно переменных x_i

$$P_i - \frac{\partial S}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (8.12)$$

Система уравнений (8.12) реализует известное правило экономики: предельная стоимость (цена) товара равна предельным издержкам на производство этого товара. Решениями этой системы уравнений являются наборы, состоящие из m значений

каждый. Нужно заметить, что сам процесс нахождения решения системы уравнений (8.12) зависит от вида функции издержек и может быть достаточно сложным.

Приведем конкретный пример. Пусть производятся два вида товаров, обозначим их количества через x и y. Пусть P_1=8 и P_2=10 — цены на эти товары соответственно, а $C = x^2 + xy + y^2$ — функция затрат. Тогда согласно (8.11) при $x_1 = x$, $x_2 = y$ прибыль является функцией двух переменных:

$$\Pi(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Условия локального экстремума приводят к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x + y &= 8 \\ x + 2y &= 10, \end{cases}$$

решением которой является точка $(2, 4)$. Поскольку

$$a_{11} = -2 < 0, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 > 0,$$

то найденная точка определяет локальный максимум функции прибыли, который равен $\Pi_{\max} = 28$.

Оптимальное распределение ресурсов

Рассмотрим типичную задачу оптимального распределения ресурсов на примере функции выпуска $u = a_0xy^2$ при допущении, что функция затрат на ресурсы x и y линейна, т.е. имеет вид $u = P_1x + P_2y$, где P_1 и P_2 — соответствующие цены на эти факторы.

В точке $F(x_0, y_0)$, определяющей оптимальное определение ресурсов, линии уровня функций выпуска и затрат касаются (рис. 8.5). Эти линии определяются соответственно уравнениями a_0xy^2=C, P_1x+P_2y=A, или y=$(b/x)^{1/2}$, y=$-(P_1/P_2)x$+A/P_2, где $C > 0$ и $A > 0$ — постоянные числа, $b = C/a_0$. Условие касания этих линий дается уравнением

$$[(b/x)^{1/2}]'\Big|_{x_0} = -P_1/P_2.$$

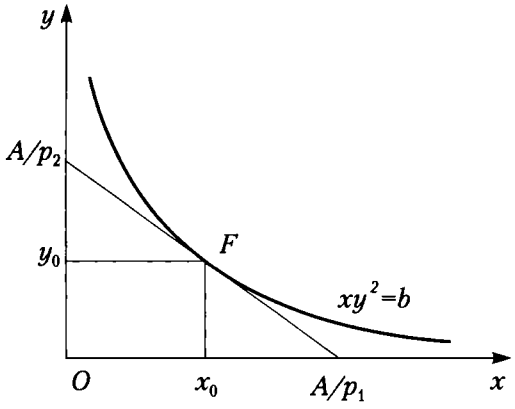


Рис. 8.5

Из этого уравнения определяется значение $x_0 = b^{1/3}(P_2/2P_1)^{2/3}$. Тогда из уравнения линии уровня функции выпуска определяется значение $y_0 = (b/x_0)^{1/2} = b^{1/3}(2P_1/P_2)^{1/3}$. Отсюда получаем, что оптимальное распределение ресурсов x_0/y_0 должно быть произведено в отношении $P_2 : 2P_1$.

Максимизация прибыли производства продукции

Функция прибыли обычно вычисляется по формуле

$$\Pi(K, L) = PF(K, L) - WL - RK, \tag{8.13}$$

где $F(K, L)$ — производственная функция, P — цена продукции, W и R — соответственно факторные цены на труд и капитальные затраты, L и K — соответственно затраты трудовых ресурсов и капитала. Рассмотрим две задачи, связанные с определением максимума прибыли.

1. Точка (K_0, L_0) называется *оптимальным планом*, если в ней функция прибыли (8.13) принимает максимальное значение. Найти предельную норму замещения производственной функции F при оптимальном плане.

В точке локального экстремума первые производные функции прибыли $\Pi(K, L)$ равны нулю, откуда имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} PF'_K(K_0, L_0) - R = 0, \\ PF'_L(K_0, L_0) - W = 0. \end{cases}$$

Как известно, предельная норма замещения вычисляется по формуле $\mu = -F'_L/F'_K$, откуда при оптимальном плане получаем $\mu = -W/R$.

2. Максимизация функции прибыли. Найти оптимальный план и максимум функции прибыли (8.13), если $F(K, L) = 2(KL)^{1/3}$.

В данном случае функция прибыли имеет вид

$$\Pi(K, L) = 2P(KL)^{1/3} - WL - RK.$$

Условия локального экстремума приводят к системе двух линейных алгебраических уравнений относительно координат K_0 и L_0 оптимального плана

$$\begin{cases} \frac{2}{3}PL_0^{1/3}K_0^{-2/3} = R, \\ \frac{2}{3}PK_0^{1/3}L_0^{-2/3} = W. \end{cases}$$

Отсюда получаем координаты оптимального плана:

$$K_0 = (2P/3)^3/\left(R^2W\right), \quad L_0 = (2P/3)^3/\left(RW^2\right).$$

Подстановка этих величин в функцию прибыли дает ее максимум:

$$\Pi_{\max} = (2P/3)^3/(RW).$$

Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов относится к методам *аппроксимации*, или приближенного восстановления функции по известным ее значениям в ряде точек. На практике часто возникает задача о наилучшем *подборе эмпирических* формул, позволяющих представить в аналитической форме данные статистических наблюдений, измерений и т.д. Задача формулируется следующим образом: имеются данные наблюдений в n точках

$$M_1, M_2, \ldots, M_n \tag{8.14}$$

некоторой величины u и получены соответствующие значения

$$u_1, u_2, \ldots, u_n. \tag{8.15}$$

Нужно подобрать функцию определенного вида $u = f(M)$, чтобы она по возможности наиболее точно отражала общую зависимость измеряемой величины u от параметров (координат) точек измерения $\{M_i\}$.

Таким образом, задача нахождения эмпирических формул состоит из двух этапов:

1) определение общего вида зависимости $f(M)$ или вида функции f с точностью до постоянных параметров (коэффициентов), входящих в нее;

2) неизвестные коэффициенты подбираются таким образом, чтобы в точках наблюдений (8.14) подобранная функция как можно лучше отвечала данным измерений (8.15).

Итак, пусть на первом этапе определено, что эмпирическая формула должна включать совокупность известных базовых функций

$$\varphi_1(M), \varphi_2(M), \ldots, \varphi_m(M), \tag{8.16}$$

т.е. эта формула должна иметь вид

$$f(M) = a_1\varphi_1(M) + a_2\varphi_2(M) + \ldots + a_m\varphi_m(M), \tag{8.17}$$

где

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \tag{8.18}$$

— неизвестные параметры эмпирической функции.

Второй этап состоит в определении неизвестных параметров (8.18). Их следует выбрать такими, чтобы значения функции (8.17) по возможности наименее всего отклонялись в точках (8.14) от измеренных значений (8.15).

Метод наименьших квадратов состоит в минимизации суммы квадратов *погрешностей* (отклонений) δ_i (рис. 8.6) функции (8.17) в точках (8.14) как функции от m аргументов — неизвестных параметров:

$$\begin{aligned} S(a_1, a_2, \ldots, a_m) &= \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [u_i - f(M_i)]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} [u_i - \sum_{k=1}^{m} a_k\varphi_k(M_i)]^2. \end{aligned} \tag{8.19}$$

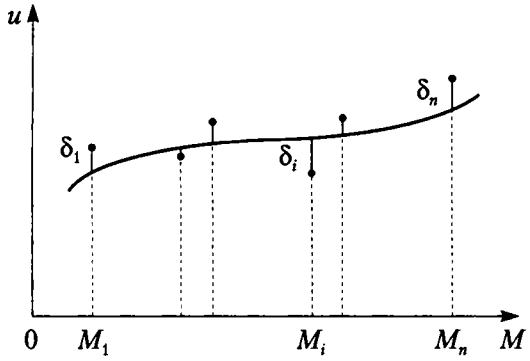


Рис. 8.6

Для установления точки минимума функции (8.19) m переменных (8.18) нужно найти частные производные этой функции по всем m аргументам и приравнять их к нулю. Отсюда получается система m линейных алгебраических уравнений относительно m неизвестных параметров (8.18)

$$A_{j1}a_1 + A_{j2}a_2 + \ldots + A_{jm}a_m = B_j, j = 1, 2, \ldots, m. \qquad (8.20)$$

Коэффициенты и свободные члены уравнений этой системы определяются по формулам

$$A_{jk} = A_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_j(M_i)\varphi_k(M_i), \quad B_j = \sum_{i=1}^{n} u_i\varphi_j(M_i),$$
$$j, k = 1, 2, \ldots, m.$$

Поскольку функция (8.19) является положительной, выпуклой вниз и неограниченной в евклидовом пространстве E^m, то решение системы уравнений (8.20) представляет собой координаты точки ее локального минимума.

При обработке данных экономической статистики наиболее распространенным является приближение эмпирической формулой в виде линейной функции одной переменной (например, это широко используется в трендовом анализе). В этом случае совокупность точек измерения (8.14) представляет собой набор значений аргумента x_1, x_2, ..., x_n, а совокупность функций

(8.16) состоит из двух функций: x и 1. Эмпирическая формула (8.17) имеет вид

$$u = ax + b.$$

Неизвестные параметры a и b определяются из системы двух линейных уравнений

$$\begin{cases} A_{11}a + A_{12}b &= B_1, \\ A_{21}a + A_{22}b &= B_2, \end{cases}$$

в которой коэффициенты и свободные члены выражаются формулами

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad A_{12} = A_{21} = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad A_{22} = n,$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i, \quad B_2 = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Найти области определения функций.

8.1. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$. **8.2.** $z = \sqrt{xy}$. **8.3.** $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

8.4. $z = \sqrt{x} - y$. **8.5.** $z = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$. **8.6.** $z = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$.

8.7. $z = \ln(x + y)$. **8.8.** $z = \dfrac{1}{x - y}$.

Построить линии уровня функций.

8.9. $z = xy$. **8.10.** $z = x + y$. **8.11.** $z = \sqrt{y - x^2}$.

8.12. $z = \dfrac{x}{y}$. **8.13.** $z = \dfrac{y - x^2}{x^2}$.

Найти частные производные от функций.

8.14. $z = x^3 + 3x^2y - y^3$. **8.15.** $z = \dfrac{xy}{x - y}$. **8.16.** $z = \sin(x + y)$.

8.17. $z = x^2y^3 - x^3y^2$. **8.18.** $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$. **8.19.** $z = e^{xy}$.

8.20. $z = \ln(x + y^2)$. **8.21.** $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.
8.22. $z = xye^{xy}$. **8.23.** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. **8.24.** $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Найти градиент и его модуль для функций в указанных точках.

8.25. $z = 4 - x^2 - y^2$, в точке $M(1, 2)$.
8.26. $z = (x-y)^2$, $M(0, 3)$. **8.27.** $u = x^2+y^2-z^2$, $M(1, -1, 2)$.
8.28. $u = xyz$, $M(3, -1, 2)$.
8.29. Доказать, что для функций, указанных в задачах 8.23 и 8.24, модуль градиента равен единице во всей области определения.

Найти частные производные второго порядка.

8.30. $z = \dfrac{x^2}{1 + 2y}$. **8.31.** $z = xe^y$. **8.32.** $z = \ln(x + e^{xy})$.
8.33. $z = x^{2y}$. **8.34.** $z = \operatorname{arctg} xy$.
8.35. $z = e^x(\sin y + x\cos y)$.

Найти экстремумы функций.

8.36. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$. **8.37.** $z = xy(1 - x - y)$.
8.38. $z = x^3 - y^3 - 3xy$. **8.39.** $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.
8.40. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$. **8.41.** $z = 2xy - 4x - 2y$.
8.42. $z = e^{x/2}(x + y^2)$.
8.43. Найти размеры цилиндра наибольшего объема, если его полная поверхность равна 6π.
8.44. Цены на два вида товаров равны соответственно $P_1 = 32$ и $P_2 = 24$ денежным единицам. Определить, при каких количествах x и y продаж этих товаров прибыль будет максимальной, если функция издержек имеет вид $C = \dfrac{3}{2}x^2 + 2xy + y^2$.
8.45. В результате эксперимента для пяти значений аргумента x получены пять значений величины u:

x	-2	0	1	2	4
u	0,5	1	1,5	2	3

Методом наименьших квадратов найти функциональную зависимость между x и u в виде линейной функции $u = ax + b$.

Часть 2
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Глава 9
ВЕКТОРЫ

9.1. Векторное пространство

Понятие и основные свойства вектора

Приведем обобщение понятия вектора на n-мерный случай.

Определение 1. Любой упорядоченный набор из n действительных чисел a_1, a_2, ..., a_n называется *n-мерным* вектором $\bar{a}$; при этом числа, составляющие упомянутый набор, называются *координатами* (компонентами) вектора $\bar{a}$.

Определение 2. Совокупность всех n-мерных векторов называется *n-мерным векторным пространством* R^n.

Координаты n-мерного вектора $\bar{a}$ можно расположить либо в строку:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{9.1}$$

либо в столбец:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

Запись вида (9.1) называется вектором-строкой, а вида (9.2) — вектором-столбцом.

Определение 3. Два вектора с одним и тем же числом координат

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad \bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

называются равными, если их соответствующие координаты равны, т.е.

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \ldots, \quad a_n = b_n.$$

Определение 4. Вектор, все координаты которого равны нулю, называется нулевым вектором

$$\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0).$$

Операции над векторами

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ принадлежат n-мерному векторному пространству R^n:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad \bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n). \tag{9.3}$$

Будем называть *суммой векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ вектор $\bar{c}$, координаты которого равны суммам соответствующих координат этих векторов:

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Пусть λ — любое действительное число. *Произведением вектора $\bar{a}$ на число λ* будем называть вектор, координаты которого получаются умножением соответствующих координат вектора $\bar{a}$ на это число:

$$\bar{c} = \lambda\bar{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Из введенных таким образом операций над векторами вытекают следующие свойства этих операций. Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ — произвольные векторы n-мерного векторного пространства. Тогда:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ — переместительное свойство;
2) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ — сочетательное свойство;
3) $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$, где λ — действительное число;
4) $(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$, где λ и μ — действительные числа;
5) $\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$, где λ и μ — действительные числа;
6) $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$;
7) для любого вектора $\bar{a}$ существует такой вектор $-\bar{a}$, что $-\bar{a} = (-1)\bar{a}$, $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$;
8) $0\bar{a} = \bar{0}$ для любого вектора $\bar{a}$.

Скалярное произведение векторов

Определение 5. *Скалярным произведением* векторов (9.3) называется число, состоящее из суммы произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\bar{a}\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Как мы видим, формально такое определение скалярного произведения двух векторов согласуется с аналогичным определением двух- и трехмерных векторов. Из данного определения следуют основные свойства скалярного произведения векторов:

1) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$;
2) $(\lambda\bar{a})\bar{b} = \bar{a}(\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a}\bar{b})$, где λ — действительное число;
3) $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$;
4) $\bar{a}\bar{a} > 0$, если $\bar{a} \neq \bar{0}$, и $\bar{a}\bar{a} = 0$, если $\bar{a} = \bar{0}$.

Введем понятие модуля вектора (его длины) и угла между векторами в виде обобщения на случай $n > 3$.

Определение 6. Для векторов из n-мерного векторного пространства модуль вектора $\bar{a}$ и угол φ между двумя ненулевыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяются по формулам:

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}\bar{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|a||b|}. \qquad (9.4)$$

Укажем одно важное свойство векторов. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будем называть *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\bar{a}\bar{b} = 0. \qquad (9.5)$$

Равенство (9.5) является аналогом условия перпендикулярности векторов в двух- и трехмерном случаях, когда в равенстве (9.4) $\cos\varphi = 0$.

9.2. Линейная зависимость векторов

Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

При решении различных задач, как правило, приходится иметь дело не с одним вектором, а с некоторой совокупностью векторов одной размерности. Такую совокупность называют *системой* векторов и обозначают одной буквой и порядковым номером:

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k. \tag{9.6}$$

Определение 1. *Линейной комбинацией* векторов (9.6) называется вектор вида

$$\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \ldots + \lambda_k \bar{a}_k, \tag{9.7}$$

где λ_1, λ_2, ..., λ_k — любые действительные числа.

Например, пусть даны три вектора: $\bar{a}_1 = (1, 2, 0)$, $\bar{a}_2 = (2, 1, 1)$ и $\bar{a}_3 = (-1, 1, -2)$. Их линейной комбинацией с коэффициентами соответственно 2, 3 и 4 является вектор $\bar{b} = (4, 11, -5)$.

В случае равенства (9.7) говорят также, что вектор $\bar{b}$ *линейно выражается* через векторы (9.6) или *разлагается* по этим векторам.

Определение 2. Система ненулевых векторов (9.6) называется линейно зависимой, если существуют такие числа λ_1, λ_2, ..., λ_k, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация данной системы с указанными числами равна нулевому вектору:

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \ldots + \lambda_k \bar{a}_k = \bar{0}. \tag{9.8}$$

Если же равенство (9.8) для данной системы векторов (9.6) возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, то эта система векторов называется линейно независимой.

Например, система двух векторов $\bar{a}_1 = (1, 0)$ и $\bar{a}_2 = (0, 2)$ является линейно независимой; система двух векторов $\bar{b}_1 = (1, 2, 1)$ и $\bar{b}_2 = (2, 4, 2)$ является линейно зависимой, так как $\bar{b}_2 - 2\bar{b}_1 = \bar{0}$.

Пусть система векторов (9.6) является линейно зависимой. Выберем в сумме (9.8) слагаемое, в котором коэффициент $\lambda_s \neq 0$, и выразим его через остальные слагаемые:

$$\bar{a}_s = -\frac{\lambda_1}{\lambda_s}\bar{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_s}\bar{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{s-1}}{\lambda_s}\bar{a}_{s-1} - \frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_s}\bar{a}_{s+1} - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_s}\bar{a}_k.$$

Как видно из этого равенства, один из векторов линейно зависимой системы (9.7) оказался выраженным через другие векторы этой системы (или разлагается по остальным ее векторам).

Укажем свойства линейно зависимой системы векторов.

1. Система, состоящая из одного ненулевого вектора, линейно независима.

2. Система, содержащая нулевой вектор, всегда линейно зависима.

3. Система, содержащая более одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда среди ее векторов содержится по крайней мере один вектор, который линейно выражается через остальные.

Геометрический смысл линейной зависимости векторов очевиден для случаев двумерных векторов на плоскости и трехмерных векторов в пространстве. В случае двух векторов, когда один вектор выражается через другой, мы имеем

$$\bar{a}_1 = \lambda\bar{a}_2,$$

т.е. эти векторы *коллинеарны*, или, что то же самое, находятся на параллельных прямых. В пространственном случае три линейно зависимых вектора параллельны одной плоскости, т.е. *компланарны* (рис. 9.1); достаточно "подправить" соответствующими сомножителями длины этих векторов, чтобы один из них стал суммой двух других или выражался через них.

Справедлива следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

ТЕОРЕМА 9.1. *В пространстве R^n любая система, содержащая m векторов, линейно зависима при $m > n$.*

Базис и ранг системы векторов

Рассмотрим систему векторов

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k.$$

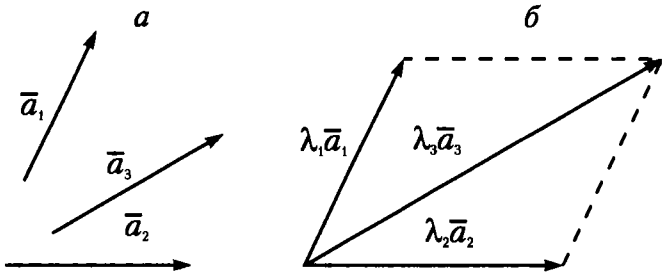


Рис. 9.1

Максимально независимой подсистемой этой системы векторов называется частичный набор векторов системы, удовлетворяющий двум условиям: а) векторы этого набора линейно независимы, б) любой вектор системы линейно выражается через векторы этого набора.

Справедлива теорема, утверждающая, что все максимально независимые подсистемы данной системы векторов содержат одно и то же число векторов. Максимально независимая подсистема системы векторов называется ее *базисом*; векторы, входящие в базис, называются *базисными векторами*. Будем называть *рангом* системы векторов число векторов ее базиса. Понятно, что если ранг системы векторов меньше числа k ее векторов, то она может иметь несколько базисов.

Понятие базиса распространяется и на пространство R^n, которое является системой, содержащей всю бесконечную совокупность n-мерных векторов.

Определение 3. Система n векторов называется базисом пространства R^n, если:

1) векторы этой системы линейно независимы;

2) всякий вектор из R^n линейно выражается через векторы данной системы.

9.3. Разложение вектора по базису

Представление вектора в произвольном базисе

Пусть система векторов

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m \tag{9.9}$$

является базисом, а вектор $\bar{b}$ — их линейной комбинацией. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9.2. *Разложение любого вектора в базисе, если оно существует, является единственным.*

Доказательство. Предположим, что вектор $\bar{b}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов (9.9) двумя способами:

$$\bar{b} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_m\bar{a}_m \text{ и } \bar{b} = \beta_1\bar{a}_1 + \beta_2\bar{a}_2 + \ldots + \beta_m\bar{a}_m,$$

где наборы чисел α_i и β_i, среди которых обязательно есть ненулевые значения, не совпадают. Вычитая одно равенство из другого, имеем

$$(\alpha_1 - \beta_1)\bar{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\bar{a}_2 + \ldots + (\alpha_m - \beta_m)\bar{a}_m = \bar{0}.$$

Мы получили, что линейная комбинация векторов системы (9.9), в которой не все коэффициенты равны нулю (в силу несовпадения α_i и β_i), равна нулю, т.е. данная система оказалась линейно зависимой, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает теорему.

Стало быть, в произвольном базисе пространства R^n

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n \tag{9.10}$$

любой вектор этого пространства обязательно представи́м в виде разложения по базисным векторам:

$$\bar{b} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n, \tag{9.11}$$

причем это разложение является *единственным* для данного базиса. Коэффициенты разложения

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

называются *координатами* вектора $\bar{b}$ в базисе (9.10), и, как следует из сказанного, этот набор единственный для любого вектора из R^nв данном базисе.

Задача нахождения коэффициентов разложения в случае произвольного базиса (9.10) является, вообще говоря, непростой. Нужно приравнять соответствующие координаты линейной комбинации векторов слева и координаты вектора $\bar{b}$ в

(9.11). Пусть базисные векторы и вектор $\bar{b}$ заданы в следующей координатной форме:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \\ \bar{a}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{a}_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}), \\ \bar{b} &= (b_1, b_2, \ldots, b_n). \end{aligned} \tag{9.12}$$

Выполнение процедуры, описанной выше, приводит к *системе n линейных уравнений* относительно n неизвестных координат разложения вектора $\bar{b}$ в базисе (9.10):

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n = b_n. \end{cases}$$

Такие системы уравнений и методы их решения представляют отдельные разделы линейной алгебры; они будут рассмотрены в следующих главах.

Разложение вектора в ортогональном базисе

Рассмотрим базис пространства R^n, в котором каждый вектор ортогонален остальным векторам базиса:

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n; \quad \bar{e}_i\bar{e}_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.13}$$

Ортогональные базисы хорошо известны и широко используются на плоскости и в пространстве (рис. 9.2). Базисы такого вида удобны прежде всего тем, что координаты разложения произвольного вектора определяются по весьма простой процедуре, не требующей трудоемких вычислений.

Действительно, пусть требуется найти разложение произвольного вектора $\bar{b}$ в ортогональном базисе (9.13). Составим разложение этого вектора с неизвестными пока координатами разложения в данном базисе:

$$\bar{b} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{e}_n. \tag{9.14}$$

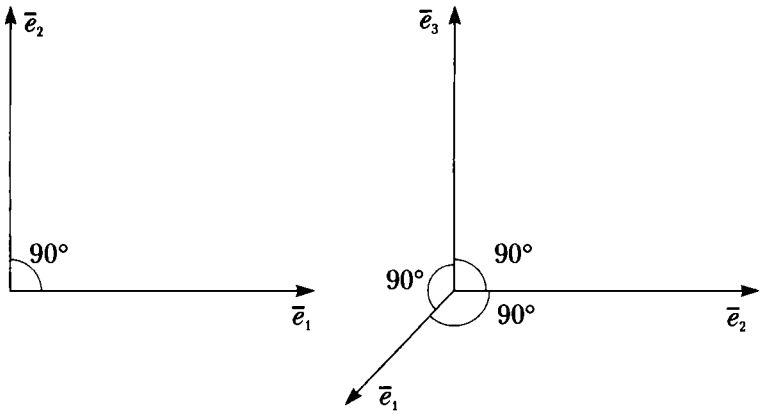


Рис. 9.2

Умножим обе части этого равенства, представляющие собой векторы, на вектор $\bar{e}_1$. В силу свойств 2 и 3 скалярного произведения векторов имеем

$$\bar{b}\bar{e}_1 = \alpha_1(\bar{e}_1\bar{e}_1) + \alpha_2(\bar{e}_2\bar{e}_1) + \ldots + \alpha_n(\bar{e}_n\bar{e}_1).$$

Однако в силу взаимной ортогональности векторов базиса (9.13) все скалярные произведения векторов базиса, за исключением первого, равны нулю, т.е. коэффициент α_1 определяется по формуле

$$\alpha_1 = \frac{\bar{b}\bar{e}_1}{\bar{e}_1\bar{e}_1} = \frac{\bar{b}\bar{e}_1}{|\bar{e}_1|^2}.$$

Умножая поочередно равенство (9.14) на другие базисные векторы, мы получаем простую формулу для вычисления коэффициентов разложения вектора $\bar{b}$:

$$\alpha_i = \frac{\bar{b}\bar{e}_i}{\bar{e}_i\bar{e}_i} = \frac{\bar{b}\bar{e}_i}{|\bar{e}_i|^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.15}$$

Нетрудно видеть, что соотношения (9.15) имеют смысл, поскольку $|\bar{e}_i| \neq 0$.

Отметим особо частный случай ортогонального базиса, когда все векторы в (9.13) имеют единичную длину ($|\bar{e}_i| = 1$), или нормированы по своей длине. В таком случае базис называют *ортонормированным* и координаты разложения (9.15) имеют наиболее простой вид:

$$\alpha_i = \bar{b}\bar{e}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Найти линейную комбинацию векторов $3\bar{a} + 4\bar{b} - \bar{c}$, где $\bar{a} = (4, 1, 3, -2)$, $\bar{b} = (1, 2, -2, 3)$, $\bar{c} = (10, 8, 1, -3)$.

9.2. Найти линейную комбинацию векторов

$$(\bar{a}, \bar{b})\bar{c} - 3(\bar{a}, \bar{c})\bar{a} + 3(\bar{b}, \bar{c})\bar{b},$$

где $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — векторы, указанные в предыдущей задаче.

9.3. Для векторов $\bar{a} = (2, 4, -3, 0)$ и $\bar{b} = (-1, 2, 2, -5)$ найти их длину и угол между ними.

9.4. Вычислить $(\bar{a} - \bar{b})^2$, если $|a| = 2\sqrt{2}$, $|b| = 4$, угол между векторами $\varphi = 135°$.

9.5. Найти координаты вектора $\bar{a} = (2, -4, 3, 5)$ в ортогональном базисе, состоящем из векторов

$$\bar{e}_1 = (-2, 0, 0, 0),\ \bar{e}_2 = (0, 3, 0, 0),$$
$$\bar{e}_3 = (0, 0, 4, 0),\ \bar{e}_4 = (0, 0, 0, -1).$$

Глава 10
МАТРИЦЫ

10.1. Матрицы и операции над ними

Понятие матрицы

Определение 1. Прямоугольная таблица чисел вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{10.1}$$

называется *матрицей*. Здесь a_{ij} — действительные числа ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$), называемые *элементами* матрицы, i и j — соответственно индексы строки и столбца.

При этом произведение $m \times n$ числа строк на число столбцов называют *размером матрицы* A. Часто матрицу (10.1) записывают в сокращенном виде:

$$A = ||a_{ij}||, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* матрицей.

В том случае, когда $m = n$ (число строк равно числу столбцов):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

матрица A называется *квадратной*.

Упорядоченная совокупность элементов a_{11}, a_{22},..., a_{nn} называется *главной диагональю* квадратной матрицы. Квадратная матрица называется *диагональной*, если ее элементы удовлетворяют условию

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \neq 0, & i = j; \\ a_{ij} = 0, & i \neq j, \end{cases}$$

т.е. ненулевыми могут быть только элементы главной диагонали; матрица в этом случае имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 2. Две матрицы A и B называются равными ($A = B$), если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Линейные операции над матрицами

1. Сумма матриц. *Суммой* матриц A и B одинакового размера называется матрица C того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B. Представим это в сокращенной записи. Пусть

$$A = ||a_{ij}||, \quad B = ||b_{ij}||; \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда сумма этих матриц $C = A + B$ имеет вид

$$C = ||c_{ij}||, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Пример 1. Пусть даны матрицы A и B:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда их суммой, согласно определению, является матрица

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Умножение матрицы на действительное число. *Произведением* матрицы A на действительное число α называется матрица, каждый элемент которой получен умножением соответствующего элемента матрицы A на число α.

Пример 2. Пусть даны матрица A и число α:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 3.$$

Тогда произведением матрицы А на число является матрица

$$C = \alpha A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 & 15 \\ 24 & 12 & -6 & 21 \end{pmatrix}.$$

3. Приведем свойства операций суммирования матриц и произведения матрицы на число, непосредственно вытекающие из определения этих операций. Пусть A, B и C — матрицы, имеющие одинаковый размер, а α и β — некоторые действительные числа. Тогда:

1) $A + B = B + A$,
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
3) $\alpha\,(A + B) = \alpha\,A + \alpha\,B$,
4) $(\alpha + \beta)\,A = \alpha\,A + \beta\,A$,
5) $(\alpha\beta)A = (\alpha A)\beta$,
6) $A + O = A$, где O — нулевая матрица,
7) $0A = O$.

Транспонирование матриц

Транспонированием матрицы называется замена строк матрицы на ее столбцы с сохранением их порядка (или, что то же самое, замена столбцов матрицы на ее строки). Пусть дана исходная матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно определению, транспонированная матрица A' имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сокращенная форма записи операции транспонирования матрицы:

$$A = ||a_{ij}||, \quad A' = ||a_{ji}||; \quad i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Пример 3. Пусть даны матрицы A и B:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Тогда соответствующие транспонированные матрицы имеют вид

$$A' = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить две закономерности операции транспонирования матриц.

1. Дважды транспонированная матрица равна исходной матрице:

$$A'' = A.$$

2. При транспонировании квадратных матриц элементы, находящиеся на главной диагонали, не меняют своих позиций, т.е. главная диагональ квадратной матрицы не меняется при транспонировании.

Важную роль в алгебре и ее приложениях играют *симметрические* матрицы — квадратные матрицы, у которых элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$. Транспонирование таких матриц не меняет их вида, так что равенство

$$A = A' \tag{10.2}$$

также можно полагать определением симметрической матрицы.

Умножение матриц

1. Умножение матриц — это специфическая операция, составляющая основу алгебры матриц. Строки и столбцы матриц можно рассматривать как векторы-строки и векторы-столбцы соответствующих размерностей: иными словами, любую матрицу можно интерпретировать как совокупность векторов-строк или векторов-столбцов.

Пусть даны матрица A размером $m \times n$ и матрица B размером $n \times k$. Будем рассматривать матрицу A как совокупность m векторов-строк $\bar{a}_i$ размерности n каждый, а матрицу B — как совокупность k векторов-столбцов $\bar{b}_j$, каждый из которых

содержит по n координат:

$$A = \begin{array}{c} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \dots \\ \bar{a}_m \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \dots & \bar{b}_k \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{10.3}$$

Векторы-строки матрицы A и векторы-столбцы матрицы B показаны в записи этих матриц (10.3). Длина строки матрицы A равна высоте столбца матрицы B, и потому скалярное произведение этих векторов имеет смысл.

Определение 3. Произведением матриц A и B называется матрица C, элементы которой c_{ij} равны скалярным произведениям векторов-строк $\bar{a}_i$ матрицы A на векторы-столбцы $\bar{b}_j$ матрицы B:

$$C = AB = ||c_{ij}||, \quad c_{ij} = \bar{a}_i\bar{b}_j = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}, \tag{10.4}$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Произведение матриц A и B — матрица C — имеет размер $m \times k$, поскольку длина n векторов-строк и векторов-столбцов исчезает при суммировании произведений координат этих векторов в их скалярных произведениях, как показано в формулах (10.4). Таким образом, для вычисления элементов первой строки матрицы C необходимо последовательно получить скалярные произведения первой строки матрицы A на все столбцы матрицы B; вторая строка матрицы C получается как скалярные произведения второй вектора-строки матрицы A на все векторы-столбцы матрицы B и так далее. Для удобства запоминания размера произведения матриц нужно перемножить отношения размеров матриц-сомножителей: $\dfrac{mn}{nk} = \dfrac{m}{k}$, т.е. размер матрицы C равен произведению оставшихся в отношении чисел: $m \times k$.

В операции умножения матриц есть характерная особенность: произведение матриц A и B имеет смысл, если число столбцов в A равно числу строк в B. Тогда если A и B — прямоугольные матрицы, то произведение B и A уже не будет иметь смысла, так как в скалярных произведениях, формирующих элементы соответствующей матрицы, должны участвовать векторы с одинаковым числом координат.

Если матрицы A и B квадратные размером $n \times n$, то имеет смысл как произведение матриц AB, так и произведение матриц BA, причем размер этих матриц такой же, как и у исходных сомножителей. При этом в общем случае перемножения матриц правило перестановочности не соблюдается, т.е. $AB \neq BA$.

Рассмотрим примеры на умножение матриц.

Пример 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Поскольку число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то произведение матриц AB имеет смысл. По формулам (10.4) получаем в произведении матрицу размером 3×2:

$$AB = \begin{pmatrix} 0-1+4 & 1-1-4 \\ 0+2+6 & 0+2-6 \\ 0+4+2 & 1+4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA не имеет смысла, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A.

Пример 5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Здесь мы найдем произведения данных матриц AB и BA:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+15 & 0-6 \\ 4-5 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2+0 & 3+0 \\ 10-8 & 15+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

Как видно из результата, матрица произведения зависит от порядка расположения матриц в произведении. В обоих случаях произведения матриц имеют тот же размер, что и у исходных сомножителей: 2×2.

Пример 6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Решение. В данном случае матрица B представляет собой вектор-столбец, т.е. матрицу, у которой три строки и один столбец. Вообще, векторы — это частные случаи матриц: вектор-строка длины n представляет собой матрицу с одной строкой и n столбцами, а вектор-столбец высоты n — матрицу с n строками и одним столбцом. Размеры данных матриц соответственно 2×3 и 3×1, так что произведение этих матриц определено. Имеем

$$AB = A\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2-2-10 \\ 0-3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В произведении получена матрица размером 2×1 или вектор-столбец высоты 2.

Пример 7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A^3.

Решение. Путем последовательного умножения матриц

находим

$$A^3 = A^2A = (AA)A =$$

$$\begin{pmatrix} 1+0+2 & 0+0+6 & 2+0+4 \\ 2+2+1 & 0+1+3 & 4+1+2 \\ 1+6+2 & 0+3+6 & 2+3+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 24 & 24 \\ 20 & 25 & 28 \\ 36 & 36 & 45 \end{pmatrix}.$$

2. Свойства произведения матриц. Пусть A, B и C — матрицы соответствующих размеров (чтобы произведения матриц были определены), а α — действительное число. Тогда следующие свойства произведения матриц имеют место:

1) $(AB)C = A(BC)$,
2) $(A+B)C = AC + BC$,
3) $A(B+C) = AB + AC$,
4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

В п. 1 этого раздела введено понятие единичной матрицы E. Нетрудно убедиться, что в алгебре матриц она играет роль единицы, т.е. можно отметить еще два свойства, связанные с умножением на эту матрицу слева и справа в случае квадратных матриц:

5) $AE = A$,
6) $EA = A$.

Иными словами, произведение любой матрицы на единичную матрицу, если оно имеет смысл, не меняет исходную матрицу.

Собственные значения и собственные векторы матрицы

Будем рассматривать квадратные матрицы размером $n \times n$, или, что то же самое, матрицы *порядка* n.

При умножении матрицы порядка n на n-мерный вектор в произведении получается n-мерный вектор:

$$A\bar{x} = \bar{b}.$$

Для любой матрицы может существовать набор особых векторов, таких, что произведение матрицы на вектор из такого набора равносильно умножению этого вектора на определенное вещественное число (вообще говоря, разное для каждого вектора).

Определение 4. Число λ называется собственным значением матрицы A порядка n, если существует такой ненулевой вектор $\bar{x} \in R^n$, что выполняется равенство

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}. \tag{10.5}$$

При этом вектор $\bar{x}$ называется собственным вектором матрицы A, а λ — собственным значением матрицы A, соответствующим вектору $\bar{x}$.

Иными словами, умножение матрицы на ее собственный вектор равносильно удлинению этого вектора в $|\lambda|$ раз, если $|\lambda| > 1$ (или сжатию при $|\lambda| < 1$). Если $\lambda = 1$, умножение матрицы на соответствующий собственный вектор не меняет его. Уравнение (10.5) представлено в матричной форме. Группируя все слагаемые этого уравнения в левой части, перепишем его в более удобном виде:

$$(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0},$$

где E и $\bar{0}$ — соответственно единичная матрица и нулевой вектор.

Если a_{ij} — элементы матрицы A, то *характеристическая* матрица $A - \lambda E$, согласно определениям умножения матрицы на число и суммы матриц, имеет вид

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Проблема отыскания собственных значений и собственных векторов матриц составляет основу специального раздела алгебры; в дальнейшем мы еще вернемся к этому вопросу. Здесь лишь отметим один важный результат алгебры матриц: для симметрических матриц (10.2) все n собственных значений являются действительными числами.

10.2. Обратная матрица

Ранг матрицы

Выше уже говорилось, что матрицы размера $m \times n$ можно рассматривать как системы, состоящие из m n-мерных векторов (или из n m-мерных векторов). Поскольку любая система векторов характеризуется рангом (п. 9.2), то естественно встает вопрос о такой же характеристике и для матриц. Так как здесь имеют место две совокупности векторов — векторы-строки и векторы-столбцы, то у матрицы, вообще говоря, два ранга — строчный и столбцовый. Ответ на вопрос об их равноправии дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 10.1. *Строчный и столбцовый ранги любой матрицы равны.*

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

Стало быть, ранг любой матрицы размера $m \times n$ можно искать как ранг одной из двух систем векторов: либо m векторов-строк, либо n векторов-столбцов. Как следует из п. 9.2, для прямоугольной матрицы максимальный ранг $r = \min(m, n)$. Для квадратной матрицы размером $n \times n$ ее максимальный ранг не может превышать n: $r \leq n$.

Понятие обратной матрицы

Понятие обратной матрицы распространяется только на квадратные матрицы, поэтому здесь и далее мы будем иметь дело с матрицами порядка n.

Определение 1. Матрица порядка n называется *вырожденной*, если ее ранг $r < n$.

Определение 2. Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к матрице A, если их произведение равно единичной матрице:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \tag{10.6}$$

Несколько забегая вперед, отметим, что для вырожденной матрицы не существует обратной матрицы. Иными словами, *если для некоторой матрицы порядка n ее ранг $r < n$, то для нее не существует обратной матрицы.*

10.3. Линейные операторы

Определение 1. Отображение $\tilde{A}$ линейного пространства R^n в линейное пространство R^m называется *линейным отображением* (*гомоморфизмом* или *морфизмом*), если для любых элементов $x, y \in R^n$ и любого числа α справедливы равенства

$$\tilde{A}(x+y) = \tilde{A}(x) + \tilde{A}(y), \tag{10.7}$$

$$\tilde{A}(\alpha x) = \alpha \tilde{A}(x). \tag{10.8}$$

Свойство (10.7) называется *аддитивностью* линейного отображения, а свойство (10.8) — его *однородностью*. В таком случае говорят, что задан *линейный оператор* $\tilde{A}$, действующий из R^n в R^m.

В таком случае будем говорить, что $\tilde{A}(\bar{x})$ является *образом* элемента x.

Определение 2. Линейное отображение пространства R^n в себя (т.е. когда пространства R^n и R^m совпадают) называется *линейным оператором* на линейном пространстве R^n.

Пусть $\{\bar{e}_k\}$ — некоторый базис в векторном пространстве R^n. Тогда разложение произвольного вектора $\bar{x}$ по этому базису имеет вид

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n.$$

Применим линейный оператор W к вектору $\bar{x}$ и получим образ $\bar{y} = \tilde{A}(\bar{x})$ вектора $\bar{x}$. Можно показать, что каждому линейному оператору $\tilde{A}$ в некотором базисе пространства R^n соответствует матрица A, по которой можно пересчитывать любой вектор в его *образ* в этом же базисе. Иными словами, любой линейный оператор можно задать в некотором базисе соответствующей матрицей: *матрицей оператора* $\tilde{A}$ в базисе $\{\bar{e}_k\}$. Формула пересчета имеет вид:

$$\bar{y} = \tilde{A}(\bar{x}) = \bar{x}. \tag{10.9}$$

При этом ранг r_A матрицы называется рангом оператора $\tilde{A}$.

Пример 1. В пространстве R^3 линейный оператор $\tilde{A}$ задан в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти образ $\bar{y} = \tilde{A}(\bar{x})$ вектора $\bar{x} = \bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$.

Решение. По формуле (10.9) получаем:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\bar{y} = 5\bar{e}_1 - 6\bar{e}_2 - \bar{e}_3$.

Для разных базисов матрицы одного и того же оператора будут различными. Связь между ними дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 10.2. *Пусть линейный оператор $\tilde{A}$ задан матрицами A и A^* соответственно в базисах $\{\bar{e}_k\}$ и $\{\bar{e}_k^*\}$. Тогда справедлива формула:*

$$A^* = C^{-1}AC, \tag{10.10}$$

где C — матрица перехода от базиса $\{\bar{e}_k\}$ к базису $\{\bar{e}_k^*\}$.

Пример 2. В пространстве R^3 линейный оператор $\tilde{A}$ задан в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу A^* оператора $\tilde{A}$ в базисе $\bar{e}_1^* = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$, $\bar{e}_2^* = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_3$, $\bar{e}_3^* = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$.

Решение. Матрица перехода от базиса $\{\bar{e}_k\}$ к базису $\{\bar{e}_k^*\}$ имеет вид: $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, а обратная к ней матрица $C^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 13 & 9 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -7 & -6 \end{pmatrix}$. Следовательно, по формуле (10.10) получаем:

$$A^* = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 13 & 9 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -7 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16,2 & 21,4 & 35,8 \\ 6,0 & 9,0 & 14,0 \\ -8,8 & -11,6 & -19,2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Квадратные матрицы A и A^*, связанные соотношением (10.10), где C невырожденная матрица, называются *подобными*. Важным свойством подобных матриц является то, что у них один и тот же спектр собственных значений. Таким образом, поскольку линейный оператор $\tilde{A}$ характеризуется в разных базисах подобными матрицами, то спектр собственных значений этих матриц является важной характеристикой оператора, не зависящей от выбора базиса, и называется *спектром собственных значений оператора* $\tilde{A}$. Что касается собственных векторов оператора $\tilde{A}$, то они являются собственными векторами матрицы A, соответствующей оператору $\tilde{A}$ в некотором базисе. Иными словами, спектр собственных значений и система соответствующих собственных векторов оператора $\tilde{A}$ определяется соотношениями

$$\tilde{A}(\bar{x}) = \lambda\bar{x} \tag{10.11}$$

с переходом в соответствующее матричное уравнение (см. раздел 10.1):

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}.$$

Собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$, принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы. В случае, когда оператор $\tilde{A}$ имеет n различных собственных значений, совокупность его собственных векторов образует базис.

10.4. Квадратичные формы

Функция вида

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \tag{10.12}$$

называется *квадратичной формой.* Если $a_{ik} = a_{ki}$, то квадратичная форма (10.12) называется *симметричной.*

Будем называть симметричную квадратную матрицу

$$A = \|a_{ik}\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ik} = a_{ki} \tag{10.13}$$

матрицей квадратичной формы (10.12). Квадратичная форма (10.12) может быть представлена в форме произведения матриц:

$$\Phi = XAX', \tag{10.14}$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и X' — вектор-строка и вектор-столбец переменных.

Пример 1. Дана квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$. Записать ее в матричном виде.

Решение. Матрица этой квадратичной формы имеет следующий вид: на главной диагонали стоят коэффициенты при квадратах переменных, а симметричные относительно нее недиагональные элементы равны половинам соответствующих коэффициентов перекрестных произведений переменных данной квадратичной формы. Следовательно, имеем запись вида

$$\Phi = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Канонический и нормальный вид квадратичной формы

Определение 1. Две квадратичные формы называются *эквивалентными*, если одна из них может быть получена *неособой* заменой переменных, или, что то же самое, при помощи невырожденного линейного преобразования.

Представляет интерес вопрос: какова наиболее простая форма, эквивалентная данной?

Определение 2. Квадратичная форма имеет *канонический* вид, если ее коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$:

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2. \qquad (10.15)$$

Определение 3. Квадратичная форма с действительными коэффициентами имеет *нормальный* вид, если в ее каноническом виде все коэффициенты равны 1 или -1.

Существуют разные методы приведения квадратичной формы к каноническому виду. Укажем один из них.

Метод Лагранжа. Он заключается в выделении полных квадратов: сначала формируется полный квадрат из слагаемых, содержащих x_1, затем из слагаемых, содержащих x_2, и т.д. Рассмотрим это на конкретном примере.

Пример 2. Привести к каноническому и нормальному виду квадратичную форму

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2.$$

Решение. Применяя метод Лагранжа, получаем:

$$\begin{aligned}
&\Phi(x_1, x_2, x_3) = [x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2] - \\
&- (2x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - \\
&- 4x_2^2 - 8x_2x_3 - 4x_3^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 = y_1^2 - 3x_2^2 - 4x_2x_3 - 3x_3^2 = \\
&= y_1^2 - 3[x_2^2 + 2x_2(2x_3/3) + (2x_3/3)^2] + 3(2x_3/3)^2 - 3x_3^2 = \\
&\qquad = y_1^2 - 3(x_2 + 2x_3/3)^2 - 5x_3^2/3 = y_1^2 - 3y_2^2 - 5y_3^2/3,
\end{aligned}$$

где $y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3$, $y_2 = x_2 + 2x_3/3$, $y_3 = x_3$. Очевидно, что эта замена переменных является неособой. Для приведения к

нормальному виду в этой квадратичной форме нужно использовать замену переменных $y_1 = z_1$, $y_2 = z_2/\sqrt{3}$, $y_3 = \sqrt{3/5}\, z_3$. Тогда получаем:

$$\Phi(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Сформулируем в виде теоремы, которую мы приводим здесь без доказательства, фундаментальное положение теории квадратичных форм.

ТЕОРЕМА 10.3 (закон инерции квадратичных форм). *При любом способе приведения квадратичной формы (10.12) с действительными коэффициентами к нормальному виду число квадратов с коэффициентами* 1 *получается одно и то же, как и число квадратов с коэффициентами* -1.

УПРАЖНЕНИЯ

10.1. Найти матрицу $C = 2A - B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & 8 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

10.2. Даны следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти: **а**) все произведения матриц, которые имеют смысл; **б**) соответствующие транспонированные матрицы; **в**) матрицу $2G - C^2$, **г**) матрицу C^3.

10.3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Проверить непосредственным вычислением, какие из данных ниже векторов являются собственными векторами этой матрицы, и указать соответствующие собственные значения:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \bar{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10.4. Линейный оператор $\tilde{A}$ задан в некотором базисе матрицей A. Найти образ вектора $\bar{x}$.

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = (4, -3)$;

б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = (2, 4, -1)$.

10.5. Представить в матричной записи квадратичные формы.

а) $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 5x_1x_2 - 6x_1x_3 + 3x_2^2 + 8x_2x_3 + 7x_3^2$,

б) $\Phi(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 6x_1x_2 + 12x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$,

в) $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 14x_1x_3 + 2x_2^2 + 16x_2x_3 + 9x_3^2$.

10.6. Привести квадратичные формы задачи 10.5 к каноническому и нормальному виду методом Лагранжа.

10.7. Привести к каноническому и нормальному виду квадратичные формы методом Лагранжа: а) $\Phi = 3x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$, б) $\Phi = x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$, в) $\Phi = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$.

Глава 11
ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

11.1. Операции над определителями и основные свойства

Понятие определителя

Любой квадратной матрице A порядка n ставится в соответствие по определенному закону некоторое число, называемое *определителем*, или *детерминантом*, n-го порядка этой матрицы. Начнем с определителей второго и третьего порядков.

Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

тогда ее определитель второго порядка вычисляется по формуле

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (11.1)$$

Правило вычисления определителя второго порядка очевидно: из произведения элементов на главной диагонали вычитается произведение элементов на второй диагонали матрицы A. Нетрудно видеть, что формула (11.1) представляет собой алгебраическую сумму двух попарных произведений элементов матрицы A, стоящих в разных строках и разных столбцах.

В дальнейшем мы не будем приводить матрицу, для которой вычисляется определитель, так как в записи определителя содержатся все элементы соответствующей матрицы.

Определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + \qquad (11.2)$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Правило вычисления определителя третьего порядка следующее. Это алгебраическая сумма шести тройных произведений элементов, стоящих в разных строках и разных столбцах; со знаком «плюс» берутся произведения, сомножители которых находятся на главной диагонали и в вершинах треугольников, чьи основания параллельны главной диагонали; со знаком «минус» — произведения, сомножители которых стоят на не главной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными этой диагонали (рис. 11.1). Заметим, что каждое слагаемое в формуле (11.2) содержит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца соответствующей матрицы.

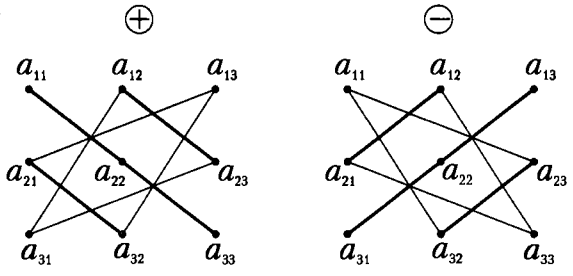


Рис. 11.1

Рассмотрим определитель n-го порядка

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (11.3)$$

Теперь с учетом подмеченных выше закономерностей перейдем к определению для общего случая.

Определение 1. Определителем матрицы A n-го порядка называется алгебраическая сумма $n!$ произведений n-го порядка элементов этой матрицы, причем в каждое произведение входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца данной матрицы.

Основные свойства определителей

Из данного выше общего определения следуют основные свойства определителей.

1. Если некоторая строка или столбец определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

Действительно, согласно общему определению, в каждое из $n!$ слагаемых обязательно войдет сомножителем элемент нулевой строки (нулевого столбца).

2. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

Это свойство легко проверяется на определителях второго и третьего порядков.

3. Определитель, содержащий две одинаковые строки (два одинаковых столбца), равен нулю.

Действительно, поменяв местами эти строки, получаем $\Delta_n = -\Delta_n$ откуда и следует, что $\Delta_n = 0$.

4. Общий множитель любой строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

5. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя Δ_n представлен в виде суммы двух слагаемых, то этот определитель равен сумме двух определителей, в каждом из которых: а) все строки (столбцы), за исключением указанной строки (столбца), совпадают с аналогичными строками (столбцами) определителя Δ_n; б) на месте указанной строки (столбца) первый определитель содержит первые слагаемые, а второй определитель — вторые слагаемые данной строки (столбца) определителя Δ_n.

Поясним это свойство на примере определителя третьего порядка:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} + a''_{21} & a'_{22} + a''_{22} & a'_{23} + a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta'_3 + \Delta''_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a''_{22} & a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6. Определитель не изменится, если к элементам любой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любое число.

Это свойство является следствием свойств 3–5.

7. При транспонировании матрицы определитель не меняется.

Из перечисленных свойств следует, что определитель равен нулю, если по крайней мере одна из его строк (столбцов) является линейной комбинацией каких-либо других его строк (столбцов). Отсюда вытекает необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя. *Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) линейно зависимы.*

Миноры и алгебраические дополнения

Рассмотрим определитель n-го порядка (11.3). Выделим в нем какой-либо элемент a_{ij} и вычеркнем i-ю строку и j-й столбец, на пересечении которых расположен этот элемент. Полученный определитель $(n-1)$-го порядка называется *минором* M_{ij} *элемента* a_{ij} определителя Δ_n.

Пример 1. Найти минор M_{32} определителя четвертого порядка

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Минор M_{32} элемента a_{32} получается вычеркиванием из данного определителя 3-й строки и 2-го столбца. Полученный определитель 3-го порядка равен

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 36 + 30 - 12 - 6 = 48.$$

Определение 2. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя (11.3) называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Так, для приведенного выше примера алгебраическое дополнение равно

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot 48 = -48.$$

Миноры и алгебраические дополнения играют важную роль в алгебре и ее приложениях. Одним из таких применений является основополагающая теорема о способе вычисления определителей.

ТЕОРЕМА 11.1. *Определитель равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения:*

$$\Delta_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \quad 1 \le i \le n. \qquad (11.4)$$

Формула (11.4) называется *разложением* определителя по i-й строке. Доказательство этой теоремы мы опускаем. Аналогичное утверждение имеет место и для разложения определителя по любому столбцу.

Формула (11.4) сводит вычисление определителя n-го порядка к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка. Зная формулу (11.2) вычисления определителя 3-го порядка, мы, например, можем найти определитель 4-го порядка путем разложения его на сумму алгебраических дополнений по формуле (11.4).

Пример 2. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. В принципе, разложить определитель можно по любой строке (столбцу), согласно формуле (11.4). Однако объем вычислений можно существенно уменьшить, если выбрать такую строку (столбец), в которой побольше элементов равно нулю. Наиболее подходящей в нашем случае является вторая строка. Разложение по ней определителя имеет вид

$$\Delta_4 = 0 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 2 \cdot A_{24} =$$

$$= 3 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=3(3+14+48-126-2-8)+2(4+24+36-48-9-4) = -207.$$

11.2. Ранг матрицы и системы векторов

1. Пусть дана матрица, содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (11.5)$$

Выделим в ней произвольным образом k строк и k столбцов. Элементы, которые находятся на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка; определитель этой матрицы называется *минором k-го порядка матрицы A*. Очевидно, что в общем случае таких миноров k-го порядка может быть несколько. При этом максимальный порядок миноров равен минимальному из чисел m и n, т.е.

$$\max k = \min(m, n).$$

Из всех возможных миноров матрицы A выделим те из них, которые отличны от нуля. В свою очередь среди этих миноров можно найти по крайней мере один минор наибольшего порядка.

Определение 1. Наибольший порядок миноров, отличных от нуля, называется рангом матрицы (11.5).

Определение 2. Отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу матрицы, называется *базисным* минором этой матрицы. Столбцы и строки матрицы, участвующие в образовании базисного минора, также называются *базисными*.

Заметим, что в общем случае у матрицы может быть несколько базисных миноров.

В п. 10.2 было дано определение ранга матрицы как наибольшего числа линейно независимых ее векторов-строк (столбцов). В курсе алгебры доказывается, что эти два определения эквивалентны. Приведенное в данном разделе определение дает возможность вычислять ранг матрицы, а значит, и ранг системы векторов.

Пример 1. Найти ранг матрицы размером 4×6:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Нетрудно видеть, что максимальный порядок миноров этой матрицы, отличных от нуля, равен двум, поскольку миноры третьего порядка должны содержать элементы по крайней мере двух строк со второй по четвертую. Такие определители равны нулю либо по признаку пропорциональности двух строк, либо по признаку наличия в них нулевой строки. У этой матрицы существуют три базисные строки (либо 1-я и 2-я, либо 1-я и 3-я), и пять ее столбцов являются базисными (либо с 1-го по 5-й, либо со 2-го по 6-й); из них и формируются все базисные миноры второго порядка.

2. Рассмотрим квадратную матрицу порядка n, т.е. когда в матрице (11.5) $m = n$. Как было отмечено в п. 10.2, матрица порядка n является вырожденной и не имеет обратной матрицы, если ее ранг $r < n$. Максимальный порядок минора квадратной матрицы равен n; в этом случае базисный минор равен определителю этой матрицы. Стало быть, квадратная матрица *является вырожденной, если ее определитель равен нулю.*

11.3. Критерий знакоопределенности квадратичной формы

Рассмотрим симметричную квадратичную форму (см. раздел 10.4)

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \tag{11.6}$$

матрица которой

$$A = \|a_{ik}\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n_2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ik} = a_{ki}. \tag{11.7}$$

Определение 1. Квадратичная форма (11.6) называется *положительно определенной (отрицательно определенной)*, если для любых значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, не равных одновременно нулю, указанная форма имеет положительные (отрицательные) значения. Оба этих случая объединены под названием *знакоопределенных* форм. Если квадратичная форма (11.7) имеет как положительные, так и отрицательные значения, то она называется *знакопеременной.*

Нетрудно доказать следующее утверждение: квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных является положительно определенной тогда и только тогда, если ее нормальный вид содержит ровно n квадратов, т.е. имеет вид $y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2$. Согласно теории квадратичных форм для положительно определенной формы все n собственных значений ее матрицы должны быть положительными.

Аналогично в нормальный вид отрицательно определенной квадратичной формы все n квадратов должны входить со знаком «минус», все n собственных значений матрицы квадратичной формы должны быть отрицательными.

Однако путь приведения квадратичной формы к нормальному или к каноническому виду, как мы видели, является довольно трудоемким. Между тем возникает необходимость определения знака квадратичной формы по ее исходному виду. Сформулируем *критерий знакоопределенности* квадратичной формы.

Миноры

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{11.8}$$

называют *главными минорами* матрицы A квадратичной формы (11.7).

ТЕОРЕМА 11.2 (критерий Сильвестра)[1]. *Для того чтобы квадратичная форма (11.6) была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n > 0. \tag{11.9}$$

Для того чтобы квадратичная форма (11.6) была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ чередовались, причем $\Delta_1 < 0$.

Пример 1. Найти по критерию Сильвестра знакоопределенность квадратичной формы

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -6x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2.$$

Решение. Матрица этой квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последовательно вычисляем ее миноры:

$$\Delta_1 = a_{11} = -6, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -14.$$

Поскольку знаки главных миноров чередуются, начиная с минуса, то данная квадратичная форма является отрицательно определенной.

УПРАЖНЕНИЯ

11.1. Вычислить определители:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

[1] Джеймс Джозеф Сильвестр (1814–1897) — английский математик.

11.2. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти миноры элементов a_{23}, a_{14}, a_{34} и алгебраические дополнения элементов a_{32}, a_{43}, a_{24}.

11.3. Найти ранги следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -23 & 4 \\ 3 & 21 & 2 \\ 5 & -27 & 10 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11.4. Определить, являются ли зависимыми векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$: **а)** $\bar{a}_1 = (2, -1, 3)$, $\bar{a}_2 = (1, 4, -1)$, $\bar{a}_3 = (0, -9, 5)$; **б)** $\bar{a}_1 = (1, 2, 0)$, $\bar{a}_2 = (3, -1, 1)$, $\bar{a}_3 = (0, 1, 1)$.

11.5. Показать, что векторы $\bar{a}_1 = (1, -1, 3)$, $\bar{a}_2 = (3, -1, 1)$ и $\bar{a}_3 = (0, 1, 1)$ образуют базис.

11.6. Найти знакоопределенность квадратичных форм:

а) $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 5x_1x_2 - 6x_1x_3 + 3x_2^2 + 8x_2x_3 + 7x_3^2$,

б) $\Phi(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 6x_1x_2 + 12x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$,

в) $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 14x_1x_3 + 2x_2^2 + 16x_2x_3 + 9x_3^2$,

г) $\Phi = 3x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$, д) $\Phi = x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$,

е) $\Phi = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$.

Глава 12
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Этот раздел является одним из основных в алгебре. Нет такой отрасли науки и приложений, где в том или ином виде не использовались бы системы линейных алгебраических уравнений. При решении экономических задач системы линейных уравнений наиболее употребимы как в аппарате исследования, так и при рассмотрении частных проблем.

12.1. Основные понятия

Общий вид и свойства системы уравнений

Система m линейных уравнений с n неизвестными (переменными) x_1, x_2, ..., x_n имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \qquad (12.1)$$

Здесь a_{ij} и b_i — произвольные числа (i=1,2,..., m; j=1,2,..., n), которые называются соответственно *коэффициентами при неизвестных и свободными членами* уравнений (12.1). Первый индекс у коэффициентов при неизвестных означает номер уравнения, второй индекс соответствует номеру неизвестного x_i.

Решением системы уравнений (12.1) называется набор n чисел $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ... , $x_n = \alpha_n$, при подстановке которых в эту систему каждое уравнение данной системы превращается в тождество.

Система уравнений (12.1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение; если система не имеет решений, она называется *несовместной*. Совместная система уравнений имеет либо одно решение, и в таком случае она называется

определенной, либо, если у нее больше одного решения, она называется *неопределенной*.

Системы уравнений вида (12.1) называются *эквивалентными*, если они имеют одно и то же множество решений. *Элементарные преобразования* исходной системы приводят к эквивалентной системе. К элементарным преобразованиям относятся:

— вычеркивание уравнения $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=0$ — нулевой строки;

— перестановка уравнений или слагаемых $a_{ij}x_j$ в уравнениях;

— прибавление к обеим частям одного уравнения соответственно обеих частей другого уравнения этой системы, умноженного на любое действительное число;

— удаление уравнений, являющихся линейными комбинациями других уравнений системы.

Последнее свойство вытекает из третьего свойства: если какое-либо уравнение представляет собой линейную комбинацию других уравнений, то из него можно сформировать нулевую строку.

Матричная форма системы уравнений

Сведем коэффициенты при неизвестных в системе уравнений (12.1) в матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (12.2)$$

Эта матрица состоит из m строк и n столбцов и называется *матрицей системы*. Введем в рассмотрение две матрицы-столбца: матрицу неизвестных X и матрицу свободных членов B:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

X и B представляют собой векторы-столбцы, однако в целях единого подхода в рамках матричной алгебры удобнее трактовать их именно как матрицы, состоящие соответственно из n и m строк и одного столбца.

Тогда систему линейных уравнений (12.1) можно записать в матричной форме, поскольку размер матрицы A равен $m \times n$, а размер X — $n \times 1$ и, значит, произведение этих матриц имеет смысл:

$$AX = B. \tag{12.3}$$

Произведение матриц AX является, как и B, матрицей-столбцом размером $m \times 1$, состоящей из левых частей уравнений системы (12.1). Все уравнения этой системы вытекают из уравнения (12.3) в силу определения равенства двух матриц (п. 10.1).

Введем в рассмотрение еще одну матрицу; дополним матрицу системы A столбцом свободных членов и получим новую матрицу размером $m \times (n+1)$:

$$A_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \tag{12.4}$$

Матрица A_B называется *расширенной матрицей системы.* Эта матрица играет важную роль в вопросе о разрешимости системы уравнений.

ТЕОРЕМА 12.1 (Кронекера–Капелли, критерий совместности системы). *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы.*

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

12.2. Методы решения систем линейных уравнений

Метод обратной матрицы и теорема Крамера

В этом разделе мы рассмотрим частный случай системы (12.1), когда число уравнений равно числу неизвестных, т.е.

$m = n$. Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{cases} \tag{12.5}$$

Составим квадратную матрицу A порядка n этой системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1. В матричной форме система уравнений (12.5) имеет вид

$$AX = B,$$

где матрицы X и B имеют размер $n \times 1$. Пусть матрица системы A является невырожденной, т.е. существует обратная матрица A^{-1}. Умножив обе части этого уравнения слева на A^{-1}, получаем решение системы (12.5) в матричной форме:

$$X = A^{-1}B.$$

Вычисление обратной матрицы по заданной матрице A производится по довольно сложным формулам. В случае когда порядок n матриц A и A^{-1} достаточно велик, вычисление обратной матрицы может быть очень громоздким.

2. Другой метод решения системы уравнений (12.5) основан на теореме Крамера. Составим определитель матрицы системы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

который называется также *определителем системы*. Заменим в этом определителе j-й столбец на столбец свободных членов B, т.е. получим этой заменой другой определитель, который обозначим Δ_j:

$$\Delta_j = \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad (j) \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}.$$

ТЕОРЕМА 12.2 (правило Крамера). *Пусть Δ — определитель матрицы системы A, а Δ_j — определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов B. Тогда если $\Delta \neq 0$, то система линейных уравнений* (12.5) *имеет единственное решение, определяемое по формулам*

$$x_j = \Delta_j/\Delta, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{12.6}$$

Формулы вычисления неизвестных (12.6) — решения системы (12.5) — носят название *формул Крамера.*

Пример 1. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x + 3y + 2z = 2, \\ x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

Решение. Составим и вычислим определители системы Δ и Δ_j $(j = x, y, z)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Определитель системы отличен от нуля, стало быть, она имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам (12.6):

$$x = \Delta_x/\Delta = 3/2, \quad y = \Delta_y/\Delta = 0, \quad z = \Delta_z/\Delta = -1/2.$$

Решение системы общего вида

Пусть задана система линейных уравнений общего вида (12.1), где $m \leq n$, т.е. число неизвестных не меньше числа уравнений. Представим общий порядок решения этой системы.

1. Необходимо определить совместность системы, т.е. определить сначала ранги матрицы системы A и расширенной матрицы A_B. По теореме Кронекера–Капелли если ранги этих матриц не совпадают, то система несовместна и тогда нет смысла ее решать. Если же ранги матриц A и A_B равны, то система (12.1) совместна.

Определение 1. Рангом совместной системы линейных алгебраических уравнений называется ранг ее матрицы.

2. Пусть система (12.1) совместна и ранг ее равен r. Выделим в матрице системы (12.2) некоторый базисный минор; предположим, что именно первые r строк матриц A и A_B являются базисными. Тогда по теореме о базисном миноре остальные строки матрицы являются линейными комбинациями остальных строк. В свою очередь это означает, что в системе (12.1) первые r уравнений, соответствующие базисным строкам матрицы A, являются *базисными*, а остальные — их линейными комбинациями. Тогда эти $(m-r)$ уравнений можно удалить из системы, причем в результате указанных элементарных преобразований мы получаем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n &= b_r. \end{cases} \qquad (12.7)$$

3. Система (12.7) характерна тем, что ее ранг равен числу уравнений в ней, причем $r \leq n$, т.е. ранг не превосходит числа неизвестных. Поэтому возможны два случая: либо $r = n$, либо $r < n$. В первом случае система (12.7) имеет квадратную невырожденную матрицу порядка r (см. выше) и, согласно теореме Крамера, существует единственное решение этой системы. Иными словами, если ранг системы равен числу неизвестных,

то система имеет единственное решение, т.е. она является определенной.

4. Рассмотрим теперь случай, когда $r < n$. Перенесем в правые части уравнений (12.7) все слагаемые, содержащие неизвестные x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n. \end{cases} \quad (12.8)$$

Неизвестным x_{r+1}, ..., x_n можно придавать любые значения, и потому они называются *свободными*. Неизвестные x_1, x_2, ..., x_r, соответствующие базисным столбцам, называются базисными. Из системы (12.8) легко найти выражения базисных неизвестных через свободные, согласно теореме Крамера, рассматривая правые части этих уравнений как элементы столбца свободных членов, содержащие x_{r+1}, x_{r+2},..., x_n. Можно показать, что базисные неизвестные x_1, x_2, ..., x_r линейно выражаются через свободные неизвестные. Поскольку свободные неизвестные могут принимать любые значения, то в случае когда ранг совместной системы меньше числа неизвестных, эта система является неопределенной: она имеет бесчисленное множество решений.

Метод Гаусса

Следует заметить, что как метод обратной матрицы, так и метод Крамера являются очень трудоемкими по количеству вычислительной работы. Оба они требуют порядка $n^2n!$ арифметических действий для нахождения решения системы линейных уравнений. При $n = 5$ это составит около 3000 действий, при $n = 10$ — около $3{,}6 \cdot 10^8$ действий. При решении серьезных задач приходится иметь дело с системами уравнений порядка $n = 100$ и более. При таких масштабах даже суперкомпьютерам потребуется огромное время для вычисления решения. Кроме того, погрешности компьютерного округления чисел приводят к значительным ошибкам в расчетах численного решения систем уравнений большого порядка. Между тем существуют более экономичные методы решения систем линейных уравнений, основанные на предварительном преобразовании расширенной

матрицы системы к специальному виду. В частности, одним из них является метод Гаусса, практическую реализацию которого мы приводим ниже.

Рассмотрим систему уравнений общего вида (12.1). Пусть для определенности $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то можно переставить на первое место ненулевое слагаемое или начать с другого уравнения). Умножим первое уравнение системы (12.1) на число a_{21}/a_{11} и затем вычтем его из второго уравнения этой системы. Умножим обе части первого уравнения на число a_{31}/a_{11} и затем вычтем его из третьего уравнения и так далее, т.е. процесс заключается в последовательном вычитании первого уравнения, умножаемого на числа a_{i1}/a_{11}, из i-го уравнения ($i = 2, 3, \ldots, m$). Таким образом, в результате элементарных преобразований мы получим эквивалентную систему, в которой начиная со второго уравнения отсутствуют слагаемые, содержащие неизвестное x_1:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n & = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + a_{m3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n & = b_m^{(1)}, \end{cases} \tag{12.9}$$

где верхний индекс в скобках означает новые коэффициенты, полученные после первого шага. Для удобства записи будем оперировать расширенной матрицей системы, отделяя в ней вертикальной чертой столбец свободных членов. Итак, после первого шага, содержащего $(m-1)$ элементарных преобразований системы, мы переходим от расширенной матрицы (12.4) исходной системы к расширенной матрице

$$A_B^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & | & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & | & b_2^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & | & \ldots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} & \ldots & a_{mn}^{(1)} & | & b_m^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Второй шаг заключается в том, что теперь второе уравнение системы (12.7) или вторая строка матрицы (12.8) используется для аналогичных элементарных преобразований строк

с третьей по m-ю: эта строка последовательно умножается на число $a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ и вычитается из i-й строки ($i = 3, 4, \ldots, m$). В результате этих $(m-2)$ элементарных преобразований получаем новую расширенную матрицу, соответствующую новой эквивалентной системе уравнений. Эта матрица имеет вид

$$A_B^{(2)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & \ldots & a_{mn}^{(2)} & b_m^{(2)} \end{array}\right),$$

где верхний индекс означает новые коэффициенты. В случае если элемент $a_{i2}^{(1)} = 0$, то второе уравнение можно поменять местами с другим уравнением, у которого элемент $a_{i2}^{(1)} \neq 0$.

Продолжим этот процесс аналогичным образом (т.е. на 3-м шаге преобразуются строки с 4-й по m-ю, на 4-м шаге — строки с 5-й по m-ю и т.д.) до тех пор, пока не дойдем до последней m-й строки. После $(r-1)$-го шага процесса последовательного исключения неизвестных мы получим следующую расширенную матрицу:

$$A_B^{(r-1)} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2r}^{(1)} & a_{2,r+1}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr}^{(r-1)} & a_{r,r+1}^{(r-1)} & \ldots & a_{rn}^{(r-1)} & b_r^{(r-1)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{r+1}^{(r-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_m^{(r-1)} \end{array}\right).$$

Последние $(m-r)$ строк этой матрицы соответствуют уравнениям эквивалентной системы уравнений

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b_i^{(r-1)}; \quad i = r+1, r+2, \ldots, m. \quad (12.10)$$

Эти уравнения могут появиться, если соответствующие уравнения исходной системы (12.1) представляют собой линейные

комбинации других уравнений этой системы, о чем говорилось в п. 12.1. Здесь мы не исследовали заранее систему (12.1) на совместность; поэтому если эта система несовместна, то хотя бы одно из чисел $b_{r+1}^{(r-1)}$, $b_{r+2}^{(r-1)}$,..., $b_m^{(r-1)}$ не равно нулю. Таким образом, метод Гаусса позволяет на определенном шаге установить возможную несовместность исходной системы линейных уравнений или выявить и удалить уравнения, являющиеся линейными комбинациями других уравнений системы (12.1), если она совместна.

Пусть система (12.1) совместна, тогда все правые части уравнений (12.10) равны нулю, и после удаления нулевых уравнений в эквивалентной системе и нулевых строк в расширенной матрице получаем матрицу специфического ступенчатого вида, ранг которой равен r. Все элементы этой матрицы, стоящие слева или ниже элементов a_{ii}, равны нулю:

$$A_B^{(r-1)} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2r}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3r}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)} & b_r^{(r-1)}. \end{array}\right). \quad (12.11)$$

Эта расширенная матрица соответствует системе уравнений ранга r, которая имеет вид

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \ +\dots+ \quad a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3 \ +\dots+ \quad a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 \ +\dots+ \quad a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{rr}^{(r-1)}x_r \ +\dots+ \ a_{rn}^{(r-1)}x_n & = & b_r^{(r-1)}. \end{array}\right. \quad (12.12)$$

Система уравнений (12.12) уже полностью подготовлена к нахождению решения, процесс которого осуществляется снизу вверх, т.е. от последнего уравнения к первому. Переход от системы (12.1) к эквивалентной ей системе (12.12) называется *прямым ходом*, а нахождение неизвестных из системы (12.12) — *обратным ходом* метода Гаусса. Далее последовательность действий аналогична изложенной выше.

1. Если $r = n$, то система (12.12) имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1r}x_r & = & b_1, \\ & a_{22}^{(1)}x_2 & + \ldots + & a_{2r}^{(1)}x_r & = & b_2^{(1)}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & & & a_{rr}^{(r-1)}x_r & = & b_r^{(r-1)}. \end{cases} \tag{12.13}$$

Поднимаясь снизу вверх, последовательно находим (обратный ход метода Гаусса):

— из последнего r-го уравнения неизвестное $x_r = b_r^{(r-1)}/a_{rr}^{(r-1)}$;

— из $(r-1)$-го уравнения неизвестное x_{r-1} путем подстановки в это уравнение уже найденного неизвестного x_r;

— из i-го уравнения неизвестное x_i при подстановке в него найденных величин x_r , x_{r-1}, ..., x_{i-1};

— и так далее до первого уравнения, из которого при подстановке в него уже найденных величин x_r , x_{r-1}, ..., x_2 находим x_1.

2. Ранг системы уравнений (12.12) меньше n. В этом случае, как и ранее, объявляем неизвестные x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n свободными и формируем правые части уравнений (12.12), оставляя в левых частях слагаемые, содержащие базисные переменные x_1, x_2, ..., x_r:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r & = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r & = b_2^{(1)} - a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}^{(1)}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{rr}^{(r-1)}x_r & = b_r^{(r-1)} - a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}^{(r-1)}x_n. \end{cases}$$

Решение этой системы находится обратным ходом метода; теперь базисные неизвестные зависят от свободных неизвестных, которые могут принимать любые значения, а потому система (12.1) имеет бесчисленное множество решений.

Рассмотрим примеры решения систем линейных уравнений методом Гаусса.

Пример 2. Пример 1 п. 12.2.

Решение. Выпишем расширенную матрицу этой системы; справа в скобках укажем числа, на которые умножается соответствующая строка матрицы для того, чтобы сложить ее с нижними строками. Горизонтальными стрелками показаны переходы к расширенным матрицам эквивалентных систем. Первую строку расширенной матрицы исходной системы умножаем последовательно на (-2) и (-1) и прибавляем ее соответственно ко 2-й и 3-й строкам этой матрицы. После первого шага, состоящего в "обнулении" первого столбца согласно формуле (12.9), получаем (номера шагов показаны перед стрелками перехода)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2),\ (-1) \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ (1) \Rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Второй шаг прямого хода метода Гаусса состоит в операциях с преобразованной расширенной матрицей: прибавляем вторую строку, умноженную на (-3), к 3-й строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-3)\ (2) \Rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Последний вид расширенной матрицы является конечным этапом прямого хода метода (см. формулу (12.13)), после чего приступаем к обратному ходу, т.е. находим неизвестные, начиная с последнего. Полученная расширенная матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ \quad - y \quad\quad = 0, \\ \quad\quad\quad 2z = -1, \end{cases}$$

которая эквивалентна исходной системе. Отсюда последовательно находим: $z = -1/2$, $y = 0$, $x = 1 - 0 - (-1/2) = 3/2$.

Пример 3. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу этой системы, после чего выполним соответствующие шаги прямого хода метода Гаусса. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2),\ (-2),\ (-3) \\ \qquad\qquad\qquad (1) \Rightarrow \end{array}$$

$$(1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -10 & -2 \\ 0 & 7 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-7/5),\ (-7/5) \\ \qquad\qquad (2) \Rightarrow \end{array}$$

$$(2) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 10 & \frac{14}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 10 & \frac{14}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1) \\ \qquad (3) \Rightarrow \end{array}$$

$$(3) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 10 & \frac{14}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Последняя нулевая строка в расширенной матрице, полученной после 3-го шага, появилась из-за того, что в исходной системе четвертое уравнение является суммой 1-го и 3-го уравнений. Система совместная, и после удаления нулевой строки заключительный вид расширенной матрицы соответствует

системе трех уравнений с четырьмя неизвестными (ранг системы меньше числа неизвестных). Полагая x_4 свободной переменной, получаем

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 - 3x_4, \\ 5x_2 - 3x_3 = -2 + 10x_4, \\ -\frac{4}{5}x_3 = \frac{14}{5} - 10x_4. \end{cases}$$

Из этой системы обратным ходом метода Гаусса находим

$$x_3 = -\frac{7}{2} + \frac{25}{2}x_4,\ x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{19}{2}x_4,\ x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4.$$

Данная система уравнений имеет бесчисленное множество решений, поскольку x_4 может принимать любые значения.

12.3. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса

Метод Гаусса является поистине универсальным в решении систем линейных алгебраических уравнений. Мы продемонстрируем применение этого метода при вычислении обратных матриц.

Практически этот наиболее простой способ вычисления обратной матрицы состоит в следующих шагах.

1. К матрице A, по отношению к которой ищется обратная матрица, приписывается справа единичная матрица E.

2. Путем преобразований методом Гаусса над строками расширенной матрицы $(A|E)$ матрица A приводится к виду единичной матрицы.

3. После окончания указанного вычислительного процесса, т.е. когда на месте исходной матрицы A будет сформирована единичная матрица, на месте приписанной справа единичной матрицы E будет находиться обратная матрица A^{-1}. Иными словами, вместо расширенной матрицы $(A|E)$ в итоге получается расширенная матрица $(E|A^{-1})$.

Продемонстрируем эту последовательность действий на несложном примере.

Пример 1. Найти обратную матрицу исходной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выполняем последовательно шаги 1–3:

$$(A|E) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} (-3) \\ \\ \end{matrix} (1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (1) \end{matrix} (2) \Rightarrow$$

$$(2) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-1/2) \end{matrix} (3) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

Схема вычислений по методу Гаусса пояснена здесь теми же обозначениями, что и в п. 12.2, при этом стрелками показано, к какой строке прибавляется измененная строка. Последний этап вычислений, показанный стрелкой (3), состоит в делении последней строки расширенной матрицы на -2. Итак, обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно непосредственно проверить правильность проведенных вычислений по определению обратной матрицы: $AA^{-1} = A^{-1}A$.

12.4. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений

Как известно, уравнения с двумя переменными вида

$$Ax + By + C = 0$$

описывают на координатной плоскости Oxy прямую. Система двух уравнений такого вида означает, что ее решения как точки на координатной плоскости должны принадлежать одновременно двум прямым, соответствующим уравнениям этой системы. Отсюда возможны следующие варианты: а) обе прямые

пересекаются, и тогда система имеет единственное решение; б) прямые параллельны, и система не имеет решения (несовместна); в) прямые совпадают, т.е. ранг системы равен единице, и система имеет бесчисленное множество решений.

Уравнение с тремя переменными вида

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

описывает плоскость в трехмерном пространстве. Решение системы трех уравнений с тремя неизвестными — это точки пространства, принадлежащие одновременно трем плоскостям, которые описываются уравнениями системы. В этом случае возможны следующие варианты: а) три плоскости пересекаются в одной точке, и система имеет единственное решение; б) три плоскости пересекаются по одной прямой — система имеет бесчисленное множество решений (все точки на этой прямой); в) две плоскости совпадают, а третья пересекает их — бесчисленное множество решений (все точки прямой — на пересечении трех плоскостей), ранг системы равен двум; г) все три плоскости совпадают — все точки общей плоскости являются решениями, и ранг системы равен единице; д) хотя бы одна из плоскостей параллельна какой-либо из двух других — система несовместна; е) плоскости пересекаются попарно по параллельным прямым — система несовместна. В последних двух случаях несовместность системы уравнений обусловлена тем, что нет таких точек трехмерного пространства, которые принадлежали бы одновременно всем трем плоскостям.

В случае системы уравнений с n неизвестными каждое уравнение вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - b_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

можно интерпретировать как гиперплоскость в координатном пространстве A^n. Решение системы (12.1) — это множество точек пространства A^n, которые принадлежат одновременно всем m гиперплоскостям, соответствующим уравнениям этой системы.

12.5. Однородные системы линейных уравнений

Определение 1. Система линейных уравнений называется однородной, если во всех ее уравнениях свободные члены равны нулю.

В общем случае однородная система (или система однородных уравнений) имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0. \end{cases} \tag{12.14}$$

Однородная система уравнений всегда совместна. Действительно, набор значений неизвестных $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяет всем уравнениям системы. Это решение однородной системы называется нулевым или *тривиальным.*

Решение системы однородных уравнений

Вопрос о существовании ненулевого решения однородной системы линейных уравнений (12.14) разрешает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 12.3. *Однородная система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг этой системы меньше числа ее неизвестных.*

Из этой теоремы вытекают два важных следствия.

Следствие 1. *Если число уравнений однородной системы меньше числа ее неизвестных, то эта система имеет ненулевое решение.*

Следствие 2. *Если в однородной системе число уравнений равно числу неизвестных, то она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю.*

Фундаментальная система решений

Решения однородной системы обладают следующими свойствами. Если вектор $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ является решением

системы (12.14), то и для любого числа k вектор $k\bar{\alpha} = (k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n)$ будет решением этой системы. Если решением системы (12.14) является вектор $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, то сумма $\bar{\alpha} + \bar{\gamma}$ также будет решением этой системы. Отсюда следует, что *любая линейная комбинация решений однородной системы также является решением этой системы.*

Как мы знаем из п. 9.2, всякая система n-мерных векторов, состоящая более чем из n векторов, является линейно зависимой. Таким образом, из множества векторов-решений однородной системы (12.14) можно выбрать базис, т.е. любой вектор-решение данной системы будет линейной комбинацией векторов этого базиса. Любой такой базис называется *фундаментальной системой решений* однородной системы линейных уравнений. Справедлива следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

ТЕОРЕМА 12.4. *Если ранг r системы однородных уравнений* (12.14) *меньше числа неизвестных n, то всякая фундаментальная система решений системы* (12.14) *состоит из $n - r$ решений.*

Укажем теперь способ нахождения фундаментальной системы решений (ФСР). Пусть система однородных уравнений (12.14) имеет ранг $r < n$. Тогда, как следует из правил Крамера, базисные неизвестные этой системы x_1, x_2, ..., x_r линейно выражаются через свободные переменные x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11}x_{r+1} + \beta_{12}x_{r+2} + \ldots + \beta_{1,n-r}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= \beta_{r1}x_{r+1} + \beta_{r2}x_{r+2} + \ldots + \beta_{r,n-r}x_n. \end{aligned} \tag{12.15}$$

Выделим частные решения однородной системы (12.14) по следующему принципу. Для нахождения первого вектора-решения $\bar{x_1}$ положим $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = x_{r+3} = \ldots = x_n = 0$. Затем находим второе решение $\bar{x_2}$: принимаем $x_{r+2} = 1$, а остальные $r-1$ свободных переменных положим нулями. Иными словами, мы последовательно присваиваем каждой свободной переменной единичное значение, положив остальные нулями. Таким образом, фундаментальная система решений в векторной форме с учетом первых r базисных переменных (12.15) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\bar{x}_1 = (\beta_{11}, \beta_{21}, \ldots, \beta_{r1}, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\bar{x}_2 = (\beta_{12}, \beta_{22}, \ldots, \beta_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\bar{x}_{n-r} = (\beta_{1,n-r}, \beta_{2,n-r}, \ldots, \beta_{r,n-r}, 0, \ldots, 0, 1).
\end{aligned}
\tag{12.16}
$$

ФСР (12.16) является одним из фундаментальных наборов решений однородной системы (12.14).

Пример 1. Найти решение и ФСР системы однородных уравнений

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 = 0,\\
2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0,\\
-2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0.
\end{cases}
$$

Решение. Будем решать эту систему методом Гаусса. Поскольку число уравнений системы меньше числа неизвестных, считаем x_1, x_2, x_3 базисными неизвестными, а x_4, x_5, x_6 — свободными переменными. Составим расширенную матрицу системы и выполним действия, составляющие прямой ход метода:

$$
\left(\begin{array}{rrr|l}
1 & -1 & 1 & x_4 - x_5 + 2x_6\\
2 & -3 & -2 & -x_4 + x_5\\
-2 & 3 & 3 & -x_4 - x_5 + x_6
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
(-2),\ (2)\\
\\
(1) \Rightarrow
\end{array}
$$

$$
(1) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|l}
1 & -1 & 1 & x_4 - x_5 + 2x_6\\
0 & -1 & -4 & -3x_4 + 3x_5 - 4x_6\\
0 & 1 & 5 & x_4 - 3x_5 + 5x_6
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
(1)\ (2) \Rightarrow\\
\\
\end{array}
$$

$$
(2) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|l}
1 & -1 & 1 & x_4 - x_5 + 2x_6\\
0 & -1 & -4 & -3x_4 + 3x_5 - 4x_6\\
0 & 0 & 1 & -2x_4 + x_6
\end{array}\right).
$$

Преобразованная расширенная матрица соответствует системе уравнений, которая эквивалентна исходной однородной системе:

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 + x_3 = x_4 - x_5 + 2x_6,\\
-x_2 - 4x_3 = -3x_4 + 3x_5 - 4x_6,\\
x_3 = -2x_4 + x_6.
\end{cases}
$$

Обратный ход метода Гаусса дает значения базисных неизвестных, выраженные через свободные переменные:

$$x_3 = -2x_4 + x_6,\ x_2 = 11x_4 - 3x_5,\ x_1 = 14x_4 - 4x_5 + x_6.$$

Поскольку ранг однородной системы равен трем, то ФСР для нее состоит из трех линейно независимых векторов. По формулам (12.16) при $n = 6$ и $r = 3$, беря последовательно для свободных переменных тройки чисел $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$, получаем набор фундаментальных решений:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= (14, 11, -2, 1, 0, 0), \\ \bar{x}_2 &= (-4, -3, 0, 0, 1, 0), \\ \bar{x}_3 &= (1, 0, 1, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

В п. 10.1 было введено определение собственного значения и собственного вектора матрицы. Пусть $\bar{x}$ — собственный вектор квадратной матрицы A порядка n. Тогда имеет место матричное уравнение

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x},$$

или

$$(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}, \tag{12.17}$$

где λ — собственное значение матрицы A, а E и $\bar{0}$ — соответственно единичная матрица и нулевой вектор-столбец. Уравнение (12.17) эквивалентно системе однородных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0. \end{cases} \tag{12.18}$$

В уравнениях (12.18) a_{ij} — элементы матрицы A, x_j — координаты собственного вектора x. Поскольку собственный вектор не является нулевым, то однородная система (12.18) должна иметь ненулевое решение, т.е. в силу следствия 2 (см. выше)

определитель этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (12.19)$$

Определитель системы однородных уравнений (12.18) называется *характеристическим многочленом*, а уравнение (12.19) — *характеристическим уравнением* матрицы A.

Уравнение (12.19) имеет степень n относительно неизвестной λ. Его корни являются собственными числами матрицы A. Определив набор этих чисел, для каждого из них можно найти соответствующий собственный вектор как решение однородной системы (12.18).

Пример 2. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение для этой матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, раскрывая определитель, получаем

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0.$$

Корни этого уравнения суть $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$. Для нахождения собственных векторов подставим найденные собственные значения в систему однородных уравнений (12.18) при $n = 2$ с соответствующими элементами заданной матрицы A. Собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 2$, является решением системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

По сути дела, это одно уравнение, поскольку определитель системы равен нулю. Полагая $x_2 = b$ свободной переменной, получаем первый собственный вектор $\bar{x}_1 = (-2b, b) = b(-2, 1)$.

Подстановка второго собственного значения $\lambda_2 = 5$ приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

которая через свободную переменную $x_2 = c$ определяет второй собственный вектор матрицы A: $\bar{x}_2 = (c, c) = c(1, 1)$.

Поскольку b и c — произвольные числа, то одному собственному значению может соответствовать несколько собственных векторов разной длины. Например, собственные векторы, соответствующие фундаментальным решениям однородных систем (в данном случае их будет по одному на каждое собственное значение), имеют вид $\bar{x}_1 = (-2, 1)$, $\bar{x}_2 = (1, 1)$.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить методом Крамера системы линейных уравнений.

12.1. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 5x_1 + 4x_2 = 14. \end{cases}$

12.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$

12.3. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -9, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса.

12.4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

12.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

12.6. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

12.7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$

12.8. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

12.9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

12.10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

Решить методом обратной матрицы системы уравнений, предварительно вычислив методом Гаусса обратную матрицу.

12.11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 8. \end{cases}$

12.12. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

12.13. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_1 + x_3 = -2. \end{cases}$

Найти фундаментальные системы решений однородных систем.

12.14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

12.15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

12.16. $x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0.$

12.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

12.18. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

Найти собственные векторы и собственные значения матриц.

12.19. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

12.20. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Глава 13

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ЭКОНОМИКЕ

13.1. Использование алгебры матриц

Использование элементов алгебры матриц является одним из основных методов решения многих экономических задач. Особенно этот вопрос стал актуальным при разработке и использовании баз данных: при работе с ними почти вся информация хранится и обрабатывается в матричной форме.

Матричные вычисления

Рассмотрим типичные задачи, использующие понятие вектора и его свойства.

1. Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели которых приведены в табл. 13.1.

Требуется определить следующие ежесуточные показатели: расход сырья S, затраты рабочего времени T и стоимость P выпускаемой продуции предприятия.

Решение. По данным табл. 13.1 составим четыре вектора, характеризующие весь производственный цикл:

$\bar{q} = (20, 50, 30, 40)$ — вектор ассортимента,

$\bar{s} = (5, 2, 7, 4)$ — вектор расхода сырья,

Таблица 13.1

Вид изделия, № п/п	Количество изделий, ед.	Расход сырья, кг	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ден. ед./изд.
1	20	5	10	30
2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	40

$\bar{t} = (10, 5, 15, 8)$ — вектор затраты рабочего времени,
$\bar{p} = (30, 15, 45, 20)$ — ценовой вектор.

Тогда искомые величины будут представлять собой соответствующие скалярные произведения вектора ассортимента $\bar{q}$ на три других вектора, т.е.

$$S = \bar{q}\bar{s} = 100 + 100 + 210 + 160 = 570 \text{ кг},$$

$$T = \bar{q}\bar{t} = 1220 \text{ ч}, \quad P = \bar{q}\bar{p} = 3500 \text{ ден. ед.}$$

2. Предприятие выпускает 4 вида изделий с использованием 4-х видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы матрицы A:

$$A = \begin{array}{c} \text{вид сырья} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{вид} \\ \text{изделия} \\ \downarrow \end{array}$$

Требуется найти затраты сырья на каждый вид изделия при заданном плане их выпуска: соответственно 60, 50, 35 и 40 ед.

Решение. Составим вектор-план выпуска продукции

$$\bar{q} = (60, 50, 35, 40).$$

Тогда решение задачи дается вектором затрат, координаты которого и являются величинами затрат сырья по каждому его виду; этот вектор затрат вычисляется как произведение

вектора $\bar{q}$ на матрицу A:

$$\bar{q}A = (60, 50, 35, 40)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 120 & + & 50 & + & 245 & + & 160 \\ 180 & + & 100 & + & 70 & + & 200 \\ 240 & + & 250 & + & 105 & + & 240 \\ 300 & + & 300 & + & 70 & + & 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 575 \\ 550 \\ 835 \\ 990 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть затраты 4-х видов сырья на выпуск 4-х видов продукции характеризуются матрицей A, приведенной в предыдущей задаче. Требуется найти: а) общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозку; б) общие затраты на сырье и его транспортировку при условии заданного вектора-плана предыдущей задачи, если известны себестоимости каждого вида сырья и его доставки (соответственно 4, 6, 5, 8 и 2, 1, 3, 2 ден. ед.).

Решение. Составим матрицу себестоимостей сырья и его доставки (соответственно 1-я и 2-я строки):

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда ответ на первый вопрос задачи дается в виде произведения матрицы A на транспонированную матрицу C^T:

$$AC^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \\ 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 & 29 \\ 89 & 31 \\ 71 & 29 \\ 140 & 47 \end{pmatrix}.$$

Суммарные затраты на сырье и его доставку (в денежных единицах) при векторе-плане выпуска продукции $\bar{q}$=$(60, 50, 35, 40)$ определяются произведением вектора $\bar{q}$ на матрицу AC^T:

$$\bar{q}AC^T = (60, 50, 35, 40)\begin{pmatrix} 86 & 29 \\ 89 & 31 \\ 71 & 29 \\ 140 & 47 \end{pmatrix} = (17\,695, 6185).$$

4. В табл. 13.2 приведены данные о дневной производительности 5 предприятий, выпускающих 4 вида продукции с потреблением 3-х видов сырья, а также продолжительность работы каждого предприятия в году и цена каждого вида сырья.

Таблица 13.2

Вид изделия, № п/п	Производительность предприятий, изд./день					Затраты видов сырья изделия, ед. веса/изд.		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	4	5	3	6	7	2	3	4
2	0	2	4	3	0	3	5	6
3	8	15	0	4	6	4	4	5
4	3	10	7	5	4	5	8	6
	Кол-во рабочих дней в году					Цена видов сырья		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	200	150	170	120	140	40	50	60

Требуется определить:

1) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий;

2) годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья;

3) годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска продукции указанных видов и количеств.

Решение. Нужно составить матрицы, характеризующие весь интересующий нас экономический спектр производства, а затем при помощи соответствующих операций над ними получить решение данной задачи. Прежде всего приведем матрицу производительности предприятий по всем видам продукции:

$$A = \begin{array}{c} \text{производительность} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 15 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{вид} \\ \text{изделия} \\ \downarrow \end{array}$$

Каждый столбец этой матрицы соответствует дневной производительности отдельного предприятия по каждому виду продукции. Следовательно, годовая производительность j-го предприятия по каждому виду продукции получается умножением j-го столбца матрицы A на количество рабочих дней в году для этого предприятия ($j = 1, 2, 3, 4, 5$). Таким образом, годовая производительность каждого предприятия по каждому из изделий описывается матрицей

$$A_{\text{год}} = \begin{pmatrix} 800 & 750 & 510 & 720 & 980 \\ 0 & 300 & 680 & 360 & 0 \\ 1600 & 2250 & 0 & 480 & 840 \\ 600 & 1500 & 1190 & 600 & 560 \end{pmatrix}.$$

Матрица затрат сырья на единицу изделия (эти показатели по условию одинаковы для всех предприятий) имеет вид

$$\begin{array}{cccc} & \text{вид изделия} & & \\ & \underline{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4} & & \\ B = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{l} \text{вид} \\ \text{сырья} \\ \downarrow \end{array} \end{array}$$

Дневной расход по типам сырья на предприятиях описывается произведением матрицы B на матрицу A:

$$BA = \begin{pmatrix} 55 & 126 & 53 & 62 & 58 \\ 68 & 165 & 85 & 89 & 77 \\ 74 & 167 & 78 & 92 & 82 \end{pmatrix},$$

где i-я строка соответствует номеру типа сырья, а j-й столбец — номеру предприятия согласно табл. 13.2 ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4, 5$). Ответ на второй вопрос задачи получим по аналогии с матрицей $A_{\text{год}}$ умножением столбцов матрицы BA на соответствующие количества рабочих дней в году для предприятий — это годовая потребность каждого предприятия в каждом виде сырья:

$$BA_{\text{год}} = \begin{pmatrix} 11000 & 18900 & 9010 & 7440 & 8120 \\ 13600 & 24750 & 14450 & 10680 & 10780 \\ 14800 & 25050 & 13260 & 11040 & 11480 \end{pmatrix}.$$

Введем вектор стоимости сырья

$$\bar{p} = (40, 50, 60).$$

Тогда стоимость общего годового запаса сырья для каждого предприятия получается умножением вектора $\bar{p}$ на матрицу $BA_{\text{год}}$:

$$\bar{P} = \bar{p}BA_{\text{год}} =$$
$$= (2\,008\,000, 3\,496\,500, 1\,878\,500, 1\,494\,000, 1\,552\,600).$$

Следовательно, суммы кредитования предприятий для закупки сырья определяются соответствующими компонентами вектора $\bar{P}$.

5. Отрасль состоит из n предприятий, выпускающих по одному виду продуции каждое; обозначим объем продукции i-го предприятия через x_i. Каждое из предприятий отрасли для обеспечения своего производства потребляет часть продукции, выпускаемой им самим и другими предприятиями. Например, в отрасли электротехнического оборудования часть продукции предприятий, выпускающих электродвигатели, силовые кабели, электрокары и т.д., употребляется практически всей отраслью. Пусть a_{ij} — доля продукции i-го предприятия, потребляемая j-м предприятием для обеспечения выпуска своей продукции объема x_j. Возникает естественный вопрос о величине y_i — количестве продукции i-го предприятия, предназначенной для реализации вне данной отрасли (объем конечного продукта). Эта величина легко может быть подсчитана по формуле

$$y_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Введем в рассмотрение матрицу порядка n, описывающую внутреннее потребление отрасли:

$$A = \|a_{ij}\|; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда вектор конечного продукта является решением матричного уравнения

$$\bar{x} - A\bar{x} = \bar{y},$$

или с использованием единичной матрицы E получаем

$$(E - A)\bar{x} = \bar{y}. \tag{13.1}$$

Рассмотрим конкретный пример при $n = 3$. Пусть вектор выпуска продукции отрасли и матрица внутреннего потребления имеют соответственно вид

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (13.1) и правило сложения матриц, получаем вектор объемов конечного продукта, предназначенного для реализации вне отрасли, состоящей из 3-х предприятий:

$$\bar{y} = (E - A)\bar{x} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Использование систем линейных уравнений

Рассмотрим задачи, приводящие к составлению и решению систем линейных алгебраических уравнений.

6. Прогноз выпуска продукции по запасам сырья. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Необходимые характеристики производства указаны в табл. 13.3. Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья. Задачи такого рода типичны для прогнозов и оценок функционирования предприятий, экспертных оценок проектов освоения месторождений полезных ископаемых, а также для планирования микроэкономики предприятий.

Таблица 13.3

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции, вес. ед./изд.			Запас сырья, вес. ед.
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Решение. Обозначим неизвестные объемы выпуска продукции через x_1, x_2 и x_3. Тогда при условии полного расхода

запасов для каждого вида сырья можно записать балансовые соотношения, которые образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений любым способом, находим, что при заданных запасах сырья объемы выпуска продукции составят по каждому виду соответственно (в условных единицах)

$$x_1 = 150,\ x_2 = 250,\ x_3 = 100.$$

7. Общая постановка задачи прогноза выпуска продукции. Пусть

$$C = \|c_{ij}\|; \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

— матрица затрат сырья m видов при выпуске продукции n видов. Тогда при известных объемах запаса каждого вида сырья, которые образуют соответствующий вектор

$$\bar{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_m),$$

вектор-план $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выпуска продукции определяется из решения системы m уравнений с n неизвестными

$$C\bar{x}^T = \bar{q}^T,$$

где индекс T означает транспонирование вектора-строки в вектор-столбец.

13.2. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Макроэкономика функционирования многоотраслевого хозяйства требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль, с одной стороны, является призводителем, а с другой — потребителем продукции, выпускаемой другими отраслями. Возникает довольно непростая задача расчета связи

между отраслями через выпуск и потребление продукции разного вида. Впервые эта проблема была сформулирована в виде *математической модели* в 1936 г. в трудах известного американского экономиста В.В. Леонтьева, который попытался проанализировать причины экономической депрессии США 1929–1932 гг. Эта модель основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа.

Балансовые соотношения

Для простоты будем полагать, что производственная сфера хозяйства представляет собой n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт. Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период времени; в ряде случаев такой единицей служит год.

Введем следующие обозначения:

— x_i — общий объем продукции i-й отрасли (ее валовой выпуск);

— x_{ij} — объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью при производстве объема продукции x_j;

— y_i — объем продукции i-й отрасли, предназначенный для реализации (потребления) в непроизводственной сфере, или так называемый продукт конечного потребления. К нему относятся личное потребление граждан, удовлетворение общественных потребностей, содержание государственных институтов и т.д.

Балансовый принцип связи различных отраслей промышленности состоит в том, что валовой выпуск i-й отрасли должен быть равным сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах. В самой простой форме (гипотеза линейности, или простого сложения) балансовые соотношения имеют вид

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i,\ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (13.2)$$

Уравнения (13.2) называются *соотношениями баланса.*

Поскольку продукция разных отраслей имеет разные измерения, будем в дальнейшем иметь в виду стоимостный баланс.

Линейная модель многоотраслевой экономики

В. В. Леонтьевым на основании анализа экономики США в период перед Второй мировой войной был установлен важный факт: в течение длительного времени величины $a_{ij} = x_{ij}/x_j$ меняются очень слабо и могут рассматриваться как постоянные числа. Это явление становится понятным в свете того, что технология производства остается на одном и том же уровне довольно длительное время, и, следовательно, объем потребления j-й отраслью продукции i-й отрасли при производстве своей продукции объема x_j есть технологическая константа.

В силу указанного факта можно сделать следующее допущение: для производства продукции j-й отрасли объема x_j нужно использовать продукцию i-й отрасли объема $a_{ij}x_i$, где a_{ij} — постоянное число. При таком допущении технология производства принимается *линейной*, а само это допущение называется *гипотезой линейности*. При этом числа a_{ij} называются *коэффициентами прямых затрат*. Согласно гипотезе линейности, имеем

$$x_{ij} = a_{ij}x_j; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{13.3}$$

Тогда уравнения (13.2) можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n. \end{cases} \tag{13.4}$$

Введем в рассмотрение векторы-столбцы объемов произведенной продукции (вектор валового выпуска), объемов продукции конечного потребления (вектор конечного потребления) и матрицу коэффициентов прямых затрат:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{13.5}$$

Тогда система уравнений (13.4) в матричной форме имеет вид

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y}. \qquad (13.6)$$

Обычно это соотношение называют *уравнением линейного межотраслевого баланса.* Вместе с описанием матричного представления (13.5) это уравнение носит название *модели Леонтьева.*

Уравнение межотраслевого баланса можно использовать в двух целях. В первом, наиболее простом случае, когда известен вектор валового выпуска $\bar{x}$, требуется рассчитать вектор конечного потребления $\bar{y}$ — подобная задача была рассмотрена выше (п. 13.1, пример 5).

Во втором случае уравнение межотраслевого баланса используется для целей планирования со следующей формулировкой задачи: для периода времени T (например, год) известен вектор конечного потребления $\bar{y}$ и требуется определить вектор $\bar{x}$ валового выпуска. Здесь необходимо решать систему линейных уравнений (13.6) с известной матрицей A и заданным вектором $\bar{y}$. В дальнейшем мы будем иметь дело именно с такой задачей.

Между тем система (13.6) имеет ряд особенностей, вытекающих из прикладного характера данной задачи; прежде всего все элементы матрицы A и векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ должны быть неотрицательными.

Продуктивные модели Леонтьева

Матрица A, все элементы которой неотрицательны, называется продуктивной, если для любого вектора $\bar{y}$ с неотрицательными компонентами существует решение уравнения (13.6) — вектор $\bar{x}$, все элементы которого неотрицательны. В таком случае и модель Леонтьева называется продуктивной.

Для уравнения типа (13.6) разработана соответствующая математическая теория исследования решения и его особенностей. Укажем некоторые ее основные моменты. Приведем без доказательства важную теорему, позволяющую устанавливать продуктивность матрицы.

ТЕОРЕМА 13.1. *Если для матрицы A с неотрицательными элементами и некоторого вектора $\bar{y}$ с неотрицательными*

компонентами уравнение (13.6) *имеет решение* $\bar{x}$ *с неотрицательными компонентами, то матрица* A *продуктивна.*

Иными словами, достаточно установить наличие положительного решения системы (13.6) хотя бы для одного положительного вектора $\bar{y}$, чтобы матрица A была продуктивной. Перепишем систему (13.6) с использованием единичной матрицы E в виде

$$(E - A)\bar{x} = \bar{y}. \tag{13.7}$$

Если существует обратная матрица $(E - A)^{-1}$, то существует и единственное решение уравнения (13.7):

$$\bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{y}. \tag{13.8}$$

Матрица $(E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат.*

Существует несколько критериев продуктивности матрицы A. Приведем два из них.

Первый критерий продуктивности. *Матрица* A *продуктивна тогда и только тогда, когда матрица* $(E - A)^{-1}$ *существует и ее элементы неотрицательны.*

Второй критерий продуктивности. *Матрица* A *с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1,$$

причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

Рассмотрим применение модели Леонтьева на несложных примерах.

Пример 1. В табл. 13.4 приведены данные по балансу за некоторый период времени между пятью отраслями промышленности. Найти векторы конечного потребления и валового выпуска, а также матрицу коэффициентов прямых затрат и определить, является ли она продуктивной в соответствии с приведенными выше критериями.

Решение. В данной таблице приведены составляющие баланса в соответствии с соотношениями (13.2): x_{ij} — первые

Таблица 13.4

№ п/п	Отрасль	Потребление					Конечный продукт	Валовой выпуск, ден. ед.
		1	2	3	4	5		
1	Станкостроение	15	12	24	23	16	10	100
2	Энергетика	10	3	35	15	7	30	100
3	Машиностроение	10	5	10	10	10	5	50
4	Автомобильная промышленность	10	5	10	5	5	15	50
5	Добыча и переработка углеводородов	7	15	15	10	3	50	100

пять столбцов, y_i — шестой столбец, x_i — последний столбец ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$). Согласно формулам (13.3) и (13.4), имеем

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 5 \\ 15 \\ 50 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}48 & 0{,}46 & 0{,}16 \\ 0{,}10 & 0{,}03 & 0{,}70 & 0{,}30 & 0{,}07 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}07 & 0{,}15 & 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}03 \end{pmatrix}.$$

Все элементы матрицы A положительны, однако нетрудно видеть, что их сумма в третьем и четвертом столбцах больше единицы. Следовательно, условия второго критерия продуктивности не соблюдены и матрица A не является продуктивной. Экономическая причина этой непродуктивности заключается в том, что внутреннее потребление отраслей 3 и 4 слишком велико в соотношении с их валовыми выпусками.

Пример 2. Табл. 13.5 содержит данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени. Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить соответственно до 60, 70 и 30 усл. ден. ед.

Таблица 13.5

№ п/п	Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2	3		
1	Добыча и переработка углеводородов	5	35	20	40	100
2	Энергетика	10	10	20	60	100
3	Машиностроение	20	10	10	10	50

Решение. Выпишем векторы валового выпуска и конечного потребления и матрицу коэффициентов прямых затрат. Согласно формулам (13.3) и (13.4), имеем

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}40 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}20 \end{pmatrix}.$$

Матрица A удовлетворяет обоим критериям продуктивности. В случае заданного увеличения конечного потребления новый вектор конечного продукта будет иметь вид

$$\bar{y}_* = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}. \tag{13.9}$$

Требуется найти новый вектор валового выпуска $\bar{x}_*$, удовлетворяющий соотношениям баланса в предположении, что матрица A не изменяется. В таком случае компоненты x_1, x_2, x_3 неизвестного вектора $\bar{x}_*$ находятся из системы уравнений, которая согласно (13.4) имеет в данном случае вид

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}05x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}4x_3 + 60, \\ x_2 = 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}4x_3 + 70, \\ x_3 = 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 + 30. \end{cases}$$

В матричной форме эта система выглядит следующим образом:

$$\bar{x}_* = A\bar{x}_* + \bar{y}_*, \tag{13.10}$$

или

$$(E - A)\bar{x}_* = \bar{y}_*, \tag{13.11}$$

где матрица $(E - A)$ имеет вид

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}35 & -0{,}40 \\ -0{,}10 & 0{,}90 & -0{,}40 \\ -0{,}20 & -0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix}.$$

Решение системы линейных уравнений (13.11) при заданном векторе правой части (13.9) (например, методом Гаусса) дает новый вектор $\bar{x}_*$ как решение системы уравнений баланса (13.10):

$$\bar{x}_* = \begin{pmatrix} 152{,}6 \\ 135{,}8 \\ 92{,}5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того чтобы обеспечить заданное увеличение компонент вектора конечного продукта, необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов на 52,2%, уровень энергетики — на 35,8% и выпуск продукции машиностроения — на 85% по сравнению с исходными величинами, указанными в табл. 13.5.

13.3. Линейная модель торговли

Одним из примеров экономического процесса, приводящего к понятию собственного числа и собственного вектора матрицы, является процесс взаимных закупок товаров. Будем полагать, что бюджеты n стран, которые мы обозначим соответственно x_1, x_2, ... , x_n, расходуются на покупку товаров. Мы будем рассматривать *линейную модель обмена*, или, как ее еще называют, *модель международной торговли*.

Пусть a_{ij} — доля бюджета x_j, которую j-я страна тратит на закупку товаров у i-й страны. Введем матрицу коэффициентов a_{ij}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{13.12}$$

Тогда если весь бюджет расходуется только на закупки внутри страны и вне ее (можно это трактовать как торговый бюджет), то справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1. \tag{13.13}$$

Матрица (13.12) со свойством (13.13), в силу которого сумма элементов ее любого столбца равна единице, называется *структурной матрицей торговли.* Для i-й страны общая выручка от внутренней и внешней торговли выражается формулой

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

Условие сбалансированной (бездефицитной) торговли формулируется естественным образом: для каждой страны ее бюджет должен быть не больше выручки от торговли, т.е. $P_i \geq x_i$, или

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{13.14}$$

Докажем, что в условиях (13.14) не может быть знака неравенства. Действительно, сложим все эти неравенства при i от 1 до n. Группируя слагаемые с величинами бюджетов x_j, получаем

$$x_1(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{n2}) + \ldots$$
$$\ldots + x_n(a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{nn}) \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Нетрудно видеть, что в скобках стоят суммы элементов матрицы A по ее столбцам от первого до последнего, которые равны единице по условию (13.13). Стало быть, мы получили неравенство

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

откуда возможен только знак равенства.

Таким образом, условия (13.14) принимают вид равенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= x_n. \end{cases} \tag{13.15}$$

Введем вектор бюджетов $\bar{x}$, каждая компонента которого характеризует бюджет соответствующей страны; тогда систему уравнений (13.15) можно записать в матричной форме

$$A\bar{x} = \bar{x}. \tag{13.16}$$

Это уравнение означает, что собственный вектор структурной матрицы A, отвечающий ее собственному значению $\lambda = 1$, состоит из бюджетов стран бездефицитной международной торговли.

Перепишем уравнение (13.16) в виде, позволяющем определить $\bar{x}$:

$$(A - E)\bar{x} = \bar{0}. \tag{13.17}$$

Пример. Структурная матрица торговли четырех стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов задана:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270 \text{ (усл. ден. ед.)}.$$

Решение. Необходимо найти собственный вектор $\bar{x}$, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$ заданной структурной матрицы A, т.е. решить уравнение (13.17), которое в нашем случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & -0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & -0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг этой системы равен трем, то одна из неизвестных является свободной переменной и остальные выражаются

через нее. Решая систему методом Гаусса, находим компоненты собственного вектора $\bar{x}$:

$$x_1 = \frac{140}{121}c,\ x_2 = \frac{146}{121}c,\ x_3 = \frac{20}{11}c,\ x_4 = c.$$

Подставив найденные значения в заданную сумму бюджетов, найдем величину c: $c = 1210$, откуда окончательно получаем искомые величины бюджетов стран при бездефицитной торговле (в условных денежных единицах):

$$x_1 = 1400,\ x_2 = 1460,\ x_3 = 2200,\ x_4 = 1210.$$

УПРАЖНЕНИЯ

13.1. По данным табл. 13.1 составить новую таблицу производственно-экономических показателей по следующим условиям:

— количество изделий всех видов увеличивается на 20%,

— норма времени изготовления по всем изделиям уменьшается на 20%,

— цена на все виды изделий уменьшается на 10%.

Найти ежесуточные показатели, указанные в задаче 1 п. 13.1, а также их процентные изменения.

13.2. По данным табл. 13.2 составить новую таблицу по следующим условиям:

— дневная производительность всех предприятий увеличивается на 100%,

— число рабочих дней в году для 1-го предприятия увеличивается на 50%, а для остальных — на 40%,

— цены на виды сырья уменьшаются соответственно на 10, 20 и 30%.

Определить суммы кредитования предприятий и их соответствующие процентные изменения.

13.3. Отрасль состоит из 4-х предприятий; вектор выпуска продукции и матрица внутреннего потребления имеют вид

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}24 & 0{,}25 \\ 0{,}20 & 0{,}15 & 0{,}36 & 0{,}17 \\ 0{,}15 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}15 \\ 0{,}30 & 0{,}15 & 0{,}20 & 0{,}15 \end{pmatrix}.$$

Найти вектор объемов конечного продукта, предназначенного для реализации вне отрасли.

13.4. Предприятие выпускает три вида продукции с использованием трех видов сырья, характеристики производства указаны в следующей таблице:

Вид сырья	**Расход сырья по видам продукции, вес. ед./изд.**			**Запас сырья, вес. ед.**
	1	**2**	**3**	
1	5	12	7	2350
2	10	6	8	2060
3	9	11	4	2270

Найти объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

13.5. В условиях примера 2 п. 13.2 определить прирост объемов валовых выпусков по каждой отрасли (в процентах), если конечное потребление увеличить по отраслям соответственно на 30, 10 и 50%. Решить задачу методом обратной матрицы и методом Гаусса.

13.6. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты первой и второй стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что бюджет третьей страны равен 1100 усл. ден. ед.

Часть 3
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава 14
ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

События, происходящие в окружающем нас мире, можно разделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные. *Достоверным* относительно комплекса условий S называется событие, которое обязательно произойдет при осуществлении этого комплекса условий. Например, если гладкий желоб с лежащим внутри него тяжелым шариком наклонить, то шарик обязательно покатится по желобу в сторону уклона. *Невозможным* называется событие, которое заведомо не произойдет при осуществлении комлекса условий S. Например, из герметически изолированного сосуда вода не может вылиться. *Случайным* относительно комплекса условий S называется событие, которое при осуществлении указанного комплекса условий может либо произойти, либо не произойти. Например, если вы уронили фарфоровую чашку на пол, то она может как разбиться, так и остаться неповрежденной.

Теория вероятностей имеет дело со случайными событиями. Однако она не может предсказать, произойдет единичное событие или нет. Теория вероятностей изучает *вероятностные закономерности массовых однородных случайных событий.* Ее методы получили широкое распространение в различных областях естествознания и в прикладных проблемах техники. Тео-

рия вероятностей легла в основу теории массового обслуживания и теории надежности. В последние годы аппарат теории вероятностей активно используется в экономике.

14.1. Основные понятия теории вероятностей

Некоторые формулы комбинаторики

Пусть задано конечное множество элементов некоторой природы. Из них можно составлять определенные комбинации, количества которых изучает комбинаторика. Некоторые ее формулы используются в теории вероятностей; приведем их.

Комбинации, состоящие из одной и той же совокупности n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения, называются *перестановками*. Число всех возможных перестановок определяется произведением чисел от единицы до n:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Пример 1. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4 с использованием всех указанных цифр в каждом числе?

Решение. Искомое число равно $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Комбинации по m элементов, составленные из n различных элементов ($m \leq n$), отличающиеся друг от друга либо элементами, либо их порядком, называются *размещениями*. Число всевозможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Пример 2. Сколько трехзначных чисел можно составить из семи различных цифр при отсутствии среди них нуля?

Решение. Искомое количество чисел

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

Комбинации, содержащие по m элементов каждая, составленные из n различных элементов ($m \leq n$) и различающиеся хотя

бы одним элементом, называются *сочетаниями*. Число сочетаний дается формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Можно показать, что справедливы формулы

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad A_n^m = P_m C_n^m. \tag{14.1}$$

В частности, первую из формул удобно использовать в расчетах, когда $m > n/2$.

Напомним формулу бинома Ньютона, в которой участвуют коэффициенты (14.1):

$$\begin{aligned}(p+q)^n = C_n^n p^n q^0 + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + \ldots + \\ + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^0 p^0 q^n.\end{aligned} \tag{14.2}$$

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать а) по две карты, б) по 32 карты из колоды, содержащей 36 игральных карт?

Решение. Искомое число способов:

$$\text{а) } C_{36}^2 = \frac{36!}{2!\,34!} = \frac{35 \cdot 36}{2} = 630, \text{б) } C_{36}^{32} = C_{36}^4 = \frac{36!}{4!\,32!} = 58\,905.$$

Виды случайных событий

Выше было введено определение случайного события. Обычно в теории вероятностей вместо "совокупности условий" употребляют термин "испытание", и тогда событие трактуется как результат испытания. Например, стрельба по мишени: выстрел — это испытание, попадание в мишень — это событие. Другой пример: подбрасывание монеты вверх — это испытание, выпадение орла (или решки) — это событие.

Определение 1. События называют *несовместными*, если в одном и том же испытании появление одного из них исключает появление других. Например, выпадение орла при подбрасывании монеты исключает появление в этом же испытании решки, и наоборот.

Определение 2. Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появление хотя бы одного из них является достоверным событием. Например, при произведении выстрела по мишени (испытание) обязательно будет либо попадание, либо промах; эти два события образуют полную группу.

Следствие. *Если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.*

Этот частный случай будет использован далее.

Классическое определение вероятности

Назовем каждый из возможных результатов испытания *элементарным событием* или *исходом*. Те элементарные исходы, которые интересуют нас, называются *благоприятными* событиями.

Определение 3. Отношение числа благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу, называется *вероятностью события* A.

Вероятность события A обозначается $P(A)$. Понятие вероятности является одним из основных в теории вероятностей. Данное выше определение является классическим. Из него вытекают некоторые свойства.

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число:

$$0 < P(A) < 1.$$

Следовательно, вероятность любого события удовлетворяет неравенству

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Отметим, что современные курсы теории вероятностей основаны на теоретико-множественном подходе, в котором элементарные события являются точками пространства элементарных событий Ω; при этом событие A отождествляется

с подмножеством элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, $A \subset \Omega$.

Приведем примеры непосредственного вычисления вероятностей.

Пример 4. В коробке лежит 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Найти вероятность того, что из пяти взятых наугад шаров будет 4 белых.

Решение. Найдем число благоприятных исходов: число способов, которыми можно взять 4 белых шара из 6 имеющихся, равно $C_6^4 = C_6^2 = \dfrac{6!}{2!\,4!} = 15$. Общее число исходов определяется числом сочетаний из 10 по 5: $C_{10}^5 = 252$. Согласно определению 3 искомая вероятность $P = 15/252 \approx 0{,}06$.

Пример 5. Какова вероятность того, что при заполнении карточки спортивной лотереи "6 из 36" будет угадано 4 номера?

Решение. Общее число исходов равно $C_{36}^6 = 1\,947\,792$. Число благоприятных исходов равно $C_6^4 = 15$. Отсюда искомая вероятность равна $7{,}7 \cdot 10^{-6}$.

Пример 6. В ящике находится 10 стандартных и 5 нестандартных деталей. Какова вероятность, что среди наугад взятых 6 деталей будет 4 стандартных и 2 нестандартных?

Решение. Общее число исходов равно C_{15}^6. Число благоприятных исходов определяется произведением $C_{10}^4 C_5^2$, где первый сомножитель соответствует числу вариантов изъятия из ящика 4-х стандартных деталей из 10, а второй — числу вариантов изъятия из ящика 2-х нестандартных деталей из пяти. Отсюда следует, что искомая вероятность равна

$$P = C_{10}^4 C_5^2 / C_{15}^6 = 0{,}42.$$

14.2. Теорема сложения вероятностей

Несовместные события

Определение 1. *Суммой* двух событий A и B называют событие $C = A + B$, которое состоит в появлении либо события A, либо события B, либо событий A и B одновременно.

Это определение напоминает сумму множеств (см. гл. 1) и используется в теоретико-множественном подходе теории вероятностей. Примеры суммы событий: произведены два выстрела, и события A и B — попадания при первом и втором выстрелах соответственно; тогда $A + B$ — попадание либо при первом выстреле, либо при втором, либо в обоих выстрелах. Если события A и B несовместные, то их сумма — это событие, состоящее в появлении какого-либо из этих событий.

Аналогично определяется сумма *нескольких* событий, состоящая в появлении хотя бы одного из этих событий.

ТЕОРЕМА 14.1. *Вероятность появления какого-либо из нескольких попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей:*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \quad (14.3)$$

Следствие. *Вероятность появления какого-либо из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Пример 1. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 4 концентрические зоны. Вероятности попадания в эти области соответственно равны 0,4; 0,3; 0,2 и 0,1. Найти вероятность попадания либо в первую, либо во вторую зону.

Решение. Пусть событие A — попадание в первую зону мишени, а событие B — попадание во вторую зону мишени. Эти события несовместны, поэтому применимы теорема 14.1 и формула (14.3) сложения вероятностей. Искомая вероятность равна

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7.$$

Полная группа событий

ТЕОРЕМА 14.2. *Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:*

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Пример 2. На складе готовой продукции находятся изделия, среди которых 5% нестандартных. Найти вероятность того, что при выдаче изделия со склада оно будет стандартным.

Решение. Вероятность получения нестандартного изделия равна 0,05; события выдачи стандартного и нестандартного изделия образуют полную группу. Следовательно, сумма их вероятностей равна единице, и тогда искомая вероятность равна 0,95.

Противоположные события

Определение 2. Два единственно возможных события, образующих полную группу, называются *противоположными.*

Если событие обозначено через A, то противоположное ему событие обозначается через $\bar{A}$. Из теоремы 14.2 следует, что

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \qquad (14.4)$$

Например, если при стрельбе по мишени попадание — это событие A, то событие $\bar{A}$ — это промах; сумма их вероятностей равна единице — при выстреле обязательно будет либо попадание, либо промах. То же самое и при подбрасывании монеты: обязательно выпадет либо орел, либо решка.

Пример 3. В магазине имеется 10 телевизоров, из которых 2 неисправных. Найти вероятность того, что среди наугад взятых 3-х телевизоров будет хотя бы один неисправный.

Решение. События "среди взятых телевизоров нет ни одного неисправного" и "есть хотя бы один неисправный" — противоположные. Первое из них обозначим через A, а второе — через $\bar{A}$. Общее число способов, которыми можно взять 3 изделия из десяти, равно C_{10}^3. Число исправных телевизоров равно 8, число способов выборки из них трех изделий равно C_8^3, так что вероятность $P(A) = C_8^3/C_{10}^3$. Искомая вероятность определяется из формулы (14.4):

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - C_8^3/C_{10}^3 = 1 - 0{,}47 = 0{,}53.$$

14.3. Теорема умножения вероятностей

Произведение событий и условная вероятность

Определение 1. *Произведением* двух событий A и B называется событие AB, означающее совместное появление этих событий (см. гл. 1.1, произведение множеств).

Например, если событие A — шар, событие B — белый цвет, то их произведение AB — белый шар. Аналогично определяется произведение *нескольких* событий как совместное появление их всех.

Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений кроме необходимого комплекса условий S не налагается, то такая вероятность называется *безусловной.* Если же налагаются другие дополнительные условия, содержащие случайные события, то вероятность такого события называется *условной.*

Определение 2. Вероятность события B в предположении о наличии события A называют условной вероятностью $P_A(B)$.

Пример 1. В ящике лежит 11 деталей, 3 из них нестандартные. Из ящика дважды берут по одной детали, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что во второй раз из ящика будет извлечена стандартная деталь — событие B, если в первый раз была извлечена нестандартная деталь — событие A.

Решение. После первого извлечения в ящике из 10 деталей осталось 8 стандартных, и, следовательно, искомая вероятность

$$P_A(B) = 0{,}8.$$

Пусть теперь известны вероятность $P(A)$ события A и условная вероятность $P_A(B)$ события B. Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.3. *Вероятность произведения двух событий определяется формулой*

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \tag{14.5}$$

Пример 2. В условиях примера 1 найти вероятности того, что в первый раз извлечена нестандартная деталь, а во второй раз — стандартная, и наоборот.

Решение. Итак, событие A — это извлечение из ящика нестандартной детали, а событие B — стандартной. Тогда возможны два случая. 1) Вероятность $P(A) = 3/11$, а условная вероятность $P_A(B) = 0{,}8$. Искомая вероятность произведения этих событий (их совместного появления в указанном порядке) равна, согласно теореме 14.3,

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = (3/11)0{,}8 \approx 0{,}22.$$

2) Вероятность $P(B) = 8/11$, а условная вероятность $P_B(A) = 0{,}3$. Мы видим, что и в этом случае вероятность произведения событий $P(BA) = P(B)P_B(A) \approx 0{,}22$.

В этом примере мы проверили известное в теории равенство

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).$$

Теорема 14.3 допускает обобщение на случай произведения любого числа событий A_1, A_2, A_3, ..., A_n:

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots \\ \ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n), \tag{14.6}$$

т.е. вероятность совместного появления n событий равна произведению n вероятностей, где $P_{A_1A_2\ldots A_{k-1}}(A_k)$ — условные вероятности событий A_k в предположении, что события $A_1A_2\ldots A_{k-1}$ уже произошли ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Пример 3. В урне находится 4 белых шара, 5 красных и 3 синих. Наудачу извлекают по одному шару, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что в первый раз появится белый шар (событие A), во второй раз — красный (событие B), в третий — синий (событие C).

Решение. Вероятность появления белого шара в первом извлечении $P(A) = 1/3$; условная вероятность появления красного шара во втором извлечении при условии появления в первый раз белого шара $P_A(B) = 5/11$; условная вероятность появления синего шара в третьем извлечении при условиях появления в предыдущих извлечениях белого и красного шаров $P_{AB}(C) = 0{,}3$. Искомая вероятность определяется по формуле (14.6) при $n = 3$:

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = (1/3)(5/11)0{,}3 \approx 0{,}045.$$

Независимые события

Определение 3. Событие B называется *независимым* от события A, если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности (появление события A не влияет на вероятность события B):

$$P_A(B) = P(B).$$

Отсюда следует, что и событие A также независимо от события B:

$$P_B(A) = P(A).$$

Для независимых событий теорема умножения вероятностей 14.3 в общей форме, которая следует из (14.6), имеет вид

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n),\ n > 1. \quad (14.7)$$

Равенство (14.7) принимается за определение независимых событий. При этом если события независимы, то независимы также и соответствующие им противоположные события.

Пример 4. Найти вероятность поражения цели при совместной стрельбе тремя орудиями, если вероятности поражения цели орудиями соответственно равны 0,9, 0,8 и 0,7 (события A, B и C).

Решение. Поскольку события A, B и C являются независимыми, то искомая вероятность вычисляется, согласно формуле (14.7), при $n = 3$:

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504.$$

Когда в результате испытания может иметь место n независимых событий с известными вероятностями их появления, особый интерес представляет случай нахождения вероятности наступления хотя бы одного из них (например, в случае трех событий найти вероятность наступления либо одного, либо двух, либо трех событий). Обозначим это событие через A. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.4. *Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий A_1, A_2,..., A_n определяется формулой*

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n, \tag{14.8}$$

где $q_i = 1 - p_i$ — вероятности соответствующих противоположных событий $\bar{A}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

В частном случае, когда все события A_i имеют одинаковую вероятность p, из формулы (14.8) следует, что

$$P(A) = 1 - q^n, \quad q = 1 - p. \tag{14.9}$$

Пример 5. В условиях примера 4 найти вероятность поражения цели (хотя бы одного попадания) при залповой стрельбе орудий.

Решение. Вероятности противоположных событий (промахов) соответственно равны $q_1 = 0{,}1$, $q_2 = 0{,}2$, $q_3 = 0{,}3$. Искомая вероятность находится по формуле (14.8) при $n = 3$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

Из этого примера наглядно видно преимущество совместного воздействия случайных событий с целью достижения общего результата.

Пример 6. На перевозку груза направлены 4 автомобиля. Вероятность нахождения каждой из машин в исправном состоянии равна 0,8. Найти вероятность того, что в работе участвует хотя бы один из выделенных для этого автомобилей.

Решение. Вероятность противоположного события (машина неисправна) равна $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. По формуле (14.9) находим искомую вероятность при $n = 4$:

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - 0{,}2^4 = 0{,}9984.$$

Пример 7. Вероятность обслуживания клиента одним операционистом в банке равна 0,6. Какое минимальное число операционистов должно работать в банке, чтобы вероятность обслуживания клиента была не менее 0,95?

Решение. Вероятность противоположного события (отказ в обслуживании клиента операционистом) равна 0,4. Пусть n — количество операционистов, удовлетворяющее условию задачи, т.е.

$$P(A) = 1 - q^n = 1 - 0{,}4^n \geq 0{,}95.$$

Решая это неравенство, получаем

$$0{,}4^n \leq 0{,}05.$$

Логарифмирование обеих частей этого неравенства дает

$$n \geq \lg 0{,}05/\lg 0{,}4 = 3{,}27.$$

Поскольку n должно быть целым числом, окончательно получаем, что в банке должны работать не менее 4 операционистов.

14.4. Обобщения теорем сложения и умножения

Появление только одного из независимых событий

Рассмотрим примеры совместного применения теорем сложения и умножения. Пусть два независимых события A_1 и A_2 имеют вероятности появления соответственно p_1 и p_2. Найдем вероятность появления только одного из этих событий. Для этого введем новые события: B_1 и B_2. Событие B_1 состоит в том, что событие A_1 наступило, а событие A_2 не наступило;

иными словами, $B_1 = A_1\bar{A}_2$. Аналогичным образом определяется и событие $B_2 = \bar{A}_1 A_2$ (совместное ненаступление события A_1 и наступление события A_2). Поскольку события A_1 и A_2 независимы, то независимы также и противоположные события $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$; тогда события B_1 и B_2 являются несовместными. Вероятность наступления только одного из событий A_1 и A_2 находится как сумма вероятностей несовместных событий B_1 и B_2:

$$\begin{aligned} P(B_1 + B_2) &= P(B_1) + P(B_2) = P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = \\ &= P(A_1)P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2) = p_1 q_2 + p_2 q_1, \end{aligned} \tag{14.10}$$

где $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$.

Аналогичным образом можно убедиться в справедливости формулы вероятности наступления только одного из трех независимых событий A_1, A_2, A_3 с вероятностями наступления соответственно p_1, p_2 и p_3:

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2, \tag{14.11}$$

где B_i — произведения наступившего события A_i и двух других ненаступивших событий ($i = 1, 2, 3$). Для случая n независимых событий формула вероятности наступления только одного из них имеет аналогичный вид — сумма n слагаемых, каждый член которой представляет собой произведение вероятности наступления одного из событий на вероятности $(n-1)$ других противоположных событий.

Пример 1. Предприниматель решил вложить свои средства поровну в два контракта, каждый из которых принесет ему прибыль в размере 100%. Вероятность того, что любой из контрактов не "лопнет", равна 0,8. Какова вероятность того, что по истечении контрактов предприниматель по меньшей мере ничего не потеряет?

Решение. Предприниматель по крайней мере ничего не потеряет, если либо не "лопнет" один из контрактов (другой возместит ему потери), либо будут выполнены оба контракта. Пусть события A_1 и A_2 — это выполнение соответствующих контрактов (вероятность $p = 0{,}8$); эти события являются независимыми. Противоположные им события $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ —

невыполнение контрактов (вероятность $q = 0{,}2$). Тогда события $B_1 = A_1\bar{A}_2$, $B_2 = \bar{A}_1A_2$ и A_1A_2 являются несовместными (последнее событие — это выполнение обоих контрактов). Искомая вероятность определяется с учетом формул (14.10) и (14.7):

$$P(B_1 + B_2 + A_1A_2) = p_1q_2 + p_2q_1 + p_1p_2 = 2pq + p^2 = 0{,}96.$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Определение 1. События A и B называют совместными, если в одном и том же испытании появление одного из них не исключает появления другого.

Для таких событий справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.5. *Вероятность суммы совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их произведения:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (14.12)$$

Из формулы (14.12) получается ряд следующих частных случаев.

1. Для независимых событий с учетом формулы (14.7)

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B). \qquad (14.13)$$

2. Для зависимых событий с учетом формулы (14.5)

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P_A(B).$$

3. Для несовместных событий $P(AB) = 0$, и в этом случае имеем подтверждение теоремы 14.1 и формулы (14.3):

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Пример 2. Вероятности поражения цели первым и вторым стрелками равны соответственно 0,8 и 0,9. Найти вероятность поражения цели при залпе.

Решение. Поскольку вероятности поражения цели стрелками (события A и B соответственно) не зависят от результатов стрельбы каждого из напарников, то эти события независимы. Искомая вероятность рассчитывается по формуле (14.13):

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \\ = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}72 = 0{,}98.$$

Аналогичный результат можно было бы получить и с применением формулы (14.8). Пусть событие A — поражение цели, $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — события, соответствующие промахам стрелков, тогда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}98.$$

Формула полной вероятности

Пусть события B_1, B_2, ..., B_n несовместны и образуют полную группу, т.е., согласно теореме 14.2, выполняется равенство

$$P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1.$$

Пусть также событие A может наступить при условии появления одного из событий B_i, причем известны как вероятности $P(B_i)$, так и условные вероятности $P_{B_i}(A)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В таком случае формула для вероятности события A определяется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 14.6. *Вероятность события A, появление которого возможно лишь при наступлении одного из несовместных событий B_i, образующих полную группу $(i = 1, 2, \ldots, n)$, равна сумме попарных произведений каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность появления события A:*

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + \\ + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A). \qquad (14.14)$$

Пример 3. В двух урнах находятся белые и красные шары: в первой — 4 белых и 5 красных, во второй — 7 белых и 3

красных. Из второй урны наудачу взяли шар и переложили его в первую урну. Найти вероятность того, что наудачу взятый после этого из первой урны шар будет белым.

Решение. Перекладывание из второй урны в первую белого шара (событие B_1) и красного шара (событие B_2) образует полную группу независимых событий. Их вероятности соответственно $P(B_1) = 0{,}7$ и $P(B_2) = 0{,}3$. Условные вероятности извлечения из первой урны белого шара (событие A) при добавлении туда белого или красного шара из второй урны соответственно равны $P_{B_1}(A) = 0{,}5$ и $P_{B_2}(A) = 0{,}4$. Искомая вероятность находится по формуле (14.14) при $n = 2$:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}47.$$

Пример 4. В двух ящиках находятся детали: в первом — 10 штук и из них 3 нестандартные, а во втором — 20 штук и из них 8 нестандартных. Из каждого ящика наудачу вынуто по одной детали, а потом из этих двух деталей наудачу взята одна. Найти вероятность того, что эта деталь окажется стандартной.

Решение. При первой выборке двух деталей возможны четыре случая, которые образуют полную группу независимых событий. События B_{ss}, B_{sn}, B_{ns}, B_{nn} соответствуют случаям изъятия: из первого и второго ящиков по стандартной детали, из первого ящика — стандартной и из второго — нестандартной деталей, из первого ящика — нестандартной и из второго — стандартной, из первого и второго ящиков — по нестандартной детали. В свою очередь, события B_{ik} $(i, k = s, n)$ представляют собой произведения независимых событий — изъятия из каждого ящика по детали, и потому их вероятности равны соответствующим произведениям вероятностей этих изъятий: $P(B_{ss}) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$; $P(B_{sn}) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$; $P(B_{ns}) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$; $P(B_{nn}) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$. Условные вероятности выборки из двух деталей стандартной, согласно перечисленным выше возможным случаям, равны:

$$P_{B_{ss}}(A) = 1, \quad P_{B_{sn}}(A) = 0{,}5,$$

$$P_{B_{ns}}(A) = 0{,}5, \quad P_{B_{nn}}(A) = 0.$$

Теперь, согласно теореме 14.6 и формуле (14.14), получаем искомую вероятность события A:

$$P(A) = P(B_{ss})P_{B_{ss}}(A) + P(B_{sn})P_{B_{sn}}(A) +$$
$$+P(B_{ns})P_{B_{ns}}(A) + P(B_{nn})P_{B_{nn}}(A) =$$
$$= 0{,}42 \cdot 1 + 0{,}28 \cdot 0{,}5 + 0{,}18 \cdot 0{,}5 + 0{,}12 \cdot 0 = 0{,}65.$$

Формулы Байеса

Пусть события B_1, B_2, ..., B_n несовместны и образуют полную группу, а событие A может наступить при условии появления одного из них. События B_i называют *гипотезами*, так как заранее неизвестно, какое из них наступит. Пусть произведено испытание и в результате появилось событие A. Тогда оказывается возможным определить условные вероятности гипотез B_i по следующим формулам:

$$\begin{aligned} &P_A(B_i) = \\ &= \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)P_{B_n}(A)} = \\ &= P(B_i)P_{B_i}(A)/\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P_{B_k}(A) = P(B_i)P_{B_i}(A)/P(A), \\ &\qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{14.15}$$

Формулы (14.15) называются *формулами Байеса*, по имени их автора. Они позволяют оценить вероятность гипотезы B_i во всех испытаниях, где наступает событие A. Иными словами, зная вероятность $P(B_i)$ до проведения испытания, мы можем переоценить ее после проведения испытания, в результате которого появилось событие A.

Пример 5. Вероятность изготовления изделия с браком равна 0,08. После изготовления все изделия подвергаются проверке, в результате которой изделия без брака признаются годными с вероятностью 0,95, а изделия с браком — с вероятностью 0,06.

Найти долю изделий, выпущенных после проверки, а также вероятность того, что выпущенное после проверки изделие окажется без брака.

Решение. Независимые события (гипотезы), образующие полную группу, — это B_1 (изделие без брака) и B_2 (изделие с браком). Пусть событие A заключается в том, что при проверке изделие признается годным. Ответ на первый вопрос задачи дает формула (14.14):

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) =$$
$$= 0{,}92 \cdot 0{,}95 + 0{,}08 \cdot 0{,}06 = 0{,}8788.$$

Следовательно, после проверки признаются годными около 88% всех изготовленных изделий.

Ответ на второй вопрос задачи дает формула Байеса (14.15) при $n = 2$ и $i = 1$:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}92 \cdot 0{,}95}{0{,}8788} = 0{,}995.$$

Иными словами, среди изделий, прошедших проверку, содержится 99,5% изделий без брака.

Пример 6. В среднем из каждых 100 клиентов отделения банка 60 обслуживаются первым операционистом и 40 — вторым операционистом. Вероятность того, что клиент будет обслужен без помощи заведующего отделением, только самим операционистом, составляет 0,9 и 0,75 соответственно для первого и второго служащих банка. Найти вероятность полного обслуживания клиента первым операционистом.

Решение. Вероятность того, что клиент попадет к первому операционисту (событие B_1), составляет 0,6, ко второму — 0,4 (событие B_2). Искомая вероятность полного обслуживания клиента первым операционистом (событие A) определяется по формулам (14.14) и (14.15):

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)} =$$
$$= \frac{0{,}6 \cdot 0{,}9}{0{,}6 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}75} = 0{,}64.$$

Иными словами, 64% клиентов, попавших на обслуживание к первому операционисту, будут обслужены им полностью.

14.5. Схема независимых испытаний

Формула Бернулли

Определение 1. Если при проведении нескольких испытаний вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других событий, то эти испытания называются *независимыми относительно события* A.

Будем рассматривать только такие независимые испытания, в которых событие A имеет одинаковую вероятность. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p. Тогда вероятность противоположного события — ненаступления события A — также постоянна в каждом испытании и равна $q = 1 - p$. В теории вероятностей представляет особый интерес случай, когда в n испытаниях событие A осуществится k раз и не осуществится $(n - k)$ раз.

Вероятность этого сложного события, состоящего из n испытаний, определяется *формулой Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ или } P_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}. \qquad (14.16)$$

Пример 1. Монету бросают 6 раз. Найти вероятности того, что герб выпадет: 1) 2 раза, 2) не менее двух раз.

Решение. Вероятности выпадения любой из двух сторон монеты одинаковы, т.е. $p = q = 0{,}5$. 1) В этом случае $n = 6$, $k = 2$. Отсюда согласно формуле (14.16) получаем

1) $P_6(2) = C_6^2(0{,}5)^2(0{,}5)^4 = 15(0{,}5)^6 = 0{,}23.$

2) $P_6(2 \le k \le 6) = 1 - P_6(0) - P_6(1) =$

$$= 1 - C_6^0(0{,}5)^6 - C_6^1(0{,}5)^6 = 1 - (0{,}5)^6(1 + 6) = 0{,}89.$$

Пример 2. Вероятность покупки бракованного комплекта посуды равна 0,1. Найти вероятность того, что из 7 купленных комплектов 5 будут без брака.

Решение. Вероятность покупки комплекта без брака $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$ — это дано по условию задачи. Тогда искомая вероятность находится по формуле (14.16):

$$P_7^5 = C_7^5 p^5 q^2 = C_7^2 (0{,}9)^5 (0{,}1)^2 = 0{,}12.$$

Пример 3. Контрольный тест состоит из 4 вопросов. На каждый вопрос предлагается 4 варианта ответа, среди которых только один правильный. Найти вероятность правильного ответа на два, три и четыре вопроса теста для неподготовленного человека (выбор ответа наудачу).

Решение. Искомые значения вероятности находятся по формуле Бернулли (14.16) с учетом того, что вероятность события A (правильный ответ) в каждом испытании (выбор ответа на вопрос теста) равна 0,25, а $q = 0{,}75$. Отсюда получаем:

$$P_4(2) = C_4^2 (0{,}25)^2 (0{,}75)^2 = 0{,}21;$$

$$P_4(3) = C_4^3 (0{,}25)^3 (0{,}75)^1 = C_4^1 (0{,}25)^3 (0{,}75) = 0{,}047;$$

$$P_4(4) = C_4^4 (0{,}25)^4 (0{,}75)^0 = C_4^0 (0{,}25)^4 = (0{,}25)^4 = 0{,}004.$$

Локальная теорема Лапласа

Использование формулы Бернулли (14.16) при больших значениях n и k представляется затруднительным ввиду увеличения объема вычислений и операций с большими числами. В этом случае применима формула, устанавливаемая следующей *локальной теоремой Лапласа.*

ТЕОРЕМА 14.7. *Пусть вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна, причем $0 < p < 1$. Тогда вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна значению функции $\varphi(x)$:*

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \qquad (14.17)$$

$$\text{где } x = (k - np)/\sqrt{npq}.$$

Точность формулы (14.17) возрастает с увеличением n. Имеются таблицы с вычисленными значениями функции $\varphi(x)$ (см. Приложение), по которым можно с достаточно высокой степенью точности найти практически любое значение этой функции, а значит, и вычислить нужную вероятность. Поскольку функция $\varphi(x)$ четная, то в таблицах даются ее значения только для положительных значений x; иными словами, знак аргумента не играет роли. Формула (14.17) носит название *асимптотической* формулы.

Пример 4. Вероятность выпуска бракованного изделия равна 0,3. Найти вероятность того, что среди 100 выпущенных изделий будет ровно 60 изделий без брака.

Решение. Вероятность появления события A в одном испытании (изделие без брака) $p = 0{,}7$, тогда $q = 0{,}3$; в нашем случае $n = 100$, $k = 60$. Последовательно вычисляем:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} = 4,58,$$

$$|x| = |k - np|/\sqrt{npq} = 10/4{,}58 = 2{,}18.$$

Теперь для найденного аргумента x находим по табл. 1 (см. Приложение) соответствующее значение $\varphi(x)$; оно равно 0,0371. Подстановка этого числа в формулу (14.17) дает приближенное значение искомой вероятности:

$$P_{100}(60) = 0{,}0371/4{,}58 = 0{,}008.$$

Интегральная теорема Лапласа

Опять предположим, что в каждом из произведенных n испытаний событие A появляется с одинаковой вероятностью p. В прикладных вопросах теории вероятностей наиболее употребимы определения вероятности события A в n испытаниях, когда k изменяется в заданном интервале значений: $l < k < m$. Соответствующую вероятность обозначают $P_n(l, m)$. Формула для приближенного вычисления этой вероятности устанавливается следующей *интегральной теоремой Лапласа.*

ТЕОРЕМА 14.8. *Пусть вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, причем $0 < p < 1$. Тогда вероятность того, что событие A появится в n испытаниях от l до m раз, приближенно равна определенному интегралу:*

$$P_n(l,m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2/2} dz, \tag{14.18}$$

где $a = (l - np)/\sqrt{npq}$, $b = (m - np)/\sqrt{npq}$.

Формула (14.18), как и (14.17), применима в случае больших значений n и k. При вычислениях по этой формуле пользуются специальными таблицами для интеграла

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz,$$

поскольку соответствующий неопределенный интеграл не выражается через элементарные функции. Функцию $\Phi(x)$ часто называют *интегралом ошибок*, соответствующая таблица ее значений приведена в Приложении. Эта функция является нечетной, поэтому в таблицах обычно приводят значения $\Phi(x)$ для положительных значений верхнего предела интегрирования x. Более удобно использовать формулу (14.18) в виде формулы Ньютона–Лейбница:

$$\begin{gathered} P_n(l,m) = \Phi(b) - \Phi(a), \\ a = (l - np)/\sqrt{npq}, \quad b = (m - np)/\sqrt{npq}. \end{gathered} \tag{14.19}$$

Пример 5. Вероятность выпуска бракованных деталей равна 0,3. Найти вероятность того, что среди 100 выпущенных деталей будет не менее 75 стандартных.

Решение. По условию задачи $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$, $n = 100$. Условие "не менее" означает, что число стандартных деталей k заключено в пределах от $l = 75$ до $m = 100$. Согласно формуле (14.19) производим предварительные вычисления:

$$a = (l - np)/\sqrt{npq} = 5/\sqrt{21} = 1{,}09,$$
$$b = (m - np)/\sqrt{npq} = 6{,}55.$$

Далее по табл. 2 Приложения находим соответствующие значения интегральной функции $\Phi(x)$, подставляем их в формулу (14.19) и получаем значение искомой вероятности:

$$P_n(l, m) = \Phi(b) - \Phi(a) = 0{,}5 - 0{,}36 = 0{,}24.$$

Пример 6. В страховой компании 10 тыс. клиентов, застраховавших свою недвижимость. Страховой взнос составляет 2000 р., вероятность несчастного случая $p = 0{,}005$, страховая выплата клиенту при несчастном случае составляет 200 тыс. р. Определить размер прибыли страховой компании с вероятностью P: 1) 0,9, 2) 0,995.

Решение. Прибыль компании зависит от числа страховых выплат k при несчастных случаях. Будем полагать, что величина ее равна разности между суммами страховых взносов и страховых выплат:

$$R = (20 - 0{,}2k) \text{ млн р.}$$

Теперь задача состоит в нахождении такого числа N, чтобы вероятность страхового случая $P_{10\,000}(k > N)$ была не больше заданной величины $1 - P$, или, что то же самое, чтобы выполнялось условие

$$P_{10\,000}(N < k < 10\,000) \leq 1 - P.$$

Тогда с вероятностью P прибыль компании составит $(20 - 0{,}2N)$ млн р. Предварительные вычисления значений аргумента функции $\Phi(x)$ при $n = 10\,000$, $l = N$ и $m = 10\,000$ по формулам (14.19) дают:

$$a = (N - np)/\sqrt{npq} = \frac{N - 50}{7{,}05}, \quad b = 9550/7{,}05 = 1411{,}34.$$

Из табл. 2 находим, что $\Phi(x) = 0{,}5$ при $|x| > 5$. Подставляя в указанное выше неравенство, получаем

$$0{,}5 - \Phi\left(\frac{N - 50}{7{,}05}\right) \leq 1 - P.$$

1. В этом случае имеем неравенство

$$0{,}5 - \Phi\left(\frac{N-50}{7{,}05}\right) \leq 0{,}1, \text{ или } \Phi\left(\frac{N-50}{7{,}05}\right) \geq 0{,}4.$$

По табл. 2 находим, что при значении функции $\Phi = 0{,}4$ аргумент x равен 1,28; поскольку функция $\Phi(x)$ является монотонно возрастающей, то неравенство между значениями $\Phi(x)$ переходит в неравенство такого же смысла и для соответствующих аргументов:

$$\frac{N-50}{7{,}05} \geq 1{,}28.$$

Отсюда получаем, что $N \geq 50 + 9{,}02$, или $N \geq 60$. В этом случае с вероятностью 0,9 страховой компании гарантирована прибыль

$$R = 20 - 0{,}2 \cdot 60 = 8 \text{ млн р.}$$

2. Проводя для этого случая аналогичные вычисления, получим

$$\Phi\left(\frac{N-50}{7{,}05}\right) \geq 0{,}495.$$

Из табл. 2 находим, что при $\Phi(x) = 0{,}495$ аргумент $x = 2{,}57$, т.е.

$$\frac{N-50}{7{,}05} \geq 2{,}57.$$

Из последнего неравенства получаем $N \geq 69$, и в этом случае с вероятностью 0,995 компании гарантирована прибыль

$$R = 20 - 0{,}2 \cdot 69 = 6{,}2 \text{ млн р.}$$

Из решенной задачи хорошо видно, что увеличение риска страхования может привести к возрастанию прибыли компании. Это есть реализация известного принципа в предпринимательской деятельности: менее рискованные, но более надежные финансовые операции не приносят сверхприбылей.

Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности

Определение 2. Отношение числа испытаний, в которых событие A появилось, к общему числу фактически проведенных испытаний называют *относительной частотой события*

$$W(A) = m/n,$$

где m — число появлений события A, n — общее число испытаний.

Разница между вероятностью и относительной частотой состоит в том, что первая вычисляется до опыта, а вторая — после него. Одной из важных характеристик независимых испытаний с постоянной вероятностью появления события A в каждом испытании $(0 < p < 1)$ является отклонение относительной частоты от вероятности p. Вероятность того, что это отклонение не превышает по модулю заданного числа ε:

$$|m/n - p| \leq \varepsilon,$$

определяется формулой

$$P(|m/n - p| \leq \varepsilon) \cong 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}). \qquad (14.20)$$

Пример 7. Вероятность получения нестандартной детали $p = 0{,}1$. Найти вероятность того, что среди случайно взятых 200 деталей относительная частота появления нестандартной детали отклонится от вероятности p по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение. В данном случае $n = 200$, $q = 0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}03$. По формуле (14.20) имеем

$$P(|m/n - p| \leq \varepsilon) \cong 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}) =$$

$$= 2\Phi(0{,}03 \cdot \sqrt{2222}) = 2\Phi(1{,}41) \approx 0{,}84.$$

Смысл полученного результата состоит в том, что при достаточно большом числе проб, каждая из которых содержит 200 случайно выбранных деталей, в 84% случаев отклонение относительной частоты от постоянной вероятности $p = 0{,}1$ по абсолютной величине не превысит 0,03.

УПРАЖНЕНИЯ

14.1. Найти число способов извлечения из 36 игральных карт двух тузов и двух королей.

14.2. Во взводе служат 32 солдата. Ежедневно для несения караула выделяются по два человека. Можно ли составить расписание караульной службы так, чтобы никакая пара военнослужащих этого взвода не несла караульную службу дважды?

14.3. Два букиниста обмениваются друг с другом парами книг. Найти число способов обмена, если первый букинист обменивает 6 книг, а второй — 8 книг.

14.4. Абонент забыл две промежуточные цифры номера телефона и набрал их наугад. Найти вероятность того, что номер набран правильно в случаях: **а)** две разные цифры расположены в номере рядом; **б)** обе цифры расположены в разных местах, за исключением первой позиции.

14.5. В урне находится 10 шаров, 7 из которых белые. Найти вероятность того, что из 6 взятых наугад шаров будет 4 белых.

14.6. В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 стандартных. Сборщик наугад берет 3 детали. Найти вероятность того, что все взятые детали будут стандартными.

14.7. В урне 40 шаров: 15 белых, 15 красных и 10 синих. Найти вероятность появления цветного шара.

14.8. Абонент забыл первую цифру телефонного номера. Найти вероятность того, что при наборе номера наудачу он наберет его верно не более чем с трех попыток.

14.9. В лотерее разыгрывается 200 вещевых и 50 денежных выигрышей на каждые 10 тыс. билетов. Чему равна вероятность выигрыша вообще?

14.10. В условиях примера 14.7 из урны извлекают один шар, не возвращая его обратно, затем извлекают второй. Найти вероятность извлечения из урны во второй раз цветного шара.

14.11. В читальном зале имеется 6 учебников, из которых три нового выпуска. Читатель последовательно, один за другим,

взял 2 учебника. Найти вероятность того, что обе взятые книги нового выпуска.

14.12. Три автомашины направлены на перевозку груза. Вероятность исправного состояния первой из них составляет 0,7, второй — 0,8 и третьей — 0,5. Найти вероятность того, что все три автомашины находятся в эксплуатации.

14.13. В автохозяйстве имеются две автоцистерны. Вероятность технической исправности этих машин составляет соответственно 0,9 и 0,8. Найти вероятность исполнения работы второй автоцистерной заказчику, сделавшему накануне заказ на автоцистерну.

14.14. Инвестор решил вложить поровну средства в три предприятия при условии возврата ему через определенный срок 150% от вложенной суммы каждым предприятием. Вероятность банкротства каждого из предприятий 0,2. Найти вероятность того, что по истечении срока кредитования инвестор получит обратно по крайней мере вложенную сумму.

Указание. См. формулу (14.11) и пример 1 из п. 14.4.

14.15. При проверке изделия на соответствие стандарту вероятность того, что оно пройдет через первого контролера, равна 0,55, а через второго — 0,45. Вероятность признания бездефектного изделия стандартным у первого контролера равна 0,9, а у второго — 0,98. Бездефектное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие прошло через второго контролера.

14.16. В одном из ящиков находится 7 деталей, из которых 3 нестандартные; в другом — 5 деталей, из них 2 нестандартные. Из первого ящика наугад перекладывают деталь во второй ящик, потом из него берут деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется нестандартной.

14.17. Три стрелка выстрелили залпом по цели, и две пули поразили ее. Найти вероятность того, что первый стрелок поразил цель, если вероятности попадания в цель стрелками соответственно равны 0,4, 0,3 и 0,5.

14.18. Определить, что вероятнее для соперников равной силы при игре в шахматы: выиграть одну партию из двух или две партии из четырех.

14.19. Монету бросают пять раз. Найти вероятность выпадения одной из сторон: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

14.20. Вероятность выпуска стандартной детали равна 0,8. Найти вероятность того, что среди 100 деталей будет ровно 75 стандартных.

14.21. Вероятность рождения девочки равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных будет ровно 50 девочек.

14.22. Вероятность появления события равна 0,7 в каждом из 2100 независимых испытаний. Найти вероятность появления события: **а)** не менее 1 470 раз; **б)** не менее 1 470 и не более 1 500 раз; **в)** не более 1469 раз.

14.23. Вероятность обращения в поликлинику каждого взрослого человека в период эпидемии гриппа равна 0,8. Найти, среди какого числа взрослых человек можно ожидать, что в поликлинику будет не менее 75 обращений.

14.24. В банке, осуществляющем кредитование населения, 1 000 клиентов. Каждому из клиентов выдается кредит 500 тыс. р. при условии возврата 110% от этой суммы. Вероятность невозврата кредита каждым из клиентов в среднем составляет $p = 0{,}01$. Какая прибыль гарантирована банку с вероятностью: **а)** 0,8; **б)** 0,995?

14.25. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность отклонения относительной частоты появления события от его вероятности не более чем на 0,02 по абсолютной величине.

Глава 15
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

15.1. Случайные величины и законы их распределения

Виды случайных величин

В главе 14 рассматривались события, состоящие в появлении того или иного числа. Например, среди трех изъятых деталей может оказаться до трех стандартных.

Определение 1. Величину называют *случайной*, если в результате испытания она примет лишь одно возможное значение, заранее не известное и зависящее от случайных причин.

Каждой случайной величине соответствует множество чисел — это множество значений, которые она может принимать. Например, число мальчиков среди 100 новорожденных — это случайная величина, которая может принимать значения от 0 до 100. Далее будем обозначать случайные величины прописными буквами, а их возможные значения — строчными буквами; например, случайная величина X имеет два возможных значения x_1 и x_2. Другой пример: случайная величина Y принимает возможные значения, принадлежащие интервалу (a, b). Различают два вида случайных величин.

Определение 2. Случайная величина, принимающая отдельные возможные значения с определенными вероятностями, называется *дискретной случайной величиной.*

Определение 3. *Непрерывной* называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка.

Как следует из определения 2, для задания дискретной случайной величины нужно задать не только перечень ее возможных значений, но и их вероятности. Иными словами, каждому возможному значению случайной величины соответствует определенное значение вероятности появления этой величины.

Определение 4. Соответствие между отдельными возможными значениями и их вероятностями называется *законом распределения дискретной случайной величины.*

Как и в случае функциональной зависимости, этот закон можно задать таблицей, аналитически (формулой) и графически. В случае табличного задания закона распределения дискретной случайной величины соответствующая таблица состоит из двух строк — первая указывает возможные значения, а вторая — их вероятности:

$$\begin{array}{cccc} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \dots & p_n. \end{array} \qquad (15.1)$$

Поскольку в одном испытании случайная величина принимает только одно возможное значение, то события $X=x_1$, $X=x_2$, ..., $X=x_n$ образуют полную группу, т.е. сумма их вероятностей равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Если множество возможных значений X дискретной случайной величины бесконечно, то соответствующий ряд вероятностей сходится и его сумма равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1.$$

Пример 1. В денежной лотерее на 100 билетов разыгрывается один выигрыш в 20 р., два выигрыша по 10 р. и 10 выигрышей по 1 р. Найти закон распределения случайной величины X возможного выигрыша на один билет.

Решение. Возможные значения X: $x_1=20$, $x_2=10$, $x_3=1$, $x_4=0$. Соответственно их вероятности равны: $p_1=0{,}01$, $p_2=0{,}02$, $p_3=0{,}1$, $p_4=1-(p_1+p_2+p_3)=1-0{,}13=0{,}87$. Таким образом, искомый закон распределения имеет вид

$$\begin{array}{ccccc} X & 20 & 10 & 1 & 0 \\ P & 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}1 & 0{,}87. \end{array}$$

Пример 2. Партия из 8 изделий содержит 5 стандартных. Наудачу отбираются 3 изделия. Составить таблицу закона распределения числа стандартных изделий среди отобранных.

Решение. Случайная величина X — число стандартных деталей среди отобранных — может принимать 4 возможных значения: 0, 1, 2 и 3. Вероятность нахождения k стандартных изделий среди трех отобранных определяется формулой

$$P(X = k) = C_5^k C_3^{3-k} / C_8^3, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Варьируя значения k от 0 до 3, получаем искомое распределение:

X	0	1	2	3
P	0,0179	0,2679	0,5357	0,1785.

Пример 3. Вероятностный прогноз для величины X — процентного изменения стоимости акций по отношению к их текущему курсу в течение шести месяцев — дан в виде закона распределения:

X	5	10	15	20	25	30
P	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1.

Найти вероятность того, что покупка акций будет более выгодна, чем помещение денег на банковский депозит под 36% годовых.

Решение. Прирост суммы на банковском депозите при условии 3% в месяц составит через 6 месяцев $[(1{,}03)^6 - 1]100\% = 19{,}4\%$. Вероятность того, что покупка акций выгоднее банковского депозита, определяется суммой вероятностей, соответствующих более высокому росту курса акций:

$$P(X > 19{,}4) = p_4 + p_5 + p_6 = 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}6.$$

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, соединив в прямоугольной системе координат XOP точки (x_i, p_i) отрезками прямых. Так, на рис. 15.1 показан закон распределения из примера 3. Такая фигура называется *многоугольником распределения.*

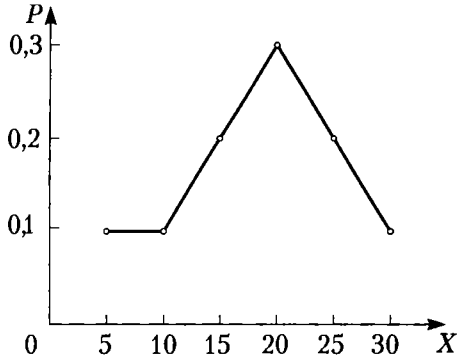


Рис. 15.1

Биномиальное распределение

Пусть производится n независимых испытаний и в каждом из них событие A может либо появиться, либо не появиться. Пусть также вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна (см. раздел 14.5). В качестве дискретной случайной величины X рассмотрим число появления события A в этих n испытаниях. Очевидно, что $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, ..., $x_{n+1}=n$. Вероятности этих возможных значений k даются формулой Бернулли (см. формулу (14.16)):

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{15.2}$$

где $q = 1 - p$ — вероятность противоположного события (непоявление события A в одном испытании). Формула (15.2) представляет собой аналитическую форму закона распределения случайной величины (числа появления события A в n независимых испытаниях), который называется *биномиальным*. Этот закон получил свое название потому, что правая часть в (15.2) представляет собой общий член разложения бинома Ньютона (14.2). Таким образом, табличная форма биномиального закона с учетом формулы (15.2) имеет вид

$$\begin{array}{cccccc} X & n & n-1 & \dots & k & \dots & 0 \\ P & p^n & np^{n-1}q & \dots & C_n^k p^k q^{n-k} & \dots & q^n. \end{array} \tag{15.3}$$

Можно показать, что сумма всех вероятностей второй строки этой таблицы равна единице, т.е.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = p^n + np^{n-1}q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + q^n = 1.$$

Пример 4. Банк выдает 5 кредитов. Вероятность невозврата кредита равна 0,2 для каждого из заемщиков. Составить таблицу закона распределения количества заемщиков, не вернувших кредит по окончании срока кредитования.

Решение. Примем за A событие невозврата кредита. Так как заемщики действуют независимо, то выдачу 5 кредитов можно считать за 5 независимых событий. Вероятность невозврата k кредитов из 5 описывается биномиальным распределением (15.2), где $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, k принимает значения от нуля до 5. Искомая таблица закона распределения составляется, согласно (15.3), при $n = 5$:

X	5	4	3
P	$(0{,}2)^5$	$5(0{,}2)^4 0{,}8$	$10(0{,}2)^3(0{,}8)^2$

X	2	1	0
P	$10(0{,}2)^2(0{,}8)^3$	$5(0{,}2)(0{,}8)^4$	$(0{,}8)^5$,

или окончательно:

X	5	4	3	2	1	0
P	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768.

Распределение Пуассона

Пусть в каждом из n производимых испытаний вероятность появления события A равна p. Как мы знаем, для определения вероятности k появлений события A используется формула Бернулли (15.2); при больших n пользуются асимптотической формулой Лапласа (14.17). Однако эта формула плохо подходит для случая, когда p мало. Для случая малых значений p и больших значений n используется *асимптотическая формула Пуассона.* Эта формула выведена при важном допущении, что

произведение np является постоянной величиной, т.е. $np = \lambda$. Тогда вероятность того, что событие A наступит ровно k раз, дается формулой, которая представляет собой *закон распределения Пуассона вероятностей массовых и редких (маловероятных) событий*:

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!\,. \qquad (15.4)$$

Пример 5. На базу отправлено 10 000 изделий. Вероятность того, что изделие в пути получит повреждение, равна 0,0003. Найти вероятность того, что на базу прибудут 4 поврежденных изделия.

Решение. По условию задачи $n = 10\,000, p = 0{,}0003, k = 4$. Находим λ, а затем по формуле (15.4) и искомую вероятность:

$$\lambda = np = 10\,000 \cdot 0{,}0003 = 3,$$

$$P_{10\,000}(4) = 3^4 e^{-3}/4! = 0{,}168.$$

15.2. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Установленный закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто используются *числовые характеристики случайной величины*, которые дают некоторое осредненное описание случайной величины, получаемое на базе закона ее распределения.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Пусть случайная величина X может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Определение 1. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* называется сумма произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i. \qquad (15.5)$$

Из этого определения следует, что математическое ожидание есть некоторая постоянная (неслучайная) величина. Вероятностный же смысл математического ожидания состоит в том, что оно приближенно равно (особенно для большого числа испытаний) *среднему арифметическому значений случайной величины.* Это хорошо видно в случае, когда вероятности всех возможных значений дискретной случайной величины равны: $p_i = p = 1/n$; из формулы (15.5) получаем

$$M(X) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n. \qquad (15.6)$$

Пример 1. Найти математическое ожидание количества очков, выпадающих при бросании игральной кости.

Решение. Выпадение каждой грани кубика от одного очка до шести имеет одинаковую вероятность $p = 1/6$. Следовательно, по формуле (15.6) получаем искомое математическое ожидание:

$$M(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 3{,}5.$$

Пример 2. Найти математическое ожидание числа невозврата кредитов по данным примера 4 п. 15.1.

Решение. Воспользуемся итоговой таблицей распределения дискретной случайной величины, полученной в этом примере, и формулой (15.6); находим

$$M(X) = 5 \cdot 0{,}00032 + 4 \cdot 0{,}0064 + 3 \cdot 0{,}0512 +$$
$$+ 2 \cdot 0{,}2048 + 1 \cdot 0{,}4096 + 0 \cdot 0{,}32768 = 1.$$

Свойства математического ожидания

Математическое ожидание обладает рядом свойств, которые указаны ниже.

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной:

$$M(C) = C.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X).$$

Свойство 3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X_1 + X_2 + \cdots + X_m) = M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_m).$$

Свойство 4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X_1 X_2 \ldots X_m) = M(X_1)M(X_2)\ldots M(X_m).$$

Пример 3. Пусть ежедневные расходы на обслуживание и рекламу автомобилей в некотором автосалоне составляют в среднем 100 тыс. р., а число продаж X автомашин в течение дня подчиняется следующему закону распределения:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025.

Найти математическое ожидание ежедневной прибыли при цене на машину 150 тыс. р.

Решение. Ежедневная прибыль подсчитывается по формуле

$$\Pi = (150X - 100) \text{ тыс. р.}$$

Искомая характеристика $M(\Pi)$ находится с использованием указанных выше свойств математического ожидания (в тыс. р.):

$$M(\Pi)=M(150X-100)=150M(X)-100=150\cdot 2{,}675-100=301{,}25.$$

Если в n независимых испытаниях вероятность появления в каждом из них события A постоянна, то ответ на вопрос о среднем числе появления события A дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 15.1. *Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании:*

$$M(X) = np. \tag{15.7}$$

Пример 4. Найти математическое ожидание числа выигрышных лотерейных билетов, если вероятность выигрыша по одному билету равна 0,015, причем куплено 200 билетов.

Решение. Поскольку приобретение каждого билета является независимым испытанием относительно появления события A — выпадения выигрыша, то здесь применимы теорема 15.1 и формула (15.7). В нашем случае $n = 200$, $p = 0{,}015$, откуда мы получаем

$$M(200) = 200 \cdot 0{,}015 = 3.$$

Дисперсия дискретной случайной величины

Как уже говорилось выше, математическое ожидание является средней характеристикой случайной величины. Однако оно не характеризует случайную величину достаточно полно, и по этой причине рассматриваются и другие числовые характеристики. Пусть X — случайная величина, а $M(X)$ — ее математическое ожидание.

Определение 2. Разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием называется *отклонением.*

Пусть закон распределения случайной величины X дается формулой (15.1), тогда отклонение $X-M(X)$ имеет следующий закон распределения:

$$\begin{array}{ccccc} X-M(X) & x_1-M(X) & x_2-M(X) & \dots & x_n-M(X) \\ p & p_1 & p_2 & \dots & p_n. \end{array} \qquad (15.8)$$

Отклонение имеет важное свойство, которое устанавливается непосредственно из свойств математического ожидания:

$$M[X - M(X)] = 0, \qquad (15.9)$$

т.е. *математическое ожидание отклонения равно нулю.*

Пример 5. По данным примера 3 найти закон распределения отклонения числа проданных за день автомашин.

Решение. Как было подсчитано в примере 3, $M(X) = 2{,}675$. Тогда, согласно (15.8), искомый закон определяется следующей таблицей:

$X - M(X)$	−2,675	−1,675	−0,675	0,325	1,325
p	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1
$X - M(X)$	2,325	3,325	4,325	5,325	6,325
p	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025.

На практике важной характеристикой является рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Среднее значение отклонения, согласно (15.9), равно нулю, так как суммируются отрицательные и положительные отклонения (см. пример 5), поэтому целесообразно ввести в рассмотрение абсолютные значения отклонений или их квадраты.

Определение 3. Математическое ожидание квадрата отклонения называется *дисперсией* или *рассеянием*:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \tag{15.10}$$

Пусть случайная величина задана законом распределения (15.1), тогда квадрат отклонения этой случайной величины имеет следующий закон распределения:

$[X-M(X)]^2$	$[x_1-M(X)]^2$	$[x_2-M(X)]^2$	$\ldots$	$[x_n-M(X)]^2$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n.

Отсюда, согласно формуле (15.10), получаем формулу дисперсии в развернутом виде:

$$D(X) = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + [x_2 - M(X)]^2 p_2 + \ldots + [x_n - M(X)]^2 p_n.$$

При вычислении дисперсии часто бывает удобно воспользоваться формулой, которая непосредственно выводится из формулы (15.10):

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \tag{15.11}$$

Пример 6. Найти дисперсию ежедневной продажи числа автомашин по данным примера 3.

Решение. Закон распределения случайной величины X^2 имеет вид

X^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
P	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025.

Математическое ожидание $M(X^2)$ подсчитывается из этой таблицы:

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}1 +$$

$$+36 \cdot 0{,}05 + 49 \cdot 0{,}05 + 64 \cdot 0{,}025 + 81 \cdot 0{,}025 = 13{,}475.$$

Математическое ожидание $M(X) = 2{,}675$. Следовательно, согласно формуле (15.11), получаем искомую величину дисперсии:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13{,}475 - 7{,}156 = 6{,}319.$$

Свойства дисперсии

Приведем здесь основные свойства дисперсии.

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X). \qquad (15.12)$$

Свойство 3. Дисперсия алгебраической суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n). \qquad (15.13)$$

Перечисленные свойства дисперсии используются при вычислениях, когда мы имеем дело с несколькими случайными величинами. Из свойств 1 и 3 следует важный вывод: $D(X + C) = D(X)$, где C — постоянная величина. Кроме того, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 15.2. *Дисперсия числа появления события A в n независимых испытаниях с вероятностью появления p в каждом из них этого события вычисляется по формуле*

$$D(X) = np(1-p) = npq. \tag{15.14}$$

Приведем здесь еще два важных результата: для случайной величины, распределенной по закону Пуассона (15.4), математическое ожидание и дисперсия равны параметру данного распределения.

Пример 7. Найти дисперсию числа выигрышных лотерейных билетов по данным примера 4.

Решение. Имеем 200 независимых испытаний с вероятностью появления выигрышного билета $p = 0{,}015$. Стало быть, $q = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$, откуда и получаем искомую дисперсию:

$$D(X) = npq = 200 \cdot 0{,}015 \cdot 0{,}985 = 2{,}955.$$

Пример 8. Банк выдал ссуды n разным заемщикам в размере S р. каждому под ставку ссудного процента r. Найти математическое ожидание и дисперсию прибыли банка, а также условие на ставку ссудного процента, если вероятность возврата ссуды заемщиком равна p.

Решение. Поскольку заемщики между собой не связаны, то можно полагать, что мы имеем n независимых испытаний. Вероятность утери ссуды для банка в каждом испытании равна $q = 1 - p$. Пусть X — число заемщиков, возвративших ссуду с ссудным процентом, тогда прибыль банка определяется формулой

$$\Pi = (1 + r/100)SX - nS,$$

где X является случайной величиной с биномиальным законом распределения. Тогда, согласно теореме 15.1, математиче-

ское ожидание прибыли определяется с использованием формулы (15.7):

$$M(\Pi) = (1+r/100)SM(X) - nS =$$
$$= (1 + r/100)Snp - Sn = Sn(rp/100-q).$$

Поскольку выдача ссуды имеет смысл лишь при положительном математическом ожидании прибыли (положительная средняя величина прибыли), то из условия $M(\Pi) > 0$ вытекает условие на ставку ссудного процента:

$$r > 100q/p, \text{ или } r > 100(1-p)/p.$$

Дисперсия прибыли банка находится, согласно теореме 15.2, с использованием формулы (15.14) и свойств 1–3:

$$D(\Pi) = D((1 + r/100)SX - nS) = (1 + r/100)^2 S^2 npq.$$

Среднее квадратическое отклонение

Одной из основных оценок рассеяния возможных значений случайной величины служит *среднее квадратическое отклонение.*

Определение 4. Средним квадратическим отклонением случайной величины X (стандартом) называется квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (15.15)$$

Согласно этому определению, из свойства 3 и формулы (15.13) следует, что в случае суммы взаимно независимых случайных величин справедлива формула

$$\sigma(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \ldots + \sigma^2(X_n)}.$$

Пример 9. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной следующим распределением:

X	-5	2	3	4	6
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1.

Решение. Имеем $M(X) = 2{,}6$. Составим таблицу распределения случайной величины X^2:

X^2	25	4	9	16	36
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1.

Отсюда получаем, что $M(X^2) = 14{,}4$. По формулам (15.11) и (15.15) окончательно получаем искомые значения $D(X)$ и $\sigma(X)$:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 7{,}64,$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 2{,}76.$$

Пример 10. Законы распределения независимых случайных величин X и Y приведены соответственно в таблицах:

X	-2	0	1	3	4
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1;

Y	2	4	6	8
p	0,2	0,4	0,3	0,1.

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 2X + 3Y$.

Решение. Согласно свойствам 2 и 3 дисперсии (формулы (15.12) и (15.13)), имеем

$$D(Z) = D(2X + 3Y) = 4D(X) + 9D(Y).$$

Для вычисления дисперсий $D(X)$ и $D(Y)$ составляем соответствующие таблицы — законы распределения случайных величин X^2 и Y^2:

X^2	4	0	1	9	16
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1;

Y^2	4	16	36	64
p	0,2	0,4	0,3	0,1.

Отсюда получаем

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 5 - 1{,}4^2 = 3{,}04;$$
$$D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2 = 24{,}4 - 4{,}6^2 = 3{,}24.$$

Искомые дисперсия и среднее квадратичное отклонение случайной величины Z равны:

$$D(Z) = D(2X + 3Y) = 4D(X) + 9D(Y) =$$

$$= 4 \cdot 3{,}04 + 9 \cdot 3{,}24 = 41{,}32;$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{D(Z)} = 6{,}43.$$

Пример 11. В условиях примера 8 найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение прибыли при $n = 1000$, $p = 0{,}8$, $S = 100$ тыс. р. и $r = 30\%$.

Решение. Ставка ссудного процента удовлетворяет условию, чтобы математическое ожидание прибыли было положительным: $30 > 100(1-0{,}8)/0{,}8$. Математическое ожидание прибыли:

$$M(\Pi) = Sn(rp/100 - q) =$$

$$= 100 \cdot 1000(30 \cdot 0{,}8/100 - 0{,}2) = 4 \text{ млн р.}$$

Среднее квадратическое отклонение прибыли:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = (1 + r/100)S\sqrt{npq} =$$

$$= 1{,}3 \cdot 100\sqrt{1000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 1644{,}38 \text{ тыс. р.}$$

Начальные и центральные моменты

Определение 5. *Начальным моментом порядка k* случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k). \tag{15.16}$$

В частности,

$$\nu_1 = M(X), \quad \nu_2 = M(X^2),$$

и тогда формула (15.11) для вычисления дисперсии принимает вид

$$D(X) = \nu_2 - \nu_1^2. \tag{15.17}$$

Определение 6. *Центральным моментом порядка k* случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени отклонения:

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k]. \tag{15.18}$$

В частности, согласно формуле (15.9), $\mu_1 = 0$, а дисперсия случайной величины X является центральным моментом второго порядка:

$$D(X) = \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2. \tag{15.19}$$

Соотношения, связывающие начальные и центральные моменты, также могут быть легко получены. Приведем их здесь для моментов третьего и четвертого порядков (они наряду с моментами первого и второго порядков широко применяются в статистике):

$$\begin{gathered} \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3, \\ \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4. \end{gathered} \tag{15.20}$$

Моменты более высоких порядков применяются крайне редко.

Моменты, рассмотренные в этом разделе, называют *теоретическими.* В отличие от них моменты, вычисляемые по данным наблюдений в математической статистике, называют *эмпирическими.*

15.3. Система двух случайных величин

Двумерная случайная величина

До сих пор мы рассматривали дискретные случайные величины, которые называют одномерными: их возможные значения определялись одним числом. Кроме одномерных величин рассматривают также величины, возможные значения которых определяются несколькими числами. Двумерную случайную величину обозначают через (X, Y); каждая из величин X и Y называется компонентой (составляющей). Обе величины X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют систему двух случайных величин. Например, при штамповке стальных

пластинок их длина и ширина представляют собой двумерную случайную величину.

Определение 1. Законом распределения двумерной случайной величины (X, Y) называют множество возможных пар чисел (x_i, y_j) и их вероятностей $p(x_i, y_j)$. Двумерную случайную величину можно трактовать как случайную точку $A(X, Y)$ на координатной плоскости.

Закон распределения двумерной случайной величины обычно задается в виде таблицы, в строках которой указаны возможные значения x_i случайной величины X, а в столбцах — возможные значения y_j случайной величины Y, на пересечениях строк и столбцов указаны соответствующие вероятности p_{ij}. Пусть случайная величина X может принимать n значений, а случайная величина Y — m значений. Тогда закон распределения двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$\begin{array}{lcccccc} Y/X \rightarrow & x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ \downarrow & & & & & & \\ y_1 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1i} & \dots & p_{1n} \\ y_2 & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2i} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_j & p_{j1} & p_{j2} & \dots & p_{ji} & \dots & p_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_m & p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mi} & \dots & p_{mn}. \end{array} \tag{15.21}$$

Из этой таблицы можно найти законы распределения каждой из случайных компонент. Например, вероятность того, что случайная величина X примет значение x_k, равна, согласно теореме сложения вероятностей независимых событий,

$$P(x_k) = p_{1k} + p_{2k} + \ldots + p_{mk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.22}$$

Иными словами, для нахождения вероятности $P(x_k)$ нужно просуммировать все m вероятностей по k-му столбцу таблицы (15.21). Аналогично получается вероятность того, что случайная величина Y примет возможное значение y_r: $P(y_r)$ получается суммированием всех n вероятностей r-й строки таблицы (15.21) ($r = 1, 2, \ldots, m$). Отсюда следует, что сумма всех

вероятностей в законе распределения (15.21) равна единице:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1. \qquad (15.23)$$

Пример 1. Задано распределение двумерной случайной величины:

$Y/X \rightarrow$	1	2	3
$\downarrow$			
1	0,1	0,15	0,12
2	0,2	0,22	0,21.

Найти распределения X, Y и $X+Y$.

Решение. В нашем случае возможные значения случайной величины X: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Тогда, согласно формуле (15.22), имеем $P(x_1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$, $P(x_2) = 0{,}15 + 0{,}22 = 0{,}37$, $P(x_3) = 0{,}12 + 0{,}21 = 0{,}33$. Отсюда получаем закон распределения X:

X	1	2	3
p	0,3	0,37	0,33.

Аналогично получаем и для распределения Y: $y_1 = 1$, $y_2 = 2$; $P(y_1) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}12 = 0{,}37$, $P(y_2) = 0{,}2 + 0{,}22 + 0{,}21 = 0{,}63$;

Y	1	2
p	0,37	0,63.

Теперь найдем распределение $X+Y$. Возможные значения этой случайной величины: 2, 3, 4 и 5. Соответствующие вероятности $P(2) = 0{,}1$, $P(3) = 0{,}15 + 0{,}2 = 0{,}35$, $P(4) = 0{,}12 + 0{,}22 = 0{,}34$, $P(5) = 0{,}21$. Отсюда находим искомое распределение:

$X+Y$	2	3	4	5
p	0,1	0,35	0,34	0,21.

В случае системы двух случайных величин используются кроме математических ожиданий и дисперсий еще и другие числовые характеристики, описывающие их взаимосвязь.

Корреляционный момент

Определение 2. *Корреляционным моментом* случайных величин X и Y (или *ковариацией*) называется математическое ожидание произведений их отклонений:

$$\mu_{xy} = \mathrm{Cov}\,(X, Y) = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}.$$

Корреляционный момент служит для описания связи между случайными величинами X и Y. Из свойств математического ожидания легко убедиться в том, что μ_{xy} можно записать в следующем виде:

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y).$$

Для непосредственного вычисления корреляционного момента (ковариации) используется формула (см. распределение (15.21))

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - M(X)M(Y). \qquad (15.24)$$

ТЕОРЕМА 15.3. *Корреляционный момент двух независимых случайных величин X и Y равен нулю.*

Если корреляционный момент μ_{xy} не равен нулю, то, стало быть, величины X и Y являются зависимыми.

Коэффициент корреляции

Из определения корреляционного момента следует, что его размерность равна произведению размерностей величин X и Y; например, если X и Y измерены в сантиметрах, то μ_{xy} имеет размерность см^2.

Это обстоятельство затрудняет сравнение корреляционных моментов различных систем случайных величин. Для устранения этого недостатка вводят безразмерную числовую характеристику — *коэффициент корреляции*, величина которого не зависит от выбора системы измерения случайных величин.

Определение 3. Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называется отношение их корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений

этих величин:

$$r_{xy} = \mu_{xy}/(\sigma_x \sigma_y) = \mu_{xy}/\sqrt{D(X)D(Y)}. \qquad (15.25)$$

Из определения и свойств математического ожидания и дисперсии следует важный вывод, что абсолютная величина коэффициента корреляции не превосходит единицы:

$$|r_{xy}| \leq 1 \text{ или } -1 \leq r_{xy} \leq 1. \qquad (15.26)$$

Определение 4. Две случайные величины X и Y называются *коррелированными*, если их корреляционный момент (коэффициент корреляции) отличен от нуля; если же их корреляционный момент равен нулю, то X и Y называются *некоррелированными*.

Таким образом, две коррелированные случайные величины (т.е. при $r_{xy} \neq 0$) являются также и зависимыми. Обратное утверждение неверно, т.е. две зависимые величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Пример 2. Найти корреляционный момент и коэффициент корреляции двух случайных величин X и Y, распределения которых заданы в предыдущем примере 1.

Решение. Воспользуемся формулами (15.24), (15.26), а также формулой вычисления центрального момента второго порядка (15.19); последовательно вычисляем: $M(X)$=2,03, $M(Y)$=1,63, $D(X) = 0{,}629$, $D(Y) = 0{,}233$,

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j p_{ij} - M(X)M(Y) =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}15 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}22 +$$

$$+3 \cdot 1 \cdot 0{,}12 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}21 - 2{,}03 \cdot 1{,}63 = -0{,}0089,$$

$$r_{xy} = -0{,}0089/\sqrt{0{,}629 \cdot 0{,}233} = -0{,}023.$$

В данном случае коэффициент корреляции близок к нулю; это означает, что случайные величины X и Y *слабокоррелированы*.

Линейная регрессия

Пусть (X, Y) — двумерная случайная величина, где X и Y — зависимые случайные величины. Оказывается возможным приближенное представление величины Y в виде линейной функции величины X:

$$Y \approx g(x) = aX + b, \tag{15.27}$$

где a и b — параметры, подлежащие определению. Обычно эти величины определяются с помощью метода наименьших квадратов (см. п. 8.5).

Определение 5. Функция (15.27) называется *наилучшим приближением* в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание $M[Y - g(X)]^2$ принимает наименьшее возможное значение. Функцию $g(x)$ называют *среднеквадратической регрессией* Y на X.

ТЕОРЕМА 15.4. *Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X имеет вид*

$$g(X) = m_y + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x), \tag{15.28}$$

где r_{xy} *определяется формулой* (15.25), $m_y = M(Y)$ *и* $m_x = M(X)$ — *математические ожидания соответственно случайных величин Y и X.*

Коэффициент $b = r_{xy}\sigma_y/\sigma_x$ называют *коэффициентом регрессии* Y на X, а прямую

$$y - m_y = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x),$$

реализующую линейную зависимость (15.28) случайной величины Y от случайной величины X, называют *прямой среднеквадратической регрессии* X на Y. Поскольку зависимость (15.28) является приближенной, то существует погрешность этого приближения, называемая *остаточной дисперсией*:

$$\varepsilon^2 = \sigma_y^2(1 - r_{xy}^2). \tag{15.29}$$

Аналогичную форму записи имеет прямая среднеквадратическая регрессия X на Y:

$$x - m_x = r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y).$$

Пример 3. Найти линейную среднюю квадратическую регрессию и остаточную дисперсию случайной величины Y на случайную величину X по данным примеров 1 и 2.

Решение. Для двумерной случайной величины (X, Y), приведенной в примере 1, все необходимые числовые характеристики указаны в решении примера 2: $m_x = 2{,}03$, $m_y = 1{,}63$, $r_{xy} = -0{,}023$, $\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 0{,}793$, $\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = 0{,}483$. Из уравнения (15.28) получаем искомое соотношение:

$$g(X) = 1{,}63 - 0{,}014(X - 2{,}03).$$

Остаточная дисперсия рассчитывается по формуле (15.29):

$$\varepsilon^2 = \sigma_y^2(1 - r_{xy}^2) = 0{,}483^2(1 - 0{,}023^2) = 0{,}233.$$

Для оценки среднеквадратичной погрешности линейной регрессии обычно используют величину ε, в нашем случае она составляет

$$\varepsilon = 0{,}483.$$

15.4. Непрерывные случайные величины

Функция распределения и ее свойства

Пусть X — непрерывная случайная величина (см. определение 3 п. 15.1), значения которой сплошь заполняют интервал (a, b). Теперь уже нельзя составить перечень всех возможных значений X, как это было сделано в случае дискретной случайной величины. Тем не менее существует способ задания любых видов случайных величин. Пусть x — действительное число. Обозначим вероятность события того, что X примет значение, меньшее x, через $F(x)$.

Определение 1. *Функцией распределения случайной величины* X называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что X примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x). \tag{15.30}$$

Геометрический смысл приведенного определения: $F(x)$ — это вероятность того, что случайная величина X примет значение, изображаемое точкой на числовой оси левее точки x. По виду функции $F(x)$ определяется и вид случайной величины. Уточним понятие непрерывной случайной величины.

Определение 2. Случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения есть непрерывная кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Таким образом, дискретную случайную величину можно считать кусочно-непрерывной.

Функция распределения обладает рядом фундаментальных свойств, указанных ниже.

Свойство 1. Область значений функции распределения лежит на отрезке $[0, 1]$:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

Свойство 2. Функция распределения является неубывающей, т.е.

$$F(x_2) \geq F(x_1) \text{ при } x_2 > x_1.$$

Свойство 3. Если возможные значения случайной величины находятся на интервале (a, b), то $F(x) = 0$ при $x \leq a$ и $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

Из указанных свойств вытекают важные следствия.

1. Вероятность того, что случайная величина X принимает значения, заключенные внутри интервала (α, β), равна разности значений функции распределения на концах этого интервала:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \tag{15.31}$$

2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

3. Если возможные значения непрерывной случайной величины X расположены на всей числовой оси, то

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

График функции распределения непрерывной случайной величины показан на рис. 15.2.

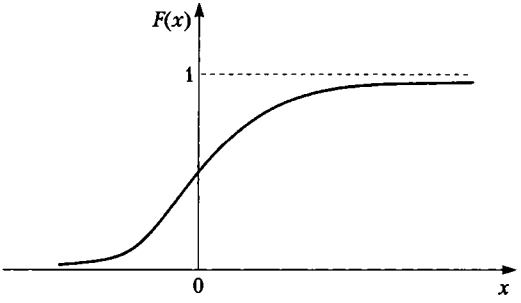


Рис. 15.2

Пример 1. Найти функцию распределения процентного изменения стоимости акций по данным примера 3 п. 15.1 и построить ее график.

Решение. Перепишем таблицу распределения дискретной случайной величины в порядке возрастания ее возможных значений:

X	0	5	10	15	20	25	30
P	0	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1.

Если $x \leq 5$, то $F(x) = 0$. Если $5 < x \leq 10$, то $F(x) = 0{,}1$. На интервале $10 < x \leq 15$ применяем теорему сложения вероятностей, так как события $X < 10$ и $10 < X \leq 15$ несовместны: $F(x) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$. Аналогично определяются значения $F(x)$ на других интервалах: при $15 < x \leq 20$ $F(x) = 0{,}4$; при $20 < x \leq 25$ $F(x) = 0{,}7$; при $25 < x \leq 30$ $F(x) = 0{,}9$; при $x > 30$ имеем достоверное событие (все случаи изменения стоимости акций исчерпаны), т.е. $F(x) = 1$. Таким образом, искомая функция распределения имеет следующую аналитическую форму записи:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 5; \\ 0{,}1, & 5 < x \leq 10; \\ 0{,}2, & 10 < x \leq 15; \\ 0{,}4, & 15 < x \leq 20; \\ 0{,}7, & 20 < x \leq 25; \\ 0{,}9, & 25 < x \leq 30; \\ 1, & x > 30. \end{cases}$$

График этой функции распределения показан на рис. 15.3.

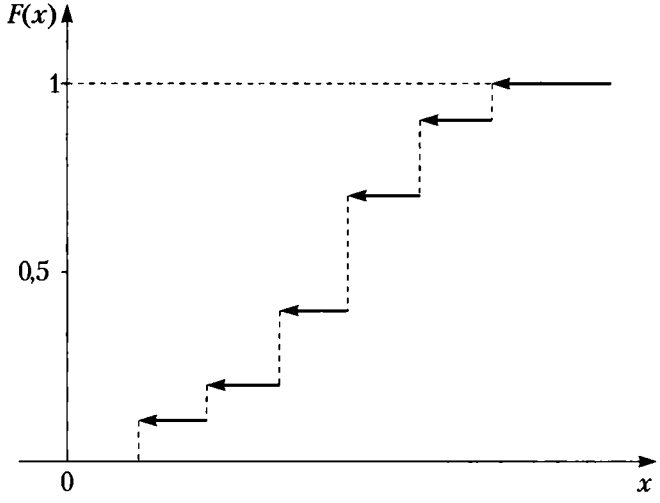


Рис. 15.3

Плотность распределения вероятностей и ее свойства

Определение 3. Производная от функции распределения непрерывной случайной величины X называется плотностью распределения вероятностей X:

$$f(x) = F'(x). \tag{15.32}$$

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения или неопределенным интегралом от нее. Плотность распределения — это "скорость" изменения вероятности $P(X < x)$. Из свойства 2 функции распределения следует справедливость следующей фундаментальной теоремы.

ТЕОРЕМА 15.5. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение на интервале (α, β), определяется по формуле*

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \tag{15.33}$$

Вспоминая геометрический смысл определенного интеграла (см. п. 7.5), можно сказать, что вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой плотности распределения $f(x)$, снизу — осью Ox, а с краев — вертикальными прямыми $x = \alpha$ и $x = \beta$ (рис. 15.4).

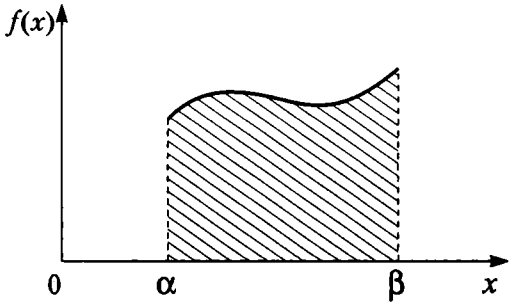


Рис. 15.4

Связь между функцией распределения и плотностью распределения вероятностей устанавливается, согласно (15.32), формулой

$$F(x) = P(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz. \qquad (15.34)$$

Пример 2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sin x, & 0 < x \le \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения X.

Решение. Функция $F(x)$ является кусочно-дифференцируемой. Согласно формуле (15.32), дифференцируя $F(x)$ по интервалам ее задания, получаем

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \cos x, & 0 < x \le \pi/2; \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Пример 3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения на всей числовой оси:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Найти вероятность того, что X примет значение на интервале $(-1, 1)$.

Решение. Согласно формуле (15.33), искомая вероятность равна

$$P(-1<X<1)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}.$$

Плотность распределения обладает рядом свойств, основные из них указаны ниже.

Свойство 1. Плотность распределения является неотрицательной функцией:

$$f(x) \geq 0.$$

Это следует из характера функции распределения: она является неубывающей, и, значит, ее производная неотрицательна.

Свойство 2. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах интегрирования по всей числовой оси равен единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Это равенство означает достоверность события, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(-\infty, \infty)$, т.е. вероятность этого события $P(-\infty < X < \infty)=1$.

Так, если все возможные значения случайной величины X лежат внутри интервала (a, b), то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = 1. \qquad (15.35)$$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Определения числовых характеристик дискретных случайных величин распространяются и на непрерывные величины. Разница состоит в том, что вместо сумм в формулах (15.5) и (15.10) берутся их интегральные аналоги.

Определение 4. *Математическим ожиданием непрерывной случайной величины* X, возможные значения которой находятся на отрезке $[a, b]$, называется определенный интеграл:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx. \qquad (15.36)$$

В том случае, когда возможные значения случайной величины X заполняют всю ось Ox, пределы интегрирования a и b бесконечны: $a = -\infty$, $b = \infty$. Возможны также случаи, когда один из пределов интегрирования бесконечен (возможные значения X лежат на полупрямой).

Определение 5. *Дисперсией непрерывной случайной величины* X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) dx. \qquad (15.37)$$

Все сказанное выше о случаях бесконечных пределов интегрирования остается справедливым и для дисперсии.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется, как и прежде, по формуле (15.15):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Для вычисления дисперсии употребляется более удобная формула, которая выводится из (15.37):

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2. \qquad (15.38)$$

Пример 4. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения на отрезке $[0,1]$:

$$f(x) = 1, \quad x \in [0,1].$$

Решение. Согласно формулам (15.36), (15.38) и (15.15) последовательно вычисляем искомые величины:

$$M(X) = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$D(X) = \int_0^1 x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \int_0^1 x^2\, dx - (1/2)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1/2\sqrt{3} \approx 0{,}289.$$

Пример 5. Найти основные числовые характеристики непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения на положительной полуоси Ox:

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Решение. Найдем сначала плотность распределения:

$$f(x) = F'(x) = e^{-x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Затем, как и в предыдущем примере, вычисляем соответствующие интегралы; при их вычислении применяем правило интегрирования по частям для определенного интеграла. В итоге получаем искомые величины:

$$M(X) = \int_0^\infty x\, e^{-x} dx = -\int_0^\infty x\, d(e^{-x}) =$$

$$= -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1,$$

$$D(X) = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx - [M(X)]^2 = -\int_0^\infty x^2 d(e^{-x}) - 1 =$$

$$= -x^2 e^{-x}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty x\, e^{-x} dx - 1 = 2 - 1 = 1,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1.$$

15.5. Основные распределения непрерывных случайных величин

Равномерное распределение

Определение 1. Распределение вероятностей называется *равномерным*, если на интервале возможных значений случайной величины плотность распределения является постоянной.

Пусть на интервале (a, b) плотность распределения является постоянной величиной: $f(x) = C$. Определим значение C из условия (15.35):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b C\, dx = C(b - a) = 1,$$

откуда получаем, что $f(x) = C = 1/(b - a)$. Значит, искомая плотность равномерного распределения дается формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ 1/(b-a), & a < x \le b; \\ 0, & x > b. \end{cases} \qquad (15.39)$$

График плотности равномерного распределения указан на рис. 15.5.

Пример 1. Найти среднеквадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно на интервале (1,5).

Решение. Согласно формуле (15.39), плотность распределения указанной случайной величины является ненулевой и

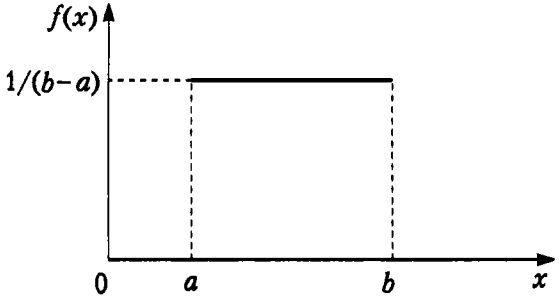


Рис. 15.5

равна 0,25 на интервале $(1, 5)$. По формулам (15.36) и (15.38) последовательно вычисляем:

$$M(Y)=\int_a^b x\,f(x)dx=\int_1^5 x\,0{,}25dx=0{,}125\,x^2\Big|_1^5=0{,}125(25-1)=3,$$

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\int_1^5 x^2 0{,}25dx-3^2=$$

$$=0{,}25\,\frac{x^3}{3}\Big|_1^5-9=1{,}33,\qquad \sigma(X)=\sqrt{1{,}33}=1{,}15.$$

Пример 2. Радиус круга измерен приближенно на интервале (a, b). Полагая, что радиус является случайной величиной X, распределенной равномерно в этом интервале, найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

Решение. Площадь круга также является случайной величиной, вычисляемой по формуле $Y=\pi X^2$; она имеет то же равномерное распределение, что и случайная величина X. По формулам (15.36) и (15.38) получаем

$$M(Y)=\int_a^b y\,f(x)\,dx=\frac{\pi}{b-a}\int_a^b x^2dx=\frac{\pi}{b-a}\int_a^b x^2dx=$$

$$=\frac{\pi}{b-a}\,\frac{b^3-a^3}{3}=\frac{\pi}{3}(a^2+ab+b^2),$$

$$D(Y) = \int_a^b y^2 f(x)\,dx - [M(Y)]^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{b-a}\int_a^b x^4 dx - \frac{\pi^2}{9}(a^2+ab+b^2)^2 = \frac{\pi^2}{b-a}\frac{b^5-a^5}{5} -$$

$$-\frac{\pi^2}{9}(a^2+ab+b^2)^2 = \frac{\pi^2}{45}(b-a)^2(4b^2+7ab+4a^2).$$

Нормальное распределение

Определение 2. *Общим нормальным* распределением вероятностей непрерывной случайной величины X называется распределение с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\alpha)^2/2\sigma^2}. \qquad (15.40)$$

Нормальное распределение задается двумя параметрами: a и σ. Согласно определениям математического ожидания и дисперсии (формулы (15.36) и (15.38)), после выполнения соответствующих интегрирований можно вывести, что для нормального распределения справедливы формулы

$$M(X) = a, \quad D(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

Определение 3. Нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ называется *нормированным*; его плотность равна

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}. \qquad (15.41)$$

Рассмотрим функцию нормального распределения как первообразную плотности распределения вероятностей. Для случая нормированного нормального распределения (15.41) она, согласно формуле (15.34), имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}dz. \qquad (15.42)$$

Поскольку функция (15.41) является четной, то неопределенный интеграл от нее является нечетной функцией, и потому вместо функции распределения (15.42) используется функция Лапласа (см. п. 14.5)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz. \qquad (15.43)$$

Функции (15.41) и (15.43) табулированы (см. Приложение).

График плотности нормального распределения (15.40) для разных значений σ показан на рис. 15.6.

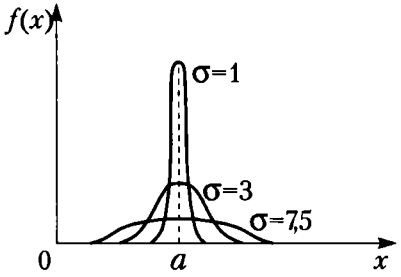


Рис. 15.6

Определение 4. *Модой* $M_o(X)$ называется возможное значение случайной величины X, при котором плотность распределения имеет максимум.

Определение 5. *Медианой* $M_e(X)$ называется такое возможное значение случайной величины X, что вертикальная прямая $x = M_e(X)$ делит пополам площадь, ограниченную кривой плотности распределения.

Нетрудно видеть, что график плотности нормального распределения симметричен относительно прямой $x = a$, и потому и мода и медиана в данном случае совпадают с математическим ожиданием:

$$M_o(X) = M_e(X) = M(X) = a.$$

Пусть случайная величина X задана плотностью нормального распределения (15.40), тогда вероятность того, что X примет значение на интервале (α, β), согласно формуле (15.33),

равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx.$$

Преобразование этой формулы путем введения новой переменной интегрирования $z = (x - a)/\sigma$ приводит к удобной вычислительной формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left((\beta - a)/\sigma\right) - \Phi\left((\alpha - a)/\sigma\right), \qquad (15.44)$$

где Φ — функция Лапласа, определенная по формуле (15.43).

Пример 3. Случайная величина распределена по нормальному закону с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, соответственно равными 10 и 5. Найти вероятность того, что X примет значение на интервале $(20, 30)$.

Решение. Воспользуемся формулой (15.44). По условию $a = 10, \sigma = 5$, $\alpha = 20$ и $\beta = 30$. Следовательно,

$$P(10<X<30)=\Phi((30-10)/5)-\Phi((20-10)/5)=\Phi(4)-\Phi(2).$$

По табл. 2 Приложения находим соответствующие значения функции Лапласа и окончательно получаем

$$P(10 < X < 30) = 0{,}5 - 0{,}4772 = 0{,}0228.$$

Пример 4. Магазин производит продажу мужских костюмов. По данным статистики, распределение по размерам является нормальным с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, соответственно равными 48 и 2. Определить процент спроса на 50-й размер при условии разброса значений этой величины в интервале (49,51).

Решение. По условию задачи $a = 48$, $\sigma = 2$, $\alpha = 49$, $\beta = 51$. Используя формулу (15.44), получаем, что вероятность спроса на 50-й размер в заданном интервале равна

$$P(49 < X < 50) = \Phi((51 - 48)/2) - \Phi((49 - 48)/2) =$$

$$= \Phi(1,5) - \Phi(0,5) = 0{,}4332 - 0{,}1915 = 0{,}2417.$$

Следовательно, спрос на 50-й размер костюмов составит около 24%, и магазину нужно предусмотреть это в общем объеме закупки.

Асимметрия и эксцесс

В прикладных задачах, например в математической статистике, при теоретическом изучении *эмпирических* распределений, отличающихся от нормального распределения, возникает необходимость количественных оценок этих различий. Для этой цели введены специальные безразмерные характеристики.

Определение 6. *Асимметрией* теоретического распределения называется отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратического отклонения:

$$A_s = \mu_3/\sigma^3. \tag{15.45}$$

Определение 7. *Эксцессом* теоретического распределения называется величина, определяемая равенством

$$E_k = \mu_4/\sigma^4 - 3, \tag{15.46}$$

где μ_4 — центральный момент четвертого порядка.

Для нормального распределения $A_s = E_k = 0$. При отклонении от нормального распределения асимметрия положительна, если "длинная" и более пологая часть кривой распределения расположена справа от точки на оси абсцисс, соответствующей моде; если эта часть кривой расположена слева от моды, то асимметрия отрицательна (рис. 15.7, *а*, *б*).

Эксцесс характеризует "крутизну" подъема кривой распределения по сравнению с нормальной кривой: если эксцесс положителен, то кривая имеет более высокую и острую вершину; в случае отрицательного эксцесса сравниваемая кривая имеет более низкую и пологую вершину (рис. 15.7, *в*).

Следует иметь в виду, что при использовании указанных характеристик сравнения опорными являются предположения об

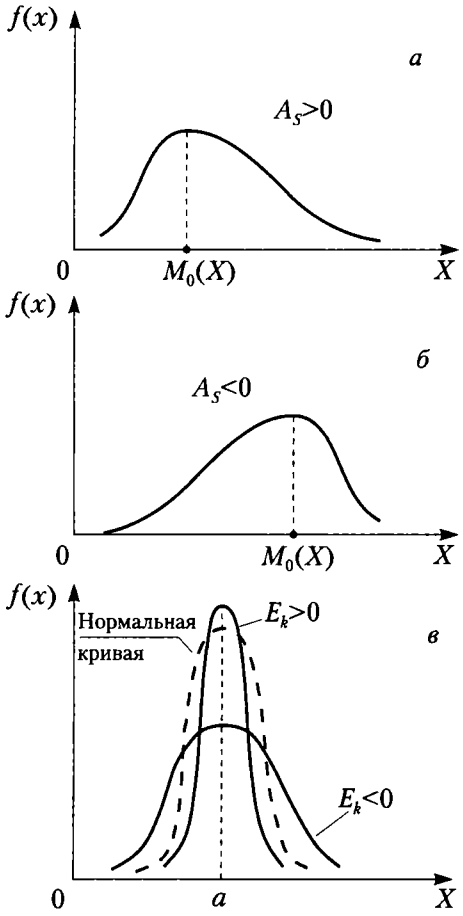


Рис. 15.7

одинаковых величинах математического ожидания и дисперсии для нормального и теоретического распределений.

Пример 5. Пусть дискретная случайная величина X задана законом следующего распределения:

X	1	2	3	5	8
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1.

Найти асимметрию и эксцесс теоретического распределения.

Решение. Найдем сначала математическое ожидание случайной величины:

$$M(X) = \nu_1 = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}1 = 3{,}5.$$

Затем вычисляем начальные и центральные моменты 2, 3 и 4-го порядков и среднее квадратическое отклонение (см. формулы (15.27)–(15.31)):

$$\nu_2=M(X^2)=1\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2+9\cdot 0{,}4+25\cdot 0{,}2+64\cdot 0{,}1=15{,}9;$$

$$\nu_3=M(X^3)=1\cdot 0{,}1+8\cdot 0{,}2+27\cdot 0{,}4+125\cdot 0{,}2+512\cdot 0{,}1=88{,}7;$$

$$\nu_4=M(X^4)=1\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}2+81\cdot 0{,}4+625\cdot 0{,}2+4096\cdot 0{,}1=570{,}3;$$

$$D(X)=\mu_2=\nu_2-\nu_1^2=15{,}9-12{,}25=3{,}65;$$

$$\mu_3=\nu_3-3\nu_2\nu_1+2\nu_1^3=88{,}7-3\cdot 15{,}9\cdot 3{,}5+2\cdot 3{,}5^3=7{,}5;$$

$$\mu_4=\nu_4-4\nu_3\nu_1+6\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4=570{,}3-4\cdot 88{,}7\cdot 3{,}5+$$

$$+6\cdot 15{,}9\cdot 3{,}5^2-3\cdot 3{,}5^4=570{,}3-1241{,}8+1168{,}65-450{,}19=46{,}96;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=1{,}91.$$

Теперь по формулам (15.45) и (15.46) находим искомые величины:

$$A_s=\mu_3/\sigma^3=7{,}5/1{,}91^3=1{,}076;$$

$$E_k=\mu_4/\sigma^4-3=40{,}96/1{,}91^4-3=0{,}53.$$

В данном случае "длинная" часть кривой распределения расположена справа от моды, причем сама кривая является несколько более островершинной, чем нормальная кривая с теми же величинами математического ожидания и дисперсии.

15.6. Задачи математической статистики

Математическая статистика является частью общей прикладной математической дисциплины "Теория вероятностей и математическая статистика", однако задачи, решаемые ею, носят специфический характер. Если теория вероятностей исследует явления, *полностью* заданные их моделью, то в математической статистике вероятностная модель определена с *точностью до неизвестных параметров*. Отсутствие сведений о параметрах компенсируется "пробными" испытаниями, на основе которых и восстанавливается недостающая информация. Цель математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Первой задачей математической статистики является указание методов сбора и группировки статистических сведений, которые получены в результате экспериментов или наблюдений. Вторая задача — это разработка методов анализа статистических данных: оценки неизвестных вероятности события, а также функции и параметров распределения; оценка зависимости случайной величины от других случайных величин; проверка статистических гипотез о виде и величинах параметров неизвестного распределения. Рассмотрим некоторые из этих вопросов.

Выборки

На практике сплошное исследование (каждого объекта из интересующей нас совокупности) проводят крайне редко. К тому же если эта совокупность содержит большое число объектов или исследование объекта требует нарушения его функционального стандарта, то сплошное исследование нереально. В таких случаях из всей совокупности случайно отбирают ограниченное число объектов и подвергают их исследованию.

Введем основные понятия, связанные с выборками. *Генеральной совокупностью* называется совокупность объектов, из которых производится выборка. *Выборочной совокупностью* (*выборкой*) называется совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности. Число объектов в совокупности называется ее *объемом*.

Пример 1. Пусть из 2000 изделий отобрано для обследования 100 изделий. Тогда объем генеральной совокупности $N = 2000$, а объем выборки $n = 100$.

Выборку можно осуществлять двумя способами. Если после исследования объект из выборки возвращается в генеральную совокупность, то такая выборка называется *повторной*; если объект не возвращается в генеральную совокупность, то выборка называется *бесповторной*.

Выборка называется *репрезентативной* (представительной), если по ее данным можно достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности.

Способы отбора

Различают два способа отбора: без расчленения генеральной совокупности на части и с расчленением. К первому относятся *простые случайные* отборы (либо повторный, либо бесповторный), когда объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности; такой отбор можно производить с использованием таблицы случайных чисел.

Второй способ отбора включает следующие разновидности, соответствующие способам расчленения генеральной совокупности. Отбор, при котором объекты отбираются из каждой "типической" части генеральной совокупности, называется *типическим*. Например, отбор деталей из продукции каждого станка, а не из их общего количества является типическим. Если генеральную совокупность делят на число групп, равное объему выборки, с последующим отбором из каждой группы по одному объекту, то такой отбор называется *механическим*. *Серийным* называется отбор, при котором объекты отбираются не по одному, а сериями; этот способ используется, когда исследуемый признак имеет незначительные колебания в различных сериях.

На практике часто употребляется комбинирование указанных выше способов отбора. Например, генеральную совокупность разбивают на серии одинакового объема, затем случайным образом отбирают несколько серий и в завершение случайным извлечением отдельных объектов составляют выборку. Конкретная комбинация способов отбора объектов из генеральной совокупности определяется требованием репрезентативности выборки.

Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема n, в которой значение x_1 некоторого исследуемого признака X наблюдалось n_1 раз, значение x_2 — n_2 раз, ..., значение x_k — n_k раз. Значения x_i называются *вариантами*, а их последовательность, записанная в возрастающем порядке, — *вариационным рядом*. Числа n_i называются *частотами*, а их

отношения к объему выборки

$$W_i = n_i/n \tag{15.47}$$

— *относительными частотами.* При этом $\sum n_i = n$. *Модой* M_o называется варианта, имеющая наибольшую частоту. *Медианой* m_e называется варианта, которая делит вариационный ряд на две части с одинаковым числом вариант в каждой. Если число вариант нечетно, т.е. $k = 2l + 1$, то $m_e = x_{l+1}$; если же число вариант четно ($k = 2l$), то $m_e = (x_l + x_{l+1})/2$. *Размахом варьирования* называется разность между максимальной и минимальной вариантами или длина интервала, которому принадлежат все варианты выборки:

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \tag{15.48}$$

Перечень вариант и соответствующих им частот называется *статистическим распределением выборки.* Здесь имеется аналогия с законом распределения случайной величины: в теории вероятностей — это соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике — это соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами (относительными частотами). Нетрудно видеть, что сумма относительных частот равна единице: $\sum W_i = 1$.

Пример 2. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	4	7	8	12	17
n_i	2	4	5	6	3.

Найти распределение относительных частот и основные характеристики вариационного ряда.

Решение. Найдем объем выборки: $n = 2+4+5+6+3 = 20$. Относительные частоты соответственно равны $W_1 = 2/20 = 0{,}1$; $W_2 = 4/20 = 0{,}2$; $W_3 = 5/20 = 0{,}25$; $W_4 = 6/20 = 0{,}3$; $W_5 = 3/20 = 0{,}15$. Контроль: $0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}15 = 1$. Искомое распределение относительных частот имеет вид

x_i	4	7	8	12	17
W_i	0,1	0,2	0,25	0,3	0,15.

Мода этого вариационного ряда равна 12. Число вариант в данном случае нечетно: $k = 2 \cdot 2 + 1$, поэтому медиана $m_e = x_3 = 8$. Размах варьирования, согласно формуле (15.48), $R = 17 - 4 = 13$.

Эмпирическая функция распределения

Пусть n_x — число наблюдений, при которых значение признака X меньше x. При объеме выборки, равном n, относительная частота события $X < x$ равна n_x/n.

Определение 8. Функция

$$F^*(x) = n_x/n, \tag{15.49}$$

определяющая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$, называется *эмпирической функцией распределения* или функцией распределения выборки.

В отличие от эмпирической функции распределения $F^*(x)$ выборки функция распределения $F(x)$ генеральной совокупности называется *теоретической функцией распределения.* Различие между ними состоит в том, что функция $F(x)$ определяет вероятность события $X < x$, а $F^*(x)$ — относительную частоту этого события. Из теоретических результатов общей теории вероятностей (закон больших чисел) следует, что при больших n вероятность отличия этих функций друг от друга близка к единице:

$$\lim_{n\to\infty} P[|F(x) - F^*(x)| < \varepsilon] = 1, \quad \varepsilon > 0. \tag{15.50}$$

Нетрудно видеть, что $F^*(x)$ обладает всеми свойствами $F(x)$, что вытекает из ее определения (15.49):

1) значения $F^*(x)$ принадлежат отрезку $[0, 1]$;

2) $F^*(x)$ является неубывающей функцией;

3) если x_1 — наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$; если x_k — максимальная варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Сама же функция $F^*(x)$ служит для оценки теоретической функции распределения $F(x)$ генеральной совокупности.

Пример 3. Построить эмпирическую функцию по заданному распределению выборки:

x_i	2	4	6
n_i	10	15	25.

Решение. Находим объем выборки: $n = 10 + 15 + 25 = 50$. Наименьшая варианта равна 2, поэтому $F^*(x) = 0$ при $x \leq 2$. Значение $X < 4$ (или $x_1 = 2$) наблюдалось 10 раз, значит, $F^*(x) = 10/50 = 0{,}2$ при $2 < x < 4$. Значения $X < 6$ (а именно $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$) наблюдались $10 + 15 = 25$ раз, значит, при $4 < x < 6$ функция $F^*(x) = 25/50 = 0{,}5$. Поскольку $X = 6$ — максимальная варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > 6$. Напишем формулу искомой эмпирической функции:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ 0{,}2, & 2 < x \leq 4; \\ 0{,}5, & 4 < x \leq 6; \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

График этой функции показан на рис. 15.8.

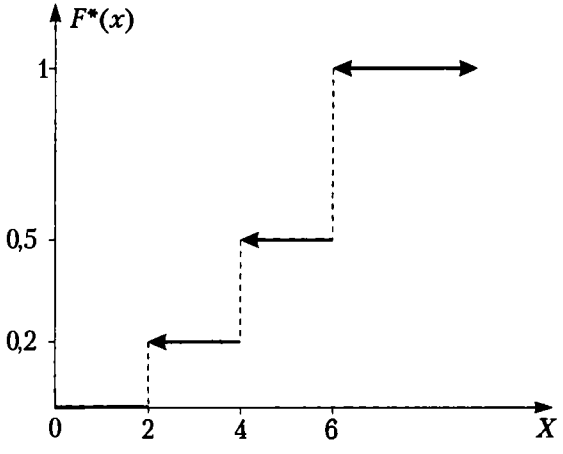


Рис. 15.8

Полигон и гистограмма

Каждую пару значений (x_i, n_i) из распределения выборки можно трактовать как точку на координатной плоскости. Точно так же можно рассматривать и пары значений (x_i, W_i) относительного распределения выборки. Ломаная, отрезки которой соединяют точки (x_i, n_i), называется *полигоном частот.* Ломаная, соединяющая на координатной плоскости точки (x_i, W_i), называется *полигоном относительных частот.* На рис. 15.9 показан полигон относительных частот для распределения, приведенного в примере 2.

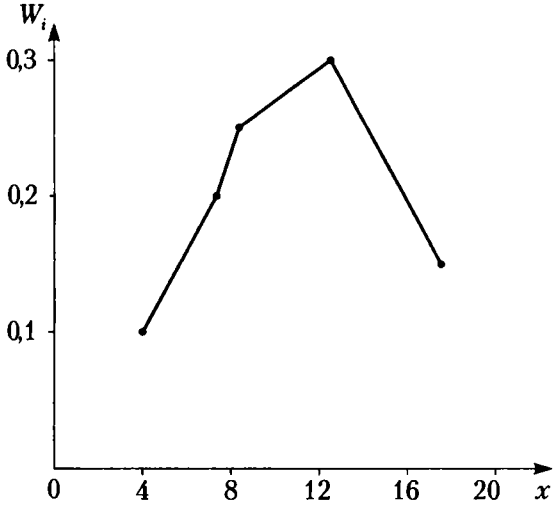


Рис. 15.9

Для случая непрерывного признака X удобно разбить интервал $(x_{\min}, x_{\max})$ его наблюдаемых значений на несколько частичных интервалов длиной h каждый и найти для каждого из этих интервалов сумму частот n_j, попавших в него. Ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников с основаниями длиной h и высотами n_j/h (плотность частоты), называется *гистограммой* частот. Геометрический смысл гистограммы: нетрудно видеть, что площадь ее равна сумме всех частот или объему выборки. На рис. 15.10 изображена гистограмма объема $n = 100$.

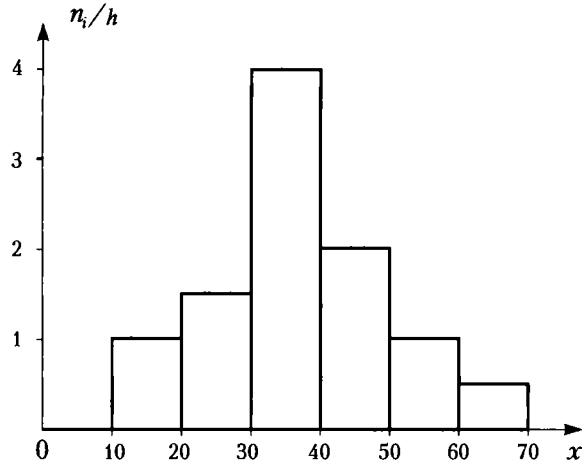


Рис. 15.10

Аналогичным образом определяется и *гистограмма относительных частот*; в этом случае высоты прямоугольников, составляющих ступенчатую фигуру, определяются отношениями сумм относительных частот, попадающих в интервал $(x_{\min} + (j-1)h, x_{\min} + jh)$, к длине интервала h, т.е. величинами W_j/h. Нетрудно видеть, что площадь гистограммы относительных частот равна единице (сумме относительных частот выборки).

Статистические оценки параметров распределения

Значения количественного признака x_1, x_2, ..., x_k в выборке можно рассматривать как независимые случайные величины. В таком случае нахождение статистической оценки неизвестного параметра теоретического распределения означает отыскание функции от наблюдаемых случайных величин, которая и даст нам приближенное значение искомого параметра. Укажем виды статистических оценок.

Несмещенной называется статистическая оценка ϑ_*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру ϑ при любой выборке:

$$M(\vartheta_*) = \vartheta. \tag{15.51}$$

Смещенной называется оценка, при которой условие (15.51) не выполнено. *Эффективной* называется оценка, которая имеет минимальную дисперсию при заданном объеме выборки n. *Состоятельной* называется статистическая оценка типа (15.50), которая при $n > \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Теперь укажем виды числовых характеристик оценок. Прежде всего, это средние. *Генеральная средняя* для изучаемого количественного признака X по генеральной совокупности

$$\bar{x}_{\text{г}} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_N)/N$$

и *выборочная средняя*

$$\bar{x}_{\text{в}} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n.$$

Если значения признака x_1, x_2, ..., x_k в выборке имеют соответственно частоты n_1, n_2, ..., n_k, то последнюю формулу можно переписать в виде

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i. \qquad (15.52)$$

Можно показать, что выборочная средняя (15.52) является несмещенной оценкой; это аналог математического ожидания случайной величины.

Введем в рассмотрение величины, характеризующие отклонение значений количественного признака X от своего среднего значения. Это *генеральная дисперсия*:

$$D_{\text{г}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_{\text{г}})^2$$

и *выборочная дисперсия*:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2. \qquad (15.53)$$

Можно показать, что для вычисления этих характеристик справедливы более удобные формулы, аналогичные дисперсии

случайной величины. Так, формула (15.53) принимает вид

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - (\bar{x}_{\text{в}})^2. \qquad (15.54)$$

Генеральное среднее квадратическое отклонение определяется как

$$\sigma_{\text{г}} = \sqrt{D_{\text{г}}}.$$

Аналогично вводится и *выборочное среднее квадратическое отклонение*

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}. \qquad (15.55)$$

Пример 4. Выборка задана таблицей распределения

x_i	1	2	3	5
n_i	15	20	10	5.

Найти выборочные характеристики: среднюю, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. По формуле (15.52) сначала находим $\bar{x}_{\text{в}}$:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{15\cdot 1 + 20\cdot 2 + 10\cdot 3 + 5\cdot 5}{15+20+10+5} = \frac{110}{50} = 2{,}2.$$

Затем по формулам (15.54) и (15.55) находим две другие искомые величины:

$$D_{\text{в}}=(15\cdot 1+20\cdot 4+10\cdot 9+5\cdot 25)/50-2{,}2^2=6{,}2-4{,}84=1{,}36,$$

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} = \sqrt{1{,}36} \approx 1{,}166.$$

Виды дисперсий

Часто значения количественного признака X совокупности разбиваются на определенное число групп. Каждую группу можно рассматривать как самостоятельную выборку, и для

каждой группы можно определить групповую среднюю и дисперсию. Пусть r — число групп. *Групповой дисперсией* называется дисперсия значений признака в группе относительно групповой средней:

$$D_j = \frac{1}{N_j}\sum_{i=1}^{N_j} n_i(x_i - \bar{x}_j)^2,\ j = 1, 2, \ldots, r, \tag{15.56}$$

где n_i — частота значения x_i в группе, j — номер группы, $\bar{x}_j$ — групповая средняя j-й группы, $N_j = \sum n_i$ — объем j-й группы.

Зная дисперсию каждой группы, можно определить их среднюю арифметическую. *Внутригрупповой дисперсией* называется средняя арифметическая дисперсий, где каждое слагаемое входит с весом объема группы:

$$D_{\text{внгр}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} N_j D_j. \tag{15.57}$$

В свою очередь, зная для всех групп средние $\bar{x}_j$ и общую среднюю $\bar{x}$, введем еще одно понятие. *Межгрупповой дисперсией* называется дисперсия групповых средних относительно общей средней:

$$D_{\text{мгр}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} N_j(\bar{x}_j - \bar{x})^2, \tag{15.58}$$

где $n = \sum\limits_{i=1}^{r} N_j$ — объем всей совокупности.

Для общей дисперсии всей совокупности справедлива следующая теорема, которая приводится здесь без доказательства.

ТЕОРЕМА 15.6. *Если совокупность состоит из нескольких групп, то общая дисперсия равна сумме внутригрупповой и межгрупповой дисперсий:*

$$D_{\text{общ}} = D_{\text{мгр}} + D_{\text{внгр}}, \tag{15.59}$$

где слагаемые в правой части определяются соответственно формулами (15.57) *и* (15.58).

Поясним сказанное в этом пункте на примере.

Пример 5. Совокупность состоит из двух следующих групп:

Первая группа				Вторая группа		
x_i	2	4	5	x_i	4	9
n_i	1	7	2	n_i	3	2

Найти групповые, внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсии.

Решение. Объемы групп соответственно равны N_1=10 и N_2=5. Общий объем совокупности: $n = 10 + 5 = 15$. Найдем групповые средние:

$$\bar{x}_1 = (1 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 2 \cdot 5)/10 = 4; \; \bar{x}_2 = (3 \cdot 4 + 2 \cdot 9)/5 = 6.$$

Теперь находим групповые дисперсии по формуле (15.56):

$$D_1 = (1 \cdot (2-4)^2 + 7 \cdot (4-4)^2 + 2 \cdot (5-4)^2)/10 = 0{,}6;$$
$$D_2 = (3 \cdot (4-6)^2 + 2 \cdot (9-6)^2)/5 = 6.$$

Внутригрупповая дисперсия, согласно формуле (15.57), равна:

$$D_{\text{внгр}} = (10 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 6)/15 = 2{,}4.$$

Теперь найдем межгрупповую дисперсию по формуле (15.58), для чего сначала определим общую среднюю:

$$\bar{x} = (1 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9)/15 = 70/15 = 14/3;$$
$$D_{\text{мгр}} = (10 \cdot (4 - 14/3)^2 + 5 \cdot (6 - 14/3)^2)/15 = 8/9.$$

Наконец, общая дисперсия, согласно формуле (15.59), равна:

$$D_{\text{общ}} = 2{,}4 + 8/9 \approx 3{,}29.$$

Эмпирические моменты

Для вычисления сводных характеристик выборок используют эмпирические моменты, аналогичные соответствующим теоретическим моментам. *Обычным эмпирическим моментом порядка s* называется среднее значение s-х степеней разностей

$x_i - C$, где x_i — наблюдаемая варианта, C — произвольная постоянная (ложный нуль — либо мода, либо любая варианта, расположенная примерно в середине вариационного ряда):

$$M'_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - C)^s. \qquad (15.60)$$

При $C = 0$ имеем *начальные эмпирические моменты порядка* s; в частности, в случае $s = 1$

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \bar{x}_{\text{в}}.$$

Центральным эмпирическим моментом порядка s называется обычный момент (15.60) при $C = \bar{x}_{\text{в}}$:

$$m_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - x_{\text{в}})^s. \qquad (15.61)$$

В частности,

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - x_{\text{в}})^2 = D_{\text{в}}.$$

Иными словами, выборочная дисперсия равна центральному эмпирическому моменту второго порядка. Центральные моменты выражаются через обычные по формулам, полностью аналогичным (15.19) и (15.20).

Асимметрия и эксцесс эмпирического распределения

Нормальное распределение является одним из самых распространенных в применениях математической статистики. Для оценки отклонения эмпирического распределения от нормального используют характеристики, аналогичные для теоретического распределения (см. предыдущий п. 15.6).

Асимметрия эмпирического распределения определяется следующим равенством:

$$a_s = m_3/\sigma_{\text{в}}^3. \qquad (15.62)$$

Эксцесс эмпирического распределения определяется следующим равенством:

$$e_k = m_4/\sigma_{\text{в}}^4 - 3. \qquad (15.63)$$

В формулы (15.62) и (15.63) входят центральные эмпирические моменты, определяемые формулами (15.61), а также выборочное среднее квадратическое отклонение (15.55).

Пример 6. Найти асимметрию и эксцесс эмпирического распределения:

варианта	1	2	3	4	5	6	10
частота	5	10	15	35	16	15	4

Решение. Найдем сначала $\bar{x}_{\text{в}}$ и $\sigma_{\text{в}}$ с использованием формул (15.52)–(15.55):

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{5\cdot 1+10\cdot 2+15\cdot 3+35\cdot 4+16\cdot 5+15\cdot 6+4\cdot 10}{5+10+15+35+16+15+4} = 4,2;$$

$$D_{\text{в}} = \frac{5\cdot 1+10\cdot 4+15\cdot 9+35\cdot 16+16\cdot 25+15\cdot 36+4\cdot 100}{100} - 4{,}2^2 = 3{,}16;$$

$$\sigma_{\text{в}} = 1,787.$$

Далее, используя формулу (15.61), определяем центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядков:

$$m_3 = (5\cdot(-3,2)^3+10\cdot(-2,2)^3+15\cdot(-1,2)^3+35\cdot(-0,2)^3+$$

$$+16\cdot 0,8^3+15\cdot 1,8^3+4\cdot 5,8^3)/100 = 579,6/100 = 5,796;$$

$$m_4 = (5\cdot(-3,2)^4+10\cdot(-2,2)^4+15\cdot(-1,2)^4+35\cdot(-0,2)^4+16\cdot 0,8^4+$$

$$+15\cdot 1,8^4+4\cdot 5,8^4)/100 = 5480,32/100 = 54,8032.$$

Затем по формулам (15.62) и (15.63) находим искомые величины:

$$a_s = 5,796/1,787^3 = 1,016;$$

$$e_k = 54,8032/1,787^4 = 5,374.$$

Доверительный интервал

Заметим, что все оценки, приведенные выше, определяются одним числом, т.е. являются *точечными*. При малых объемах выборки точечная оценка может приводить к большим ошибкам и значительно отличаться от оцениваемого параметра. Более широкое применение получил метод доверительных интервалов, разработанный американским статистиком Ю. Нейманом. В дальнейшем этот метод нам понадобится.

Определение 1. *Доверительным интервалом для параметра* θ с надежностью оценки p называется числовой промежуток $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, содержащий истинное значение данного параметра с вероятностью, равной p:

$$P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = p, \tag{15.64}$$

где θ^* — оценка неизвестного параметра θ (например, точечная оценка), $\delta > 0$ — некоторое число.

Обычно надежность оценки p задается числом, близким к единице. Иными словами, доверительный интервал покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью. Число $\alpha = 1 - p$ называется уровнем значимости. Общая схема построения доверительных интервалов сводится к следующему.

1. Рассматриваются теоретические выборки случайных величин, с распределениями которых связан параметр θ.

2. Подбирается случайная величина Y с известным распределением, значения которой определяются выборками и параметром θ: $Y = Y(\theta)$.

3. По известному распределению Y подбираются числа Y_1 и Y_2 такие, чтобы выполнялось равенство $P(Y_1 < Y(\theta) < Y_2) = p$.

4. По значениям Y_1 и Y_2 определяется число $\delta > 0$ при известном значении θ^*. Таким образом условие (15.64) будет выполнено и доверительный интервал построен.

Пример 7. Найти доверительные интервалы надежности $p = 0{,}95$ и $p_2 = 0{,}99$ для нормальной случайной величины X с функцией распределения $N(0, 1)$.

Решение. В первом случае $p/2 = 0{,}475$; из равенства $\Phi(x) = 0{,}475$ по таблице 1 Приложения определяем $x = 1{,}96$,

т.е. при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ $X \in (-1{,}96; 1{,}96)$. Во втором случае из аналогичного равенства $\Phi(x) = 0{,}495$ получаем $x = 2{,}58$, т.е. при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ $X \in (-2{,}58; 2{,}58)$.

15.7. Статистические оценки статистических гипотез

Обычно в практических задачах не встречаются случайные величины, распределения которых точно соответствовали бы теоретическим распределениям. Последние являются математическими моделями реальных распределений. Подбор таких моделей и анализ их адекватности моделируемым случайным величинам является одной из основных задач математической статистики, которая, в свою очередь, сводится к проверке предположений (гипотез) о виде модели распределения и о его параметрах.

Определение 1. *Статистической* называется гипотеза о виде неизвестного распределения, о параметрах известных распределений, об отношениях между случайными величинами и т.д.

Виды статистических гипотез

Определение 2. *Нулевой (основной)* гипотезой называется выдвинутая гипотеза H_0.

Определение 3. *Конкурирующей (альтернативной)* гипотезой называется гипотеза H_1, которая противоречит нулевой гипотезе H_0.

Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении о том, что математическое ожидание нормального распределения $a = 5$, то конкурирующая гипотеза может состоять в предположении, что $a \neq 5$. В краткой записи: $H_0\colon a = 5$; $H_1\colon a \neq 5$.

Гипотезы разделяют на *простые* (содержащие только одно предположение) и *сложные* (состоящие из конечного или бесконечного числа простых гипотез). Наиболее распространенными являются два типа гипотез.

1. *Параметрические гипотезы*: при известном виде распределения предположения о неизвестных характеристиках этих распределений.

2. Для известной случайной величины (выборки) предположения о виде ее распределения.

Общая схема проверки статистических гипотез

Определение 4. *Статистическим критерием* (или просто критерием) называют случайную величину T, которая служит для проверки статистических гипотез.

Укажем основные моменты проверки статистических гипотез.

1. Для основной гипотезы H_0 формулируется альтернативная гипотеза H_1.

2. Выбирается малое положительное число α — уровень значимости проверки. Обычно α колеблется в пределах от 0,01 до 0,05.

3. Рассматриваются теоретические выборки значений случайных величин, о которых сформулирована гипотеза H_0, и выбирается (формулируется) случайная величина T. Значения и распределение T полностью определяются по выборкам при предположении о верности гипотезы H_0. Величина T называется *статистикой* или *тестом* критерия.

4. На числовой оси задают интервал D такой, что вероятность попадания теста T в этот интервал равна $p = 1 - \alpha$:

$$P(T \in D) = 1 - \alpha. \tag{15.65}$$

Интервал D называется *областью принятия гипотезы* H_0, а оставшаяся область числовой оси — *критической областью.* В ряде случаев за область D принимают один из интервалов: $(-\infty, t_{cr}]$, $[-t_{cr}, t_{cr}]$, $[t_{cr}, \infty)$, где число t_{cr} — *критическое значение теста проверки.* Соответственно этим промежуткам критерий проверки называется правосторонним, двусторонним или левосторонним. Соответствующие области отклонения гипотезы H_0: (t_{cr}, ∞), $(-\infty, t_{cr}) \cup (t_{cr}, \infty)$ и $(-\infty, t_{cr})$.

5. По реализациям анализируемых теоретических выборок вычисляется конкретное (наблюдаемое) значение теста T (обозначим его t_c) и проверяется выполнение условия (15.65): если оно выполняется, то гипотеза H_0 принимается в том смысле, что она не противоречит опытным данным; если же условие

(15.65) не выполняется, то полагается, что гипотеза H_0 неверна и вероятность этого события определена неверно.

Из представленной выше схемы следует, что при проверке гипотезы H_0 возможны следующие ошибки:

— *ошибка первого рода* — отвергнуть гипотезу H_0 при ее правильности, вероятность этой ошибки равна α;

— *ошибка второго рода* — принятие гипотезы H_0 при правильности альтернативной гипотезы H_1.

Пусть вероятность ошибки второго рода равна β, тогда число $1 - \beta$ называют *мощностью* критерия. Чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность ошибки второго рода. При выбранном уровне значимости критическую область следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной.

Можно показать, что в случае ограниченного интервала области принятия гипотезы H_0 (двусторонней критической области) существует связь интервала D, определяемого по (15.65) с доверительным интервалом, определяемым по формуле (15.64).

Типы статистических критериев проверки гипотез

Любой критерий не доказывает справедливость проверяемой гипотезы H_0, а лишь устанавливает на принятом уровне значимости ее согласие или несогласие с данными наблюдений. Укажем здесь наиболее употребительные критерии проверки статистических гипотез.

1. *Критерий* χ^2, или *критерий Пирсона.*
2. *Критерий Стьюдента.*
3. *Критерий Фишера.*
4. *Критерий Колмогорова.*

Обычно один из указанных критериев и употребляют при составлении теста критерия проверки (см. п. 4 схемы проверки в предыдущем разделе). Основой для составления соответствующих формул критериев Пирсона, Стьюдента и Фишера являются соответствующие распределения.

Распределение χ^2 — Пирсона

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — нормально распределенные независимые случайные величины с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$. Тогда сумма их квадратов

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 \tag{15.66}$$

называется χ^2-распределением с n степенями свободы. Доказано, что плотность этого распределения определяется формулой:

$$f(x) = x^{n/2-1}e^{-x/2}/\left(2^{n/2}\Gamma(n/2)\right), \quad x \geq 0, \tag{15.67}$$

где $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ — гамма-функция.

Распределение χ^2 определяется только одним параметром — числом степеней свободы n.

Распределение Стьюдента

Пусть Z — нормальная случайная величина с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$, а V — независимая от Z величина, распределенная по закону χ^2 с n степенями свободы. Тогда случайная величина, распределенная по закону

$$T = Z/\sqrt{V/n}, \tag{15.68}$$

называется распределением Стьюдента (псевдоним английского статистика В. Госсета) с n степенями свободы. Плотность этого распределения дается формулой:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left((n+1)/2\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \quad x \geq 0. \tag{15.69}$$

С возрастанием n распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному.

Распределение Фишера

Пусть U и V — независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 со степенями свободы m и n соответственно. Тогда величину, распределенную по закону

$$F = \frac{U/m}{V/n}, \tag{15.70}$$

называют распределением Фишера со степенями свободы m и n. Плотность этого распределения дается формулой:

$$f(x) = \frac{\Gamma((n+m)/2)m^{m/2}n^{n/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\, x^{m/2-1}(mx+1)^{-(m+n)/2}, \quad x \geq 0. \tag{15.71}$$

Рассмотрим примеры проверки статистических гипотез с использованием критериев χ^2 и Стьюдента.

Пример 1. Заданы эмпирические и теоретические частоты (n_i и n'_i) при числе групп выборки $s = 8$:

n_i	6	13	38	74	106	85	30	14
n'_i	3	14	42	82	99	76	37	13

При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности.

Решение. Наблюдаемое значение критерия вычисляется по формуле

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{s}(n_i - n'_i)^2/n_i, \tag{15.72}$$

или, что то же самое, по упрощенной формуле

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{s}(n_i^2/n'_i) - n, \tag{15.73}$$

где $n = \sum n_i = \sum n'_i$ — объем выборки. В нашем случае $n = 366$. Используя данные исходной таблицы, получаем:

$$\chi^2_{\text{набл}} = 36/3 + 169/14 + 1444/42 + 5476/82 + 11\,236/99 + \\ + 7225/76 + 900/37 + 196/13 - 366 = 373{,}19 - 366 = 7{,}19.$$

Далее находим число степеней свободы $k = s - 3 = 8 - 3 = 5$ (число групп выборки минус один — это число степеней свободы распределения Пирсона — и минус еще два, так как нормальное распределение характеризуется двумя параметрами: математическим ожиданием и дисперсией). По таблице критических точек распределения χ^2 (см. Приложение) по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы 5 находим критическое значение теста $\chi^2_{cr} = 11{,}1$. Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{cr}$, то оснований отвергать нулевую гипотезу H_0 нет, т.е. расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Иными словами, гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности не противоречит данным наблюдений.

Пример 2. Для независимых наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ проверим гипотезу H_0: математическое ожидание $m = m_0$ при двусторонней альтернативной гипотезе H_1: $m \neq m_0$. Уровень значимости α задан.

Решение. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$T = (\bar{x} - m_0)\sqrt{n}/s, \tag{15.74}$$

где s — оценка среднего квадратического отклонения. Величина T имеет распределение Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы. По таблице распределения Стьюдента, при заданном n, находим критическую точку $t_{1-\alpha,n-1} = t_p$, определяющую доверительный интервал

$$P(|T(n-1)| < t_p) = p = 1 - \alpha.$$

Тогда критическая область определяется неравенством $|T(n-1)| > t_p$.

Гипотеза H_0 не отклоняется на уровне значимости α, если

$$|(\bar{x} - m_0)\sqrt{n}/s| < t_p \text{ или } m_0 \in (\bar{x} - t_p s/\sqrt{n},\ \bar{x} + t_p s/\sqrt{n}). \tag{15.75}$$

В противном случае, если гипотетическое значение m_0 не покрывается доверительным интервалом (15.64) с заданной надежностью p, то гипотеза H_0 отклоняется.

15.8. Закон больших чисел

Оказывается, что при некоторых достаточно общих условиях суммарное поведение большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится почти закономерным.

Неравенство Чебышева

Рассмотрим дискретную случайную величину, заданную таблицей распределения

$$\begin{array}{cccc} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \dots & p_n. \end{array}$$

Представляет интерес оценка вероятности того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания (вероятностного среднего) не превышает по абсолютной величине заданного положительного числа ε.

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше некоторого числа $\varepsilon > 0$, не менее величины $1 - D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - D(X)/\varepsilon^2. \qquad (15.76)$$

Неравенство Чебышева предваряет теорему Чебышева: для большого числа независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, можно считать почти достоверным событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет сколь угодно малым по абсолютной величине:

$$|(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) - [M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)]|/n < \varepsilon. \qquad (15.77)$$

Иными словами, отдельные случайные величины могут иметь значительный разброс, но их среднее арифметическое рассеяно мало.

Закон больших чисел

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Теорема Якоба Бернулли, известная как *закон больших чисел*, устанавливает относительную частоту появления этих событий. Если число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым:

$$\lim_{n\to\infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1. \qquad (15.78)$$

Центральная предельная теорема

Особое значение в теории случайных величин играет теорема, сформулированная русским математиком А.М. Ляпуновым, известная как *центральная предельная теорема.*

Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

Центральная предельная теорема объясняет широкое распространение закона нормального распределения случайных величин.

15.9. Цепи Маркова

Основные понятия

Пусть некоторая система в каждый момент времени находится в одном из k состояний, причем в результате испытаний (изменения ее состояний) она переходит из одного состояния в другое: из состояния i в состояние j $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$. Пусть также совокупность всех k состояний системы образует полную группу. Обозначим через $p_{ij}(s)$ условную вероятность того, что в s-м испытании система будет находиться в состоянии j, если после $(j-1)$-го испытания она находилась в состоянии i.

Цепью Маркова называется последовательность испытаний, в каждом из которых система принимает только одно из k состояний, причем вероятность $p_{ij}(s)$ не зависит от результатов ранее проведенных испытаний. Различают цепи Маркова

с *дискретным временем* (изменение состояний происходит в определенные фиксированные моменты времени) и с *непрерывным временем* (изменение состояний происходит в любые случайные возможные моменты времени).

Однородной называют цепь Маркова, если условная вероятность $p_{ij}(s)$ не зависит от номера испытания s. В этом случае пишут просто p_{ij}. Далее мы будем рассматривать именно однородные цепи Маркова. Тогда p_{ij} называют *переходной вероятностью* (вероятность того, что система из состояния i в итоге следующего испытания перейдет в состояние j). При этом система может оставаться в состоянии i (в таком случае $j = i$).

Введем *матрицу перехода системы*, которая содержит все переходные вероятности данной системы:

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix} \tag{15.79}$$

Поскольку элементами строк этой матрицы являются вероятности событий, образующих полную группу, то сумма вероятностей этих событий равна единице, т.е.

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{15.80}$$

Пример 1. Рассмотрим матрицу перехода

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Здесь первая строка состоит из величин вероятностей перехода системы из состояния 1 в состояния 1, 2 и 3 соответственно, вторая строка содержит вероятности перехода из состояния 2 в состояния 1, 2 и 3, третья строка — вероятности перехода из состояния 3 в состояния 1, 2 и 3.

Равенство Маркова

Обозначим через $P_{ij}(n)$ вероятность того, что через n шагов (испытаний) система перейдет из состояния i в состояние j. Очевидно, что $P_{ij}(1) = p_{ij}$. Пусть из первоначального состояния i система перейдет за m шагов в промежуточное состояние r с вероятностью $P_{ir}(m)$, после чего за оставшиеся $(n-m)$ шагов она перейдет в конечное состояние j с вероятностью $P_{rj}(n-m)$. Тогда по формуле полной вероятности получим

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m)P_{rj}(n-m). \qquad (15.81)$$

Эту формулу называют *равенством Маркова.*

Зная все переходные вероятности $P_{ij}(1) = p_{ij}$, т.е. матрицу перехода (15.79), можно последовательно определить вероятности перехода в любое состояние. Сначала положим в равенстве (15.81) $n = 2$ и $m = 1$, затем $n = 3$ и $m = 2$ и т.д. В матричной форме это имеет вид:

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_1^2, \quad \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1^3, \ldots, \quad \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_1^n. \qquad (15.82)$$

Справедливо утверждение: для однородной марковской цепи имеет место следующая формула связи между начальным состоянием системы и ее состоянием на n-м шаге перехода из состояния в состояние $(n = 1, 2, \ldots)$

$$(p_1(n), p_2(n), \ldots, p_k(n)) = (p_1(0), p_2(0), \ldots, p_k(0))\mathcal{P}_1^n, \qquad (15.83)$$

т.е. вектор вероятностей состояний системы на n-м шаге равен произведению вектора нулевого состояния системы на n-ю степень матрицы перехода.

Цепи Маркова имеют применение в расчетах вероятностей состояния финансовых систем, систем обслуживания и т.д.

Пример 2. Пусть банк может находиться в одном из трех состояний по величине процентных ежеквартальных ставок: 3%, 4% и 5% с заданной матрицей перехода

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Найти вероятность состояния банка по процентным ставкам через год, если в конце предшествующего года процентная ставка составляла 4 %.

Решение. Начальное распределение вероятностей имеет вид:

$$(p_1(0), p_2(0), p_3(0)) = (0, 1, 0).$$

Вероятности состояний банка по истечении четырех кварталов определяются по формуле (15.83) при $k = 3$ и $n = 4$:

$$(p_1(4), p_2(4), p_3(4)) = (p_1(0), p_2(0), p_3(0))\mathcal{P}_1^4 = (0, 1, 0)\mathcal{P}_1^2\mathcal{P}_1^2 =$$

$$= (0, 1, 0)\begin{pmatrix} 0,26 & 0,42 & 0,32 \\ 0,21 & 0,42 & 0,37 \\ 0,16 & 0,37 & 0,47 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,26 & 0,42 & 0,32 \\ 0,21 & 0,42 & 0,37 \\ 0,16 & 0,37 & 0,47 \end{pmatrix} =$$

$$= (0, 1, 0)\begin{pmatrix} 0,2070 & 0,4040 & 0,3890 \\ 0,2020 & 0,4015 & 0,3965 \\ 0,1945 & 0,3965 & 0,4090 \end{pmatrix} = (0{,}2020,\ 0{,}4015,\ 0{,}3965).$$

Таким образом, в конце года вероятности процентных ставок 3%, 4% и 5% составят соответственно около 0,2, 0,4 и 0,4. Следовательно, вероятнее всего, процентная ставка к концу года останется такой же, как она и была в конце предшествующего года, т.е. 4%.

УПРАЖНЕНИЯ

15.1. Из коробки с шестью деталями, среди которых четыре стандартные, наудачу взяты три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X — количества стандартных деталей среди отобранных.

15.2. Книга издана тиражом 100 тысяч экземпляров. Вероятность брака в книге равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

15.3. Случайная составляющая дохода равна $2X$, а случайная составляющая затрат равна $50Y$. Найти дисперсию прибыли при условиях: величина X распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 100$, $p = 0{,}5$; величина Y распределена

по закону Пуассона с параметром $\lambda = 2$; случайные величины X и Y являются независимыми.

15.4. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2.

15.5. Найти дисперсию дискретной случайной величины X — числа отказов элемента некоторого устройства — в 10 независимых опытах, если вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,9.

15.6. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,6.

Найти центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

15.7. Дано распределение двумерной дискретной случайной величины (X, Y):

$Y/X \rightarrow$	1	3	5
$\downarrow$			
2	0,2	0,1	0
4	0,1	0,2	0,1
6	0	0,1	0,2.

Найти ковариацию $\mathrm{Cov}\,(X, Y)$ и коэффициент корреляции X и Y.

15.8. Непрерывная случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x) = 1/2 + (\operatorname{arctg} x)/\pi$. Найти вероятность того, что величина X примет значение, заключенное в интервале $(0, 1)$.

15.9. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 0{,}5x - 1, & 2 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что X примет значения: **а)** менее 0,2; **б)** менее 3; **в)** не менее 3; **г)** не менее 5.

15.10. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3.

Найти функцию распределения и построить ее график.

15.11. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \pi/6; \\ 3\sin 3x, & \pi/6 < x \le \pi/3; \\ 0, & x > \pi/3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

15.12. Случайная величина X задана на положительной полуоси Ox функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-ax}$ $(a > 0)$. Найти математическое ожидание величины X.

15.13. Случайная величина X задана на интервале $(0, 5)$ плотностью распределения $f(x) = 2x/25$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию X.

15.14. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = e^{-|x|}/2$. Найти математическое ожидание и дисперсию.

15.15. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0; \\ 1 - x_0^3/x^3, & x \ge x_0 \ (x_0 > 0). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

15.16. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(2, 8)$.

15.17. Ребро куба x измерено приближенно в интервале (a, b). Найти математическое ожидание и дисперсию объема куба, если его ребро рассматривать как случайную величину X с равномерным распределением на указанном интервале.

15.18. Размер мужских сорочек является случайной величиной с нормальным законом распределения, математическим ожиданием 39 и дисперсией 9. Какой процент от общего объема

заказа следует предусмотреть магазину для сорочек 40-го размера воротничка при условии, что этот размер находится в интервале (39,5; 40,5)?

15.19. Найти формулу плотности вероятности нормально распределенной случайной величины X, если математическое ожидание равно 3, а дисперсия равна 16.

15.20. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 25$. Вероятность попадания X в интервал (10,15) равна 0,2. Найти вероятность попадания X в интервал (35,40).

15.21. Найти групповые средние совокупности, состоящие из двух групп:

1-я группа	x_i	0,1	0,4	0,6
	n_i	3	2	5
2-я группа	x_i	0,1	0,3	0,4
	n_i	10	4	6

15.22. По условиям предыдущей задачи найти общую среднюю.

15.23. Для распределения статистической совокупности

x_i	4	7	10	15
n_i	10	15	20	5

найти ее дисперсию.

Для заданных среднего квадратического отклонения σ, выборочного среднего $\bar{x}_в$ и объема выборки n найти доверительные интервалы неизвестного математического ожидания с заданной надежностью p.

15.24. $\sigma = 2$, $\bar{x}_в = 5{,}4$, $n = 10$, $p = 0{,}95$.

15.25. $\sigma = 3$, $\bar{x}_в = 20{,}12$, $n = 25$, $p = 0{,}99$.

15.26. Найти асимметрию и эксцесс эмпирического распределения

x_i	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8
n_i	5	10	17	30	20	12	6

15.27. Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 2{,}1$ извлечена выборка объема $n = 49$ и по ней найдена средняя $\bar{x}_в = 4{,}5$. При

уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $a = 3$ (равенство математического ожидания гипотетическому значению) при альтернативной гипотезе H_1: $a \neq 3$.

15.28. Для выборки объема $n = 16$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности, определены выборочная средняя $\bar{x}_{\text{в}} = 12{,}4$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1{,}2$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $a = 11{,}8$ при альтернативной гипотезе H_1: $a \neq 11{,}8$.

15.29. По 100 независимым испытаниям определена относительная частота $m/n = 0{,}15$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $p = 0{,}17$ при альтернативной гипотезе H_1: $p \neq 0{,}17$.

Часть 4
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дифференциальные уравнения занимают особое место в математике и имеют многочисленные приложения в большом спектре наук. Исследования природных процессов и изучение закономерностей общественных процессов приводят к построению математических моделей, основой которых являются дифференциальные уравнения.

В дифференциальных уравнениях неизвестная функция содержится вместе со своими производными. Основной задачей теории дифференциальных уравнений является изучение функций, представляющих собой решения этих уравнений.

В этой части излагаются элементы теории *обыкновенных* дифференциальных уравнений, когда неизвестные функции зависят от одной переменной. Теория дифференциальных уравнений, когда неизвестные функции зависят от нескольких переменных — уравнения *в частных производных*, является более сложной и представляет специальный раздел математики.

Глава 16
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

16.1. Основные понятия

Базовые определения

Определение 1. Уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0,$$

где x — независимая переменная, y и y' — соответственно неизвестная функция и ее производная, называется дифференциальным уравнением *первого порядка*.

Примеры дифференциальных уравнений первого порядка:

$$(y')^3 y^2 + 2xy = 0, \quad y' = x^2 \sin y, \quad \sqrt{x + y'} = 3xy^2.$$

В случае когда из уравнения можно выразить y', оно имеет вид

$$y' = f(x, y). \tag{16.1}$$

Уравнение (16.1) называется уравнением первого порядка, *разрешенным относительно производной*. В дальнейшем будем рассматривать уравнения первого порядка именно такого вида. Примеры уравнений, разрешенных относительно производной:

$$y' = x^2 + y^2, \quad y' = xy^3 + \operatorname{tg}(xy), \quad y' = 2x + y, \quad y' = \frac{\ln x}{xy}.$$

Приведем примеры уравнений, которые можно разрешить относительно производной неизвестной функции y'.

Пример 1. $(y')^2 = x^2 + y^2$, откуда получаем два уравнения первого порядка $y' = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Пример 2. $\sqrt{y'} = x + \sin y$, откуда $y' = (x + \sin y)^2$.

Определение 2. Решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x)$, определен-

ная на некотором интервале (a, b), которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Например, функция $y = x^2$ тождественно обращает в нуль левую часть уравнения $xy' - 2x^2 = 0$ и потому представляет собой решение этого уравнения.

В теории дифференциальных уравнений основной задачей является вопрос о существовании и единственности решения. Ответ на него дает теорема Коши, которую мы приводим без доказательства.

ТЕОРЕМА 16.1. *Пусть дано дифференциальное уравнение* (16.1). *Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, то в некоторой окрестности любой внутренней точки (x_0, y_0) этой области существует единственное решение уравнения* (16.1), *удовлетворяющее условию $y = y_0$ при $x = x_0$.*

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.* В области D содержится бесконечно много интегральных кривых. Теорема Коши гарантирует, что при соблюдении определенных условий через каждую внутреннюю точку области D проходит только одна интегральная кривая. Условия, которые задают значение функции y_0 в фиксированной точке x_0, называют *начальными условиями (условиями Коши)* и записывают в такой форме:

$$y\Big|_{x_0} = y_0. \tag{16.2}$$

Задача нахождения решения уравнения (16.1), удовлетворяющего условию (16.2), называется *задачей Коши* — из множества интегральных кривых выделяется та, которая проходит через заданную точку (x_0, y_0) области D.

В ряде случаев, когда условия теоремы Коши не выполнены, через некоторые точки плоскости Oxy либо не проходит ни одной интегральной кривой, либо проходит более одной интегральной кривой; эти точки называются *особыми точками* данного дифференциального уравнения.

Определение 3. Общим решением уравнения (16.1) называется функция $y = \varphi(x, C)$, удовлетворяющая этому уравнению при произвольном значении постоянной C.

Определение 4. Частным решением уравнения (16.1) в области D называется функция $y = \varphi(x, C_0)$, полученная при определенном значении постоянной $C = C_0$.

Общее решение $y = \varphi(x, C)$ описывает семейство интегральных кривых на плоскости Oxy. Условия Коши (16.2) фиксируют произвольную постоянную C и позволяют выбрать из семейства интегральных кривых уравнения (16.1) одну интегральную кривую $y = \varphi(x, C_0)$, проходящую через заданную точку (x_0, y_0).

Например, рассмотрим уравнение $y' = 2x$. Правая часть этого уравнения удовлетворяет условиям теоремы Коши во всех точках плоскости Oxy (функции $f(x, y) = 2x$ и $f'_y(x, y) \equiv 0$ определены и непрерывны на всей плоскости Oxy). Нетрудно видеть, что общим решением уравнения является функция $y = x^2 + C$, где C — произвольная постоянная, описывающая семейство парабол (рис. 16.1). Для отыскания частного решения зададим произвольные начальные условия (16.2) и подставим их в формулу общего решения; получаем, что $C = y_0 - x_0^2$, откуда находим частное решение $y = x^2 + y_0 - x_0^2$. Это частное решение выделяет из семейства парабол одну, проходящую через точку (x_0, y_0).

Геометрический смысл уравнения первого порядка

Рассмотрим уравнение $y' = f(x, y)$. Пусть $y = \varphi(x)$ — его решение, график которого представляет собой непрерывную интегральную кривую, причем в каждой ее точке существует касательная. Из дифференциального уравнения следует, что угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в каждой ее точке равен правой части этого уравнения. Следовательно, уравнение первого порядка задает угловой коэффициент y' касательной к интегральной кривой как функцию двух переменных. Если каждой точке (x, y) сопоставить отрезок, направленный под углом наклона $\alpha = \operatorname{arctg}(f(x, y))$ к оси Ox, то мы получим *поле направлений* данного уравнения. В этом и заключается геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка.

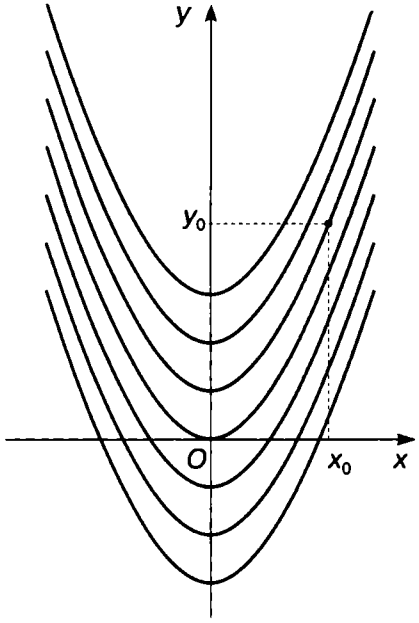


Рис. 16.1

Поле направлений позволяет проанализировать решение дифференциального уравнения и даже приближенно построить интегральные кривые.

Пример 1. Построить поле направлений уравнения $y'=x^2-y$.

Решение. Нетрудно видеть, что правая часть этого уравнения удовлетворяет условиям теоремы Коши единственности и существования решения при любых x и y, т.е. интегральные кривые заполняют всю плоскость Oxy. Найдем линии, на которых наклон направлений одинаков, — так называемые *изоклины*. Так, если $y' = 0$, то имеем $x^2 - y = 0$, т.е. на параболе $y = x^2$ касательные к интегральным кривым горизонтальны (короткие черточки на рис. 16.2). При $y' = 1$ имеем $x^2 - y = 1$, т.е. касательные к интегральным кривым направлены под углом 45° к оси Ox на параболе $y = x^2 - 1$. Наконец, на параболе $y = x^2 + 1$ угол наклона касательных равен 135°. По полю направлений можно приближенно восстановить ход интегральных кривых (сплошные линии).

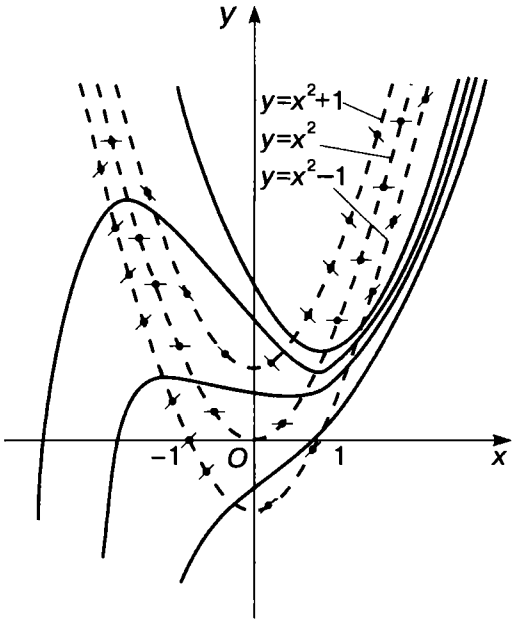


Рис. 16.2

16.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 5. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f_1(x)f_2(y), \tag{16.3}$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — непрерывные функции, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Подчеркнем, что правая часть уравнения представляет собой произведение, в котором один сомножитель зависит только от x, а другой — только от y. Метод решения такого вида уравнений носит название *разделения переменных*. Запишем производную y' в ее эквивалентной форме как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной $\dfrac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения (16.3) на dx и поделим обе его части на $f_2(y)$, полагая, что $f_2(y) \neq 0$; получаем

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{16.4}$$

В этом уравнении переменная y входит в левую часть, а переменная x — только в правую, т.е. переменные разделены. Пусть $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (16.3), тогда при подстановке этого решения в уравнение (16.4) получаем тождество: два дифференциала равны друг другу, только в правой части дифференциал выражен через независимую переменную x, а в левой части — через функцию y. Поскольку дифференциалы равны, то их неопределенные интегралы различаются на постоянную величину, т.е., интегрируя слева по переменной y, а справа по переменной x, получаем

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C, \tag{16.5}$$

где C — произвольная постоянная.

Рассмотрим примеры решения уравнений методом разделения переменных.

Пример 1. $xy' - y = 0$, найти частное решение при начальных условиях $y_0 = 2$ при $x_0 = -4$.

Решение. Разделим переменные, для чего перенесем y в правую часть, поделим обе части полученного уравнения на xy и умножим их на dx; получим

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части этого уравнения (правую по x, а левую по y), имеем

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|,$$

где C — произвольная постоянная. При потенцировании получаем

$$|y| = |Cx|,$$

что эквивалентно уравнению $y = \pm Cx$, или $y = C_1x$. Полученная функция представляет семейство интегральных кривых. Для выделения частного решения при указанных начальных условиях подставим в эту формулу $x = -4$ и $y = 2$, откуда

получим значение для C: $C = -1/2$. Окончательно частное решение имеет вид

$$y = -\frac{1}{2}x.$$

Пример 2. $y' = x\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{y}$, найти частное решение, проходящее через точку $(0, 1)$.

Решение. Разделяя переменные, получаем уравнение в дифференциалах

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}} = x\,dx.$$

Интегрируя, имеем

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}} = \int x\,dx + C,$$

где C — произвольная постоянная величина. После интегрирования (интеграл в правой части берется при помощи замены переменной) имеем уравнение семейства интегральных кривых

$$\sqrt{y^2+1} = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Выделение частного решения, проходящего через точку $(0, 1)$, приводит к определению произвольной постоянной: $C = \sqrt{2}$, т.е. эта кривая описывается уравнением (с учетом выбора знака)

$$y = \sqrt{(x^2/2 + \sqrt{2})^2 - 1}.$$

16.3. Неполные уравнения

Определение 6. Дифференциальное уравнение первого порядка (16.1) называется неполным, если функция f явно зависит только от одной переменной: либо от x, либо от y.

Различают два случая такой зависимости.

1. Пусть функция f зависит только от x. Переписав это уравнение в виде

$$dy = f(x)\,dx,$$

нетрудно убедиться, что его решением является функция

$$y = \int f(x)\,dx + C.$$

2. Пусть функция f зависит только от y, т.е. уравнение (16.1) имеет вид

$$y' = f(y). \tag{16.6}$$

Дифференциальное уравнение такого вида называется *автономным*. Такие уравнения часто употребимы в практике математического моделирования и исследования природных и физических процессов, когда, например, независимая переменная x играет роль времени, не входящего в соотношения, описывающие законы природы. В этом случае особый интерес представляют так называемые *точки равновесия*, или стационарные точки,— нули функции $f(y)$, где производная $y' = 0$.

Решение уравнения (16.6) методом разделения переменных приводит к функциональному уравнению для определения неизвестной функции $y = \varphi(x)$ (или $x = \psi(y)$):

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + C.$$

В общей теории дифференциальных уравнений развита теория качественного анализа, основанная на исследовании характера стационарных точек.

16.4. Линейные уравнения первого порядка

Определение 7. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{16.7}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — непрерывные функции, называется *линейным* дифференциальным уравнением первого порядка.

Неизвестная функция и ее производная входят в указанное уравнение в первой степени — линейно, что и объясняет название уравнения.

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение (16.7) называется линейным *однородным* уравнением; если же функция $q(x)$ не равна тождественно нулю, то уравнение (16.7) называется линейным *неоднородным* уравнением.

Для линейного уравнения первого порядка можно выписать общее решение с помощью метода *вариации постоянной*. Здесь это решение приводится без вывода:

$$y(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx\right]. \qquad (16.8)$$

Следует отметить, что некоторые нелинейные уравнения приводятся к линейным уравнениям соответствующими заменами неизвестной функции $y(x)$. К таковым относится *уравнение Бернулли*

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \qquad (16.9)$$

где p и q — непрерывные функции, а n — некоторое постоянное число. При $n = 0$ имеем линейное неоднородное уравнение, а при $n = 1$ — линейное однородное уравнение

$$y' + (p - q)y = 0.$$

Пусть $n \neq 0$, $n \neq 1$. Введем новую функцию

$$z = y^{1-n}, \qquad (16.10)$$

тогда

$$z' = (1 - n)\,y^{-n}y'.$$

Поделим обе части уравнения (16.9) на y^n:

$$y^{-n}y' + p\,y^{1-n} = q.$$

Умножая обе части этого уравнения на $(1 - n)$, с учетом выражений для новой функции z и ее производной получаем линейное дифференциальное неоднородное уравнение относительно неизвестной функции $z(x)$:

$$z' + (1 - n)pz = (1 - n)q. \qquad (16.11)$$

В этом уравнении, метод решения которого нам известен, функция $z(x)$ связана с искомой функцией $y(x)$ соотношением (16.10).

Рассмотрим примеры решения неоднородных уравнений первого порядка.

Пример 1. $y' + x^2 y = x^2$.

Решение. Это линейное неоднородное уравнение первого порядка. Последовательное интегрирование в формуле (16.8) при $p(x) = x^2$ и $q(x) = x^2$ дает

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}, \quad \int x^2 e^{x^3/3} dx = e^{x^3/3}$$

(этот интеграл берется с помощью подстановки $t = x^3$ в формулу (16.8)). Получаем решение дифференциального уравнения:

$$y(x) = Ce^{-x^3/3} + 1.$$

Пример 2. $xy' + y = e^x$.

Решение. Тот же прием, что и в предыдущем примере, при $p(x) = 1/x$ и $q(x) = e^x$ дает нам решение

$$y(x) = \frac{1}{x}(e^x + C).$$

Пример 3. $y' + xy = xy^3$.

Решение. Данное нелинейное уравнение представляет собой уравнение Бернулли при $n = 3$. Заменой искомой функции $z = y^{-2}$, согласно (16.10) и (16.11), получим линейное неоднородное уравнение относительно $z(x)$

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x.$$

По формуле (16.8) получаем общее решение этого уравнения:

$$z(x) = Ce^{x^2} + 1.$$

Теперь, выполняя обратную замену $y = \pm 1/\sqrt{z}$, получаем решение исходного нелинейного уравнения:

$$y = \pm(Ce^{x^2} + 1)^{-1/2}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Найти общие решения дифференциальных уравнений методом разделения переменных.

16.1. $xy' - y = 0$. **16.2.** $yy' + x = 0$. **16.3.** $x^2y' + y = 0$.
16.4. $y' = y$. **16.5.** $(1 + y^2)dx = (1 + x^2)dy$.
16.6. $xyy' = 1 - x^2$. **16.7.** $(1 + x^2)yy' = x(1 + y^2)$.
16.8. $yy' + x = 1$. **16.9.** $(x + 1)y' + xy = 0$.

Найти частные решения уравнений первого порядка, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

16.10. $2y'\sqrt{x} = y, y_0 = 1$ при $x_0 = 4$.
16.11. $x^2y' + y^2 = 0, y_0 = 1$ при $x_0 = -4$.
16.12. $(1 + e^x)yy' = e^x, y_0 = 1$ при $x_0 = 0$.
16.13. $xy' = \dfrac{y}{\ln x}, y_0 = 1$ при $x_0 = e$.
16.14. $(1 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0, y_0 = 1$ при $x_0 = 2$.
16.15. $(2x + 1)\,dy + y^2dx = 0, y_0 = 1$ при $x_0 = 4$.

Найти общее решение линейных уравнений.

16.16. $y' - y = e^x$. **16.17.** $y' = x + y$. **16.18.** $xy' + y = 3$.
16.19. $y' + 2xy = 2x\,e^{-x^2}$. **16.20.** $y' - \dfrac{y}{x} = x$. **16.21.** $y' + y = \cos x$.

Решить уравнения Бернулли.

16.22. $y' + xy = xy^3$. **16.23.** $y'x + y = -xy^2$.
16.24. $y' + y = xy^3$. **16.25.** $xy' + 2y = x^5y^2$.

Глава 17
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

17.1. Основные понятия теории

Определение 1. Дифференциальным уравнением *второго порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{17.1}$$

где x — независимая переменная, y — искомая функция, y' и y'' — соответственно ее первая и вторая производные.

Примеры дифференциальных уравнений второго порядка:

$$y'' + yy' - xy^3 - \cos x = 0;$$
$$y^2y'' + xy' + x^2 \cos y = 0.$$

Будем рассматривать уравнения, которые можно записать в виде, разрешенном относительно второй производной:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{17.2}$$

Как и в случае уравнения первого порядка, решением уравнения (17.1) называется функция $y = \varphi(x)$, определенная на некотором интервале (a, b), которая обращает это уравнение в тождество. График решения называется *интегральной кривой.* Имеет место теорема существования и единственности решения уравнения второго порядка.

ТЕОРЕМА 17.1 (теорема Коши). *Пусть функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные f'_y и $f'_{y'}$ непрерывны в некоторой области D пространства переменных (x, y, y'). Тогда для любой внутренней точки $M_0(x_0, y_0, y'_0)$ этой области существует единственное решение уравнения* (10.2), *удовлетворяющее условиям:*

$$x = x_0,\ y = y_0,\ y' = y'_0. \tag{17.3}$$

Геометрический смысл этой теоремы (ее доказательство мы не приводим) заключается в том, что через заданную точку

(x_0, y_0) на координатной плоскости Oxy проходит *единственная* интегральная кривая с заданным угловым коэффициентом y_0' касательной (рис. 17.1).

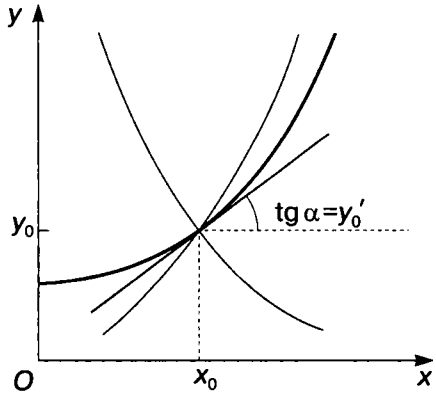


Рис. 17.1

Условия (17.3) называются *начальными условиями*, а задачу отыскания решения уравнения (17.2) по заданным начальным условиям называют *задачей Коши*.

Общим решением уравнения (17.2) в некоторой области D называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, если она является решением этого уравнения при любых постоянных величинах C_1 и C_2, которые могут быть определены единственным образом при заданных начальных условиях (10.3). *Частным решением* уравнения (17.2) называется общее решение этого уравнения при фиксированных значениях постоянных C_1 и C_2: $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$.

Рассмотрим для пояснения уравнение $y'' = 0$. Его общее решение получается при двухкратном интегрировании этого уравнения:

$$y = C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Это решение представляет собой семейство прямых, проходящих в произвольных направлениях, причем через каждую точку плоскости Oxy проходит бесконечное число таких прямых. Поэтому для выделения частного решения, проходящего через заданную точку

(x_0, y_0), следует задать еще и угловой коэффициент прямой, совпадающей в данном случае со своей касательной. Например, найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y\Big|_{x=1} = 2, \quad y'\Big|_{x=1} = 1,$$

т.е. нужно найти прямую, проходящую через точку $M(1, 2)$, с угловым коэффициентом, равным единице. Подстановка начальных условий в общее решение уравнения приводит к системе двух линейных уравнений относительно постоянных C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_1 = 1, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 1$, $C_2 = 1$. Таким образом, искомое частное решение — это прямая $y = x + 1$.

17.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Существуют три вида уравнения (17.2), которые при помощи замены переменной (искомой функции) сводятся к уравнениям первого порядка.

1. Уравнение вида

$$y'' = f(x). \tag{17.4}$$

Введем новую функцию $z(x)$ путем замены $z(x) = y'$. Тогда исходное уравнение второго порядка преобразуется в неполное уравнение первого порядка: $z' = f(x)$, решением которого является функция $z(x) = \int f(x)\,dx + C_1$. Поскольку $z(x) = y'$, то повторным интегрированием находим общее решение уравнения (17.4):

$$y(x) = \int \left[\int f(x)\,dx\right] dx + C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2. Уравнение вида

$$y'' = f(x, y'), \tag{17.5}$$

т.е. уравнение не содержит в явном виде y. Как и в предыдущем случае, положим $z(x) = y'$. Тогда получаем уравнение первого порядка общего вида $z'=f(x,z)$. Найдя общее решение этого уравнения $z=\varphi(x,C_1)$, повторным интегрированием получим искомое общее решение уравнения (17.5):

$$y(x) = \int \varphi(x, C_1)\, dx + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3. Уравнение вида

$$y'' = f(y, y'), \tag{17.6}$$

т.е. уравнение не содержит независимой переменной x. Здесь мы вводим новую функцию, зависящую от y, полагая $z(y) = y'$. Тогда, поскольку по правилу дифференцирования сложной функции

$$y'' = \frac{d}{dx}[z(y)] = \frac{dz}{dy}y' = \frac{dz}{dy}\, z,$$

то уравнение (17.6) преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $z(y)$:

$$z\frac{dz}{dy} = f(y, z).$$

Пусть общее решение этого уравнения $z = \varphi(y, C_1)$. Тогда обратной заменой получаем неполное уравнение первого порядка относительно функции $y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1),$$

из которого методом разделения переменных получаем функциональное соотношение для определения общего решения уравнения (17.6):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Рассмотрим два примера решения дифференциальных уравнений второго порядка.

Пример 1. $y'' + x(y')^2 = 0$.

Решение. Это уравнение вида (17.5), поскольку оно не содержит в явном виде y. Заменой $z(x) = y'$ приведем его к уравнению первого порядка $\dfrac{dz}{dx} = -xz^2$, откуда имеем $z = \dfrac{2}{x^2 + C_1}$, или $y' = \dfrac{2}{x^2 + C_1}$. Интегрируя это уравнение, получаем общее решение исходного уравнения:

$$y(x) = \int \frac{2\,dx}{x^2 + C_1} + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В зависимости от выбора знака C_1 интеграл в правой части этого равенства (обозначим его через I) может иметь разные выражения:

$$I = \begin{cases} [\ln|(x - \sqrt{-C_1})/(x + \sqrt{-C_1})|]/\sqrt{-C_1}, & C_1 < 0; \\ -2/x, & C_1 = 0; \\ 2/\sqrt{C_1}\,\mathrm{arctg}\,(x/\sqrt{C_1}), & C_1 > 0. \end{cases}$$

Пример 2. $y'' - (y')^2 = 0$.

Решение. Это уравнение вида (17.6), т.е. оно не содержит явно независимой переменной x. Заменой $z(y) = y'$ сведем его к уравнению первого порядка

$$z\frac{dz}{dy} - z^2 = 0.$$

Первое решение этого уравнения $z = 0$, или $y = C$, где C — постоянная величина. Сокращая после этого обе части уравнения на z, получаем $\dfrac{dz}{dy} - z = 0$. Решение этого уравнения методом

разделения переменных y и z дает $z = C_1 e^y$. Наконец, обратная замена приводит к уравнению первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = C_1 e^y.$$

Разделение переменных x и y приводит к общему решению исходного уравнения: $e^{-y}dy = C_1 dx$, откуда $e^{-y} = C_1 x + C_2$, или окончательно

$$y(x) = -\ln(C_1 x + C_2),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Нетрудно видеть, что это решение включает в себя и решение $y = C$, указанное выше (при $C_1 = 0, C_2 \neq 0$).

Далее мы рассмотрим наиболее употребимый в математических приложениях вид дифференциальных уравнений второго порядка.

17.3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение 2. Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{17.7}$$

где y — искомая функция, а $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ — известные функции, непрерывные на некотором интервале (a, b).

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (17.7) называется *линейным однородным* уравнением. Если $f(x) \not\equiv 0$, оно называется *линейным неоднородным* уравнением. Если разрешить уравнение (17.7) относительно второй производной, то легко увидеть, что оно является частным случаем уравнения (17.2) и удовлетворяет условиям теоремы Коши. Поэтому для любых начальных условий (17.3) при $x_0 \in (a, b)$ это уравнение имеет единственное решение задачи Коши.

В этом разделе мы рассмотрим важный и весьма распространенный случай, когда в уравнении вида (17.7) функции

$p(x)$ и $q(x)$ — постоянные величины. Уравнения такого вида называются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. Итак, мы рассматриваем уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{17.8}$$

где p и q — вещественные числа. Как и в общем случае линейных дифференциальных уравнений второго порядка, основой в построении решения являются однородные уравнения.

Однородные уравнения второго порядка

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{17.9}$$

где p и q — вещественные числа. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка, как следует из теоремы 17.1, может иметь множество решений. Однако среди них выделяют базисные решения, по которым строится общее решение уравнения. Таких решений для уравнения второго порядка — два, каков и порядок уравнения.

Определение 3. Решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (17.9) называются линейно независимыми, если их линейная комбинация равна нулю:

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0 \tag{17.10}$$

лишь в том случае, когда $C_1 = C_2 = 0$.

В том случае, когда можно найти такие числа C_1 и C_2, не равные нулю одновременно, что для функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ на некотором интервале (a, b) выполняется равенство (17.10) для любого $x \in (a, b)$, эти функции называются *линейно зависимыми* на интервале (a, b). Линейная зависимость функций означает их пропорциональность, например, $y_1(x)/y_2(x) = -C_2/C_1$ при $y_2(x) \neq 0$ и $C_1 \neq 0$.

ТЕОРЕМА 17.2. *Пусть решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (17.9) линейно независимы на интервале (a, b). Тогда функция*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{17.11}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, является общим решением однородного уравнения (17.9).

Эта теорема, по сути дела, выражает метод нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения второго порядка: нужно отыскать два линейно независимых решения и взять их линейную комбинацию вида (17.11).

Будем искать решение уравнения (17.9) в виде $y = e^{kx}$, где k — некоторое число. Подставляя эту функцию в уравнение (17.9), получаем

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0.$$

Сокращая обе части этого равенства на e^{kx}, получаем квадратное уравнение относительно k

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{17.12}$$

Стало быть, если число k является корнем уравнения (17.12), то функция $y = e^{kx}$ есть решение однородного уравнения (17.9). Уравнение (17.10) называется *характеристическим уравнением* для дифференциального уравнения (17.9).

Вид общего решения уравнения (17.9) существенно зависит от того, какие корни имеет характеристическое уравнение (17.10). Обозначим эти корни через k_1 и k_2. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 17.3. *А) Если корни характеристического уравнения вещественные и $k_1 \neq k_2$, то общее решение однородного дифференциального уравнения* (17.9) *имеет вид*

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x};$$

Б) если корни уравнения (17.12) *вещественные и равные между собой ($k_1 = k_2 = k$), то общее решение уравнения* (17.9) *имеет вид*

$$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx};$$

В) если корни характеристического уравнения комплексные ($k_1 = a+bi$, $k_2 = a-bi$, где $i = \sqrt{-1}$, a и b — вещественные числа), то общее решение уравнения (17.9) *имеет вид*

$$y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx),$$

где $a = -p/2$, $b = \sqrt{q - p^2/4}$. *Во всех трех случаях* C_1 *и* C_2 — *произвольные постоянные.*

Заметим, что когда дискриминант характеристического уравнения (17.12) отрицательный, корни характеристического многочлена с действительными коэффициентами представляют собой комплексно-сопряженные числа; в случае B использована их алгебраическая форма.

Рассмотрим примеры отыскания общих решений однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Пример 1. $y'' - 5y' + 4y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$k^2 - 5k + 4 = 0.$$

Его корни вещественные и различны: $k_1 = 1$, $k_2 = 4$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}.$$

Пример 2. $y'' - 6y' + 9 = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 6k + 9 = 0, \text{ или } (k-3)^2 = 0.$$

Оно имеет кратный корень $k = 3$; следовательно, общее решение данного однородного уравнения имеет вид

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример 3. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Решение. Соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 2 = 0$$

имеет дискриминант, равный -1, и, значит, комплексно-сопряженные корни таковы: $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$, где $i = \sqrt{-1}$ — *мнимая единица.* Следовательно, общее решение данного уравнения дается формулой

$$y = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x).$$

Неоднородные уравнения второго порядка

Что касается решения неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, то их решение полностью основывается на следующей фундаментальной теореме.

ТЕОРЕМА 17.4. *Общее решение неоднородного уравнения* (17.8) *состоит из суммы его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения* (17.9).

В ряде случаев удается "угадать" или подобрать частное решение неоднородного уравнения по виду его правой части. Рассмотрим несколько примеров решения таких уравнений.

Пример 4. $y'' - 5y' + 4y = 8$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение было рассмотрено в примере 1. Исходя из вида правой части, будем искать частное решение данного неоднородного уравнения в виде константы: $\tilde{y} = C$. Подставляя это решение в уравнение, получаем, что $C = 2$. Отсюда следует, что общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + 2.$$

Пример 5. $y'' - 6y' + 9 = 9x$.

Решение. Для отыскания частного решения этого неоднородного уравнения воспользуемся методом *неопределенных коэффициентов*, не содержащим процесса интегрирования. Будем искать это решение в виде многочлена той же степени, что и правая часть, т.е. $\tilde{y} = Ax + B$, где A и B — неизвестные коэффициенты. Дифференцируя дважды $\tilde{y}$ и подставляя в исходное уравнение, получаем

$$-6A + 9Ax + 9B = 9x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях этого равенства, находим $9A = 9$, $-6A + 9B = 0$. Отсюда $A = 1$, $B = 2/3$, т.е. $\tilde{y} = x + 2/3$. Соединяя это решение с общим решением соответствующего однородного уравнения

(см. пример 2), получаем общее решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + x + 2/3.$$

Пример 6. $y'' - 2y' + 2y = 2e^{2x}$.

Решение. В этом случае частное решение $\tilde{y}(x)$ ищем в виде Ce^{2x}. Подстановка в данное уравнение дает $C = 1$. Соединяя полученное частное решение с общим решением однородного уравнения (см. пример 3), окончательно имеем

$$y(x) = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + e^{2x}.$$

Примечание 1. В общем случае, когда характеристическое уравнение содержит нулевой корень кратности s, а правая часть неоднородного уравнения представляет собой многочлен $P_n(x)$ степени n, частное решение этого уравнения ищется в виде $Q_n(x)x^s$, где $Q_n(x)$ — многочлен степени n с неизвестными коэффициентами, которые определяются вышеуказанным методом.

Примечание 2. В общем случае, когда правая часть неоднородного уравнения имеет вид e^{rx}, его частное решение ищется в виде $\tilde{y}(x) = x^s e^{rx}$, где s — кратность корня $k = r$ в характеристическом уравнении (17.12).

17.4. Краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка

Как было сказано в п. 17.1, в силу основной теоремы существования и единственности решения для уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \tag{17.13}$$

определена задача Коши, когда в точке $x = x_0$ заданы значения неизвестной функции и ее производной:

$$x = x_0, y = y_0, y' = y'_0. \tag{17.14}$$

Если выполнены условия теоремы 17.1, то задача Коши (17.13), (17.14) однозначно определяет частное решение.

Однако существует и другой тип задач для дифференциальных уравнений второго порядка — значения неизвестной функции задаются в двух разных точках. Иными словами, при решении уравнения (17.13) на интервале (a, b) рассмотрим *граничные условия* наиболее простого вида на концах интервала

$$x = x_1, \quad y = y_1; \quad x = x_2, \quad y = y_2. \tag{17.15}$$

В этом случае уравнение (17.13) совместно с условиями (17.14) называется *первой краевой задачей для уравнения второго порядка*. Поскольку второе условие в (17.15) равносильно второму условию в (17.14), то указанная краевая задача может иметь единственное решение, т.е. определять единственным образом частное решение дифференциального уравнения (17.13), проходящее через точки (x_1, y_1), (x_2, y_2). Так, для линейного дифференциального уравнения второго порядка первая краевая задача имеет решение, если определитель системы линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_1) + C_2 y_2(x_1) + \widetilde{y}(x_1) &= y_1, \\ C_1 y_1(x_2) + C_2 y_2(x_2) + \widetilde{y}(x_2) &= y_2, \end{cases}$$

реализующей краевые условия (17.15), отличен от нуля. Здесь в соответствии с теоремой 17.4 $\widetilde{y}(x)$ — частное решение неоднородного уравнения, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения. В таком случае краевая задача с условиями (17.15) однозначно определяет частное решение дифференциального уравнения (17.8).

Пример 1. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 5y' + 4y = 8,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$x = 0, \quad y = 1; \quad x = \ln 2, \quad y = 7.$$

Общее решение этого уравнения было найдено в примере 4 п. 17.3:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + 2.$$

Для отыскания частного решения, соответствующего данным краевым условиям, подставим это решение в эти краевые условия. Получаем систему линейных уравнений относительно произвольных постоянных C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 &= -1, \\ 2C_1 + 16C_2 &= 5. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что определитель этой системы не равен нулю, т.е. данная краевая задача имеет решение. Вычитая из второго уравнения первое, умноженное на 2, получаем C_2, а затем из первого уравнения — C_1:

$$C_2 = 1/2, \quad C_1 = -\frac{3}{2}.$$

Отсюда решение данной краевой задачи как частное решение дифференциального уравнения, проходящее через точки $(0, 1)$ и $(\ln 2, 2)$, имеет вид

$$y = 2 - \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{4x}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Найти общие решения линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами.

17.1. $y'' - 5y' + 6y = 0$. **17.2.** $y'' - 3y' + 2y = 0$.
17.3. $y'' - 4y' + 4y = 0$. **17.4.** $y'' - 8y' + 25y = 0$.
17.5. $y'' - 2y' + 2y = 0$. **17.6.** $y'' + 4y' = 0$.
17.7. $y'' + 3y' + 2y = 0$. **17.8.** $y'' + 2y' + 5y = 0$.
17.9. $y'' - y = 0$. **17.10.** $y'' + y = 0$.

Найти общие решения неоднородных уравнений.

17.11. $y'' + 2y' + y = e^x$. **17.12.** $y'' + y' - 2y = -4$.
17.13. $y'' + 3y = 9x$. **17.14.** $y'' - 5y' + 6y = 6x$.
17.15. $y'' + y' - 2y = 2e^{2x}$. **17.16.** $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$.

Найти решения уравнений второго порядка, удовлетворяющих указанным условиям задачи Коши.

17.17. $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_0' = 1$ при $x_0 = 0$.

17.18. $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = 0$ при $x_0 = 0$.
17.19. $y'' - 7y' + 6y = 12, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = 4$ при $x_0 = 0$.
17.20. $y'' - 4y' + 3y = 3x + 2, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = 1$ при $x_0 = 0$.

Найти решения уравнений второго порядка, удовлетворяющих заданным краевым условиям.

17.21. $y''-7y'+6y=12$, $y_0=2$ при $x_0=0$; $y_1=64$ при $x_1=\ln 2$.
17.22. $y''-5y'+6y=2e^x$, $y_0=2$ при $x_0=0$; $y_1=-6$ при $x_1=\ln 3$.
17.23. $y''-6y'+9y=9x$, $y_0=0$ при $x_0=0$; $y_1=\frac{5}{3}$ при $x_1=1$.
17.24. $y''+3y'+2y=6e^x$, $y_0=7$ при $x_0=0$; $y_1=3$ при $x_1=\ln 2$.

Глава 18
АППАРАТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

В этой главе мы рассмотрим некоторые примеры применения теории дифференциальных уравнений в непрерывных моделях экономики, где независимой переменной является время t. Такие модели достаточно эффективны при исследовании эволюции экономических систем на длительных интервалах времени; они являются предметом исследования *экономической динамики*.

18.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Модель естественного роста выпуска

Будем полагать, что некоторая продукция продается по фиксированной цене P. Обозначим через $Q(t)$ количество продукции, реализованной на момент времени t; тогда на этот момент времени получен доход, равный $PQ(t)$. Пусть часть указанного дохода расходуется на инвестиции в производство реализуемой продукции, т.е.

$$I(t) = mPQ(t), \tag{18.1}$$

где m — норма инвестиции — постоянное число, причем $0 < m < 1$.

Если исходить из предположения о ненасыщаемости рынка (или о полной реализации производимой продукции), то в результате расширения производства будет получен прирост дохода, часть которого опять будет использована для расширения выпуска продукции. Это приведет к росту скорости выпуска (акселерации), причем скорость выпуска пропорциональна увеличению инвестиций, т.е.

$$Q' = lI, \tag{18.2}$$

где $1/l$ — норма акселерации. Подставив в (18.2) формулу (18.1), получим

$$Q' = kQ, \quad k = lmP. \tag{18.3}$$

Дифференциальное уравнение (18.3) представляет собой уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$Q = Ce^{kt},$$

где C — произвольная постоянная. Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ зафиксирован (задан) объем выпуска продукции Q_0. Тогда из этого условия можно выразить постоянную C: $Q_0 = C\,e^{kt_0}$, откуда $C = Q_0 e^{-kt_0}$. Отсюда получаем частное решение уравнения (18.3) — решение задачи Коши для этого уравнения:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{18.4}$$

Заметим, что математические модели обладают свойством общности. Так, из результатов биологических опытов следует, что процесс размножения бактерий также описывается уравнением (18.3). Процесс радиоактивного распада подчиняется закономерности, установленной формулой (18.4).

Рост выпуска в условиях конкуренции

В этой модели мы снимем предположение о ненасыщаемости рынка. Пусть $P = P(Q)$ — убывающая функция, т.е. с

увеличением объема продукции на рынке цена на нее падает: $dP/dQ < 0$. Теперь из формул (18.1)–(18.3) мы получаем нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно Q с разделяющимися переменными:

$$Q' = \alpha P(Q)Q, \quad \alpha = lm. \tag{18.5}$$

Поскольку все сомножители в правой части этого уравнения положительны, то $Q' > 0$, т.е. функция $Q(t)$ возрастающая.

Характер возрастания функции определяется ее второй производной. Из уравнения (18.5) получаем

$$Q'' = \alpha \left[Q'P(Q) + Q\frac{dP}{dQ}Q' \right] = \alpha Q' \left(P + \frac{dP}{dQ}Q \right).$$

Это равенство можно преобразовать, введя эластичность спроса

$E(P) = \dfrac{dQ}{dP}\dfrac{P}{Q}$, откуда $Q'' = \alpha Q'P \left(1 + \dfrac{dP}{dQ}\dfrac{Q}{P} \right)$, или, так как

$\dfrac{dQ}{dP} < 0$, а значит, и $E < 0$, окончательно получаем

$$Q'' = \alpha Q'P(1 - 1/|E|). \tag{18.6}$$

Из уравнения (18.6) следует, что $Q'' > 0$ при эластичном спросе, т.е. когда $|E| > 1$, и график функции $Q(t)$ имеет направление выпуклости вниз, что означает прогрессирующий рост. При неэластичном спросе $|E| < 1$, и в этом случае $Q'' < 0$ — направление выпуклости функции $Q(t)$ вверх, что означает замедленный рост (насыщение).

Для простоты примем зависимость $P(Q)$ в виде линейной функции

$$P(Q) = a - bQ, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

(рис. 18.1). Тогда уравнение (18.5) имеет вид

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q, \tag{18.7}$$

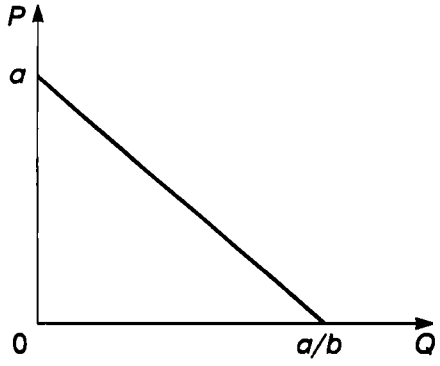


Рис. 18.1

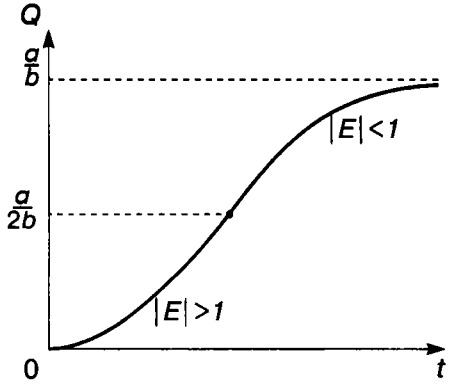


Рис. 18.2

откуда

$$Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ). \tag{18.8}$$

Из соотношений (18.7) и (18.8) получаем: $Q' = 0$ при $Q = 0$ и при $Q = a/b$, $Q'' > 0$ при $Q < a/(2b)$ и $Q'' < 0$ при $Q > a/(2b)$; $Q = a/(2b)$ — точка перегиба графика функции $Q = Q(t)$. Приведенный на рис. 18.2 график этой функции (одной из интегральных кривых дифференциального уравнения (18.7)) носит название *логистической кривой*.

Аналогичные кривые характеризуют и другие процессы, например размножение бактерий в ограниченной среде обитания, динамику эпидемий внутри ограниченной общности биологических организмов и др.

Динамическая модель Кейнса

Рассмотрим простейшую балансовую модель, включающую в себя основные компоненты динамики расходной и доходной частей экономики. Пусть $Y(t)$, $E(t)$, $S(t)$, $I(t)$ — соответственно национальный доход, государственные расходы, потребление и инвестиции. Все эти величины рассматриваются как функции времени t. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} Y(t) = S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \\ I(t) = k(t)Y'(t), \end{cases} \tag{18.9}$$

где $a(t)$ — коэффициент склонности к потреблению ($0<a(t)<1$), $b(t)$ — автономное (конечное) потребление, $k(t)$ — норма акселерации. Все функции, входящие в уравнения (18.9), положительны.

Поясним смысл уравнений (18.9). Сумма всех расходов должна быть равной национальному доходу — этот баланс отражен в первом уравнении. Общее потребление состоит из внутреннего потребления некоторой части национального дохода в народном хозяйстве и конечного потребления — эти составляющие показаны во втором уравнении. Наконец, размер инвестиций не может быть произвольным: он определяется произведением нормы акселерации, величина которой характеризуется уровнем технологии и инфраструктуры данного государства, на предельный национальный доход.

Будем полагать, что функции $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$ и $E(t)$ заданы — они являются характеристиками функционирования и эволюции данного государства. Требуется найти динамику национального дохода, или Y как функцию времени t.

Подставим выражения для $S(t)$ из второго уравнения и для $I(t)$ из третьего уравнения в первое уравнение. После приведения подобных получаем дифференциальное неоднородное линейное уравнение первого порядка для функции $Y(t)$:

$$Y' = \frac{1 - a(t)}{k(t)}Y - \frac{b(t) + E(t)}{k(t)}. \tag{18.10}$$

Согласно п. 16.4, существует достаточно сложная формула общего решения этого уравнения. Мы проанализируем более про-

стой случай, полагая основные параметры задачи a, b и k постоянными числами. Тогда уравнение (18.10) упрощается до линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$Y' = \frac{1-a}{k}Y - \frac{b+E}{k}. \tag{18.11}$$

Как известно, общее решение неоднородного уравнения есть сумма какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. В качестве частного решения уравнения (18.11) возьмем так называемое *равновесное* решение, когда $Y' = 0$, т.е.

$$Y_p = \frac{b+E}{1-a}. \tag{18.12}$$

Нетрудно видеть, что эта величина положительна. Общее решение однородного уравнения дается формулой $\tilde{y} = C\exp\left(\frac{1-a}{k}t\right)$, так что общее решение уравнения (18.11) имеет вид

$$Y(t) = \frac{b+E}{1-a} + C\,e^{\frac{1-a}{k}t}. \tag{18.13}$$

Интегральные кривые уравнения (18.11) показаны на рис. 18.3. Если в начальный момент времени $Y_0 < Y_p$, то $C = Y_0 - Y_p < 0$ и кривые уходят вниз от равновесного решения (18.12), т.е. национальный доход со временем падает при заданных параметрах задачи a, b, k и E, так как показатель экспоненты в (18.13) положителен. Если же $Y_0 > Y_p$, то $C > 0$ и национальный доход растет во времени — интегральные кривые уходят вверх от равновесной прямой $Y = Y_p$.

Согласно классификации п. 16.3, уравнение (18.11) является автономным; точка $Y = Y_p$ представляет собой точку неустойчивого равновесия.

Неоклассическая модель роста

Пусть $Y = F(K, L)$ — национальный доход, где F — однородная производственная функция первого порядка

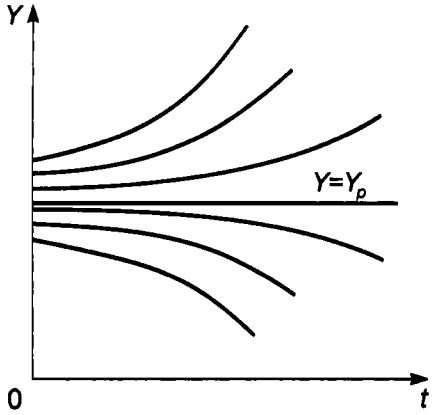


Рис. 18.3

$(F(tK, tL) = tF(K, L))$, K — объем капиталовложений (производственных фондов), L — объем затрат труда. Введем в рассмотрение величину фондовооруженности $k = K/L$, тогда производительность труда выражается формулой

$$f(k) = \frac{F(K, L)}{L} = F(k, 1). \tag{18.14}$$

Целью задачи, рассматриваемой в этом разделе, является описание динамики фондовооруженности или представление ее как функции от времени t. Поскольку любая модель базируется на определенных предпосылках, нам нужно сделать некоторые предположения и ввести ряд определяющих параметров. В данном случае будем полагать, что выполнены следующие предположения.

1. Имеет место естественный прирост во времени трудовых ресурсов:

$$L' = \alpha L. \tag{18.15}$$

2. Инвестиции расходуются на увеличение производственных фондов и на амортизацию, т.е.

$$I = K' + \beta K,$$

где β — норма амортизации.

Тогда если l — норма инвестиций, то $I = lY = K' + \beta K$, или

$$K' = lF(K, L) - \beta K. \tag{18.16}$$

Из определения фондовооруженности k вытекает, что

$$\ln k = \ln K - \ln L.$$

Дифференцируя это равенство по t, имеем

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}.$$

Подставив в это соотношение выражения (18.15) и (18.16), получаем уравнение относительно неизвестной функции k

$$k' = lf(k) - (\alpha + \beta)k, \tag{18.17}$$

где функция $f(k)$ определена по формуле (18.14).

Полученное соотношение (18.17) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными (которое является автономным). Выделим стационарное решение этого уравнения; из условия $k' = 0$ следует, что

$$lf(k) - (\alpha + \beta)k = 0, \tag{18.18}$$

т.е. $k = \text{const}$ — постоянная величина, являющаяся корнем этого нелинейного алгебраического уравнения.

Рассмотрим конкретную задачу: для производственной функции $F(K, L) = \sqrt{KL}$ найти интегральные кривые уравнения (18.17) и стационарное решение. Из (18.14) следует, что $f(k) = \sqrt{k}$, и тогда уравнение (18.17) имеет вид

$$\frac{dk}{dt} = l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k.$$

Стационарное решение этого уравнения следует из равенства

$$l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k = 0,$$

откуда получаем ненулевое частное решение уравнения (18.17): $k_{\text{st}} = I^2/(\alpha + \beta)^2$.

Дифференциальное уравнение (18.17) решаем методом разделения переменных:

$$\frac{dk}{\sqrt{k}[l-(\alpha+\beta)]\sqrt{k}} = dt.$$

Интегрируя это уравнение с заменой переменной $\sqrt{k} = z$, получаем его общее решение в окончательном виде:

$$k(t) = \left[\frac{1}{(\alpha+\beta)} + Cexp\left(-\frac{\alpha+\beta}{2}t\right)\right]^2. \qquad (18.19)$$

Семейство интегральных кривых сходится сверху и снизу к стационарному решению (рис. 18.4): т.е. $k \to k_{st}$ при $t \to \infty$. Следовательно, при неизменных входных параметрах задачи l, α и β функция фондовооруженности в данном случае устойчиво стремится к стационарному значению независимо от начальных условий. Такая стационарная точка $k = k_{st}$ является точкой устойчивого равновесия.

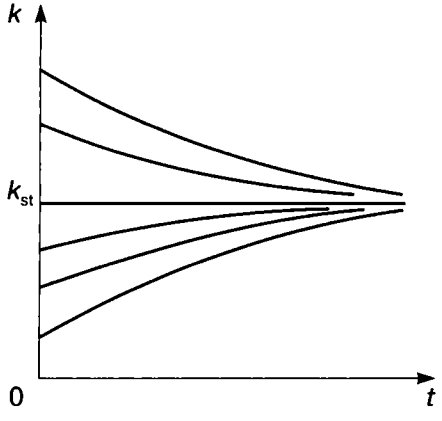


Рис. 18.4

18.2. Дифференциальные уравнения второго порядка (модель рынка с прогнозируемыми ценами)

Рассмотрим модель рынка с прогнозируемыми ценами. В простых моделях рынка спрос и предложение обычно полагают зависящими только от текущей цены на товар. Однако спрос и предложение в реальных ситуациях зависят еще и от тенденции ценообразования и темпов изменения цены. В моделях с непрерывными и дифференцируемыми по времени t функциями эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными функции цены $P(t)$.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть функции спроса D и предложения S имеют следующие зависимости от цены P и ее производных:

$$\begin{aligned} D(t) &= 3P'' - P' - 2P + 18, \\ S(t) &= 4P'' + P' + 3P + 3. \end{aligned} \tag{18.20}$$

Принятые в (18.20) зависимости вполне реалистичны: поясним это на слагаемых с производными функции цены.

1. Спрос "подогревается" темпом изменения цены: если темп растет ($P'' > 0$), то рынок увеличивает интерес к товару, и наоборот. Быстрый рост цены отпугивает покупателя, поэтому слагаемое с первой производной функции цены входит со знаком минус.

2. Предложение в еще большей мере усиливается темпом изменения цены, поэтому коэффициент при P'' в функции $S(t)$ больше, чем в $D(t)$. Рост цены также увеличивает предложение, потому слагаемое, содержащее P', входит в выражение для $S(t)$ со знаком плюс.

Требуется установить зависимость цены от времени. Поскольку равновесное состояние рынка характеризуется равенством $D = S$, приравняем правые части уравнений (18.20). После приведения подобных получаем

$$P'' + 2P' + 5P = 15. \tag{18.21}$$

Соотношение (18.21) представляет линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно

функции $P(t)$. Как было установлено в п. 17.3, общее решение такого уравнения состоит из суммы какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$P'' + 2P' + 5P = 0. \tag{18.22}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Его корни — комплексно-сопряженные числа: $k_{1,2} = -1 \pm 2i$, и, следовательно, общее решение уравнения (18.22) дается формулой

$$\tilde{P}(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В качестве частного решения неоднородного уравнения (18.21) возьмем решение $P = P_{\text{st}}$ — постоянную величину как *установившуюся* цену. Подстановка в уравнение (18.21) дает значение P_{st}:

$$P_{\text{st}} = 3.$$

Таким образом, общее решение уравнения (18.21) имеет вид

$$P(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t). \tag{18.23}$$

Нетрудно видеть, что $P(t) \to P_{\text{st}} = 3$ при $t \to \infty$, т.е. все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $P = 3$ и колеблются около нее. Это означает, что все цены стремятся к установившейся цене P_{st} с колебаниями около нее, причем амплитуда этих колебаний затухает со временем.

Приведем частные решения этой задачи в двух вариантах: задача Коши и смешанная задача.

1. Задача Коши. Пусть в начальный момент времени известна цена, а также тенденция ее изменения:

$$t = 0; \quad P = 4, \quad P' = 1.$$

Подставляя первое условие в формулу (18.23), получаем $P(0) = C_1 + 3 = 4$, откуда $C_1 = 1$, т.е. имеем

$$P(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + C_2 \sin 2t). \tag{18.24}$$

Дифференцируя, имеем отсюда

$$P'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t].$$

Теперь реализуем второе условие задачи Коши: $P'(0) = 2C_2 - -1 = 1$, откуда $C_2 = 1$. Окончательно получаем, что решение задачи Коши имеет вид

$$P(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t),$$

или в более удобной форме:

$$P(t) = 3 + \sqrt{2}e^{-t}\cos(2t - \pi/4).$$

2. Смешанная задача. Пусть в начальный момент времени известны цена и спрос:

$$t = 0; \quad P = 4, \quad D = 16.$$

Поскольку первое начальное условие такое же, как и в предыдущем случае, то имеем и здесь решение (18.24). Тогда производные функции $P(t)$ выражаются формулами

$$P'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t)],$$
$$P''(t) = -e^{-t}[(4C_2 + 3)\cos 2t - (3C_2 - 5)\sin 2t].$$

Отсюда $P'(0) = 2C_2 - 1$ и $P''(0) = -4C_2 - 3$. Подставляя эти равенства во второе условие задачи, т.е. $D(0) = 16$, имеем с учетом вида $D(t)$ из первой формулы (18.20): $C_2 = -1$. Итак, решение данной задачи имеет вид

$$P(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t - \sin 2t),$$

или в более удобной форме:

$$P(t) = 3 - \sqrt{2}e^{-t}\sin(2t - \pi/4). \tag{18.25}$$

Интегральные кривые, соответствующие задачам 1 и 2, изображены на рис. 18.5.

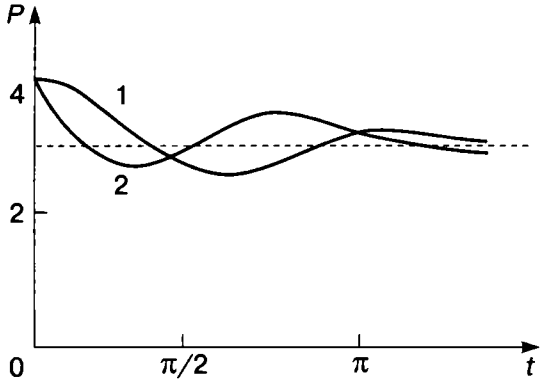


Рис. 18.5

УПРАЖНЕНИЯ

18.1. Используя формулу (18.13) динамики национального дохода $Y(t)$ по модели Кейнса:

а) проанализировать роль каждого параметра в увеличении величины Y_p согласно формуле (18.12), что ведет к падению $Y(t)$;

б) вывести рекомендации по изменению параметров, описывающих основные экономические показатели;

в) выбрать более предпочтительные изменения, указанные в п. б, применительно к условиям России.

18.2. Найти динамику цены P на товар, если прогноз спроса и предложения описывается следующими соотношениями:

а) $D(t) = P'' - 2P' - 2P + 10, \quad S(t) = 2P'' + 2P' + 4P + 4;$

б) $D(t) = P'' - 2P' - 6P + 36, \quad S(t) = 2P'' + 4P' + 4P + 6;$

в) $D(t) = P'' + 4P' + 2P + 8, \quad S(t) = 2P'' + 2P' + 3P + 6.$

18.3. В условиях предыдущей задачи какой из трех случаев описывает паническое состояние на рынке и с чем это связано?

Раздел II

ОСНОВЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Управление и планирование являются наиболее сложными функциями в работе предприятий, фирм, служб администраций всех уровней. Долгое время они являлись монополией человека с соответствующей подготовкой и опытом работы. Совершенствование науки, техники, разделение труда усложнили принятие решений в управлении и планировании.

Для принятия обоснованного решения необходимо иметь и обработать большое количество информации, определяемое иногда астрономическими цифрами. Принятие ответственных решений, как правило, связано с большими материальными ценностями. В настоящее время недостаточно знать путь, ведущий к достижению цели. Необходимо из всех возможных путей выбрать наиболее экономичный, который наилучшим образом соответствует поставленной задаче.

Появление цифровых вычислительных машин и персональных компьютеров создало огромные возможности для развития науки, совершенствования методов планирования и управления производством. Однако без строгих формулировок задач, без математического описания процессов современный уровень управления и планирования не может быть достигнут.

Задачи управления и планирования обычно сводятся к выбору некоторой системы параметров и системы функций, которые приводят к экстремальным задачам следующего вида.

Требуется найти максимум функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{(а)}$$

при условиях:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0, \tag{b}$$

$$x_j \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{c}$$

где f, g_i — функции, x_1, $x_2, \ldots, x_n$ — параметры управления.

Выражение (a) называется *функцией цели*. Условия (b) и (c) представляют собой ограничения поставленной задачи. Условия (c) справедливы для многих задач, особенно экономических, когда параметры управления (x_j) по своему физическом смыслу не могут быть отрицательными. Среди условий задачи могут быть равенства.

Математическая дисциплина, занимающаяся изучением экстремальных (максимальных или минимальных) задач управления, планирования и разработкой методов их решения, получила название *математического программирования*.

Основное отличие задач математического программирования от условных экстремальных задач, которые будут рассмотрены в части 7, заключается в наличии неравенств в системе ограничений. Поэтому методы решения задач на условный экстремум с помощью множителей Лагранжа не могут быть применены.

В зависимости от вида функции цели и ограничений математическое программирование делится на линейное и нелинейное. .

Наиболее разработанным разделом математического программирования является линейное программирование.

В задачах линейного программирования возможны случаи, когда параметры управления могут принимать лишь целые дискретные значения. При решении подобных задач используется целочисленное программирование.

В некоторых случаях исходные параметры задачи могут изменяться в некоторых пределах, для их решения применяется параметрическое программирование.

В настоящее время не существует общих и достаточно эффективных методов решения задач нелинейного программирования. Лишь для определенного класса нелинейных задач, система ограничений которых линейна, а целевая функция нелинейна, но обладает свойством выпуклости, разработаны доста-

точно эффективные методы, получившие название методов выпуклого программирования.

На практике часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых необходимо принимать решения при наличии двух или более сторон, имеющих различные цели. Результаты любого действия каждой из сторон зависят от решений партнеров. В экономике подобные ситуации встречаются довольно часто. Для решения задач с конфликтными ситуациями используют математические методы теории игр.

Динамическое программирование — один из разделов методов оптимизации, в котором процесс принятия решения может быть разбит на отдельные этапы. В основе метода лежит принцип оптимальности, разработанный Р. Беллманом.

Сетевые модели, в основе которых лежит теория графов, позволяют проводить их оптимизацию, а также совокупность расчетных и организационных мероприятий по управлению комплексами работ при создании новых изделий и технологий.

Цель изучения системы массового обслуживания состоит в том, чтобы контролировать их характеристики для проведения оптимизации системы в целом.

Рассмотрение моделей управления запасами преследует цель выбора для предприятий оптимальных расходов на доставку, хранение комплектующих материалов и ресурсов, необходимых для изготовления изделий.

Часть 5
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общая постановка задачи

Определение 1. *Линейное программирование* — наука о методах исследования и отыскания экстремальных (наибольших и наименьших) значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

Эта линейная функция называется *целевой*, а ограничения, которые математически записываются в виде уравнений или неравенств, называются *системой ограничений.*

Определение 2. Математическое выражение целевой функции и ее ограничений называется *математической моделью экономической задачи.*

В общем виде математическая модель задачи линейного программирования (ЛП) записывается как

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_jx_j + \cdots + c_nx_n \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n},$$

где x_j — неизвестные; a_{ij}, b_i, c_j — заданные постоянные величины.

Все или некоторые уравнения системы ограничений могут быть записаны в виде неравенств.

Математическая модель в более краткой записи имеет вид

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad x_j \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Определение 3. Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется вектор $\bar{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений.

Множество допустимых решений образует область допустимых решений (ОДР).

Определение 4. Допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего экстремального значения, называется оптимальным решением задачи линейного программирования и обозначается $\bar{X}_{\text{опт}}$.

Базисное допустимое решение $\bar{X}(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ является опорным решением, где r — ранг системы ограничений.

Виды математических моделей

Математическая модель задачи ЛП может быть канонической и неканонической.

Определение 5. Если все ограничения системы заданы уравнениями и переменные x_j неотрицательные, то такая модель задачи называется *канонической.*

Если хотя бы одно ограничение является неравенством, то модель задачи ЛП является *неканонической.* Чтобы перейти от неканонической модели к канонической, необходимо в каждое неравенство ввести балансовую переменную x_{n+i}. Если знак неравенства $\leq$, то балансовая переменная вводится со знаком плюс, если знак неравенства $\geq$, то — минус. В целевую функцию балансовые переменные не вводятся.

Чтобы составить математическую модель задачи ЛП, необходимо:

— ввести обозначения переменных;
— исходя из цели экономических исследований, составить целевую функцию;
— учитывая ограничения в использовании экономических показателей задачи и их количественные закономерности, записать систему ограничений.

Для рассмотрения решения задач линейного программирования дадим некоторые понятия аналитической геометрии в n-мерном пространстве.

Глава 19
ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

19.1. Основные понятия и определения

Дано n-мерное пространство, точки которого имеют координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Определение 1. Множество точек n-мерного пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0,$$

где хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ отлично от нуля, называется *гиперплоскостью n-мерного пространства.*

В векторной форме оно записывается следующим образом:

$$\bar{a}\bar{x} = b,$$

где $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Даны две гиперплоскости

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 = 0. \end{cases}$$

Определение 2. Множество точек n-мерного пространства, координаты которых одновременно удовлетворяют каждому уравнению системы, называется *пересечением гиперплоскостей.*

Дано неравенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b \leq 0.$$

Эта зависимость определяет полуплоскость двухмерного пространства, лежащую по одну сторону от прямой

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0,$$

которая называется граничной прямой.

Определение 3. Множество точек n-мерного пространства, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b \leq 0,$$

называется полупространством n-мерного пространства, расположенным по одну сторону от гиперплоскости

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0.$$

Определение 4. Множество точек n-мерного пространства, содержащее вместе с любыми двумя точками A и B и все точки отрезка AB, называется *выпуклым телом* (*областью, фигурой*).

Примеры плоских выпуклых фигур приведены на рис. 19.1.

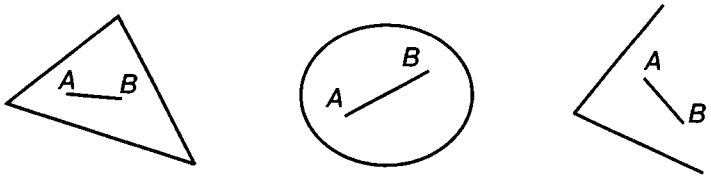


Рис. 19.1

Примеры невыпуклых фигур приведены на рис. 19.2.

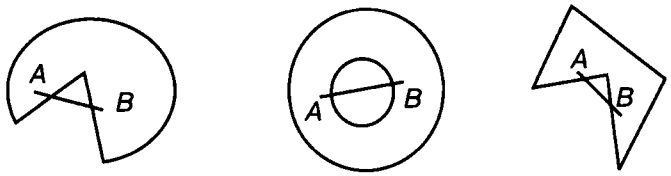


Рис. 19.2

Дадим некоторые определения выпуклой области.

Определение 5. Точка A называется *внутренней точкой выпуклой области*, если в сколь угодно малой окрестности этой точки содержатся только точки этой области.

Определение 6. Точка B называется *граничной точкой выпуклой области*, если в сколь угодно малой окрестности этой точки содержатся как точки данной области, так и не принадлежащие ей (рис. 19.3).

Определение 7. Точка C называется *угловой точкой выпуклой области*, если она является граничной и не лежит внутри отрезка, соединяющего две другие точки этой области (рис. 19.3).

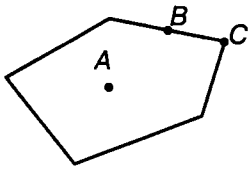


Рис. 19.3

Определение 8. Если область включает все свои граничные точки, то она называется *замкнутой*.

Выпуклая область может быть ограниченной и неограниченной.

Определение 9. *Ограниченной называется область*, если существует такое число $M > 0$, что радиус-вектор $\bar{x}$, соединяющий начало координат с любой точкой области, по абсолютной величине меньше M, т.е. $|\bar{x}| \leq M$.

Для этой области все ее точки находятся на конечном расстоянии от начала координат.

Определение 10. Если найдутся точки области, сколь угодно удаленные от начала координат, то область называется *неограниченной.*

Определение 11. Выпуклая замкнутая ограниченная область, имеющая конечное число угловых точек, называется выпуклым *n-мерным многогранником.*

Определение 12. Выпуклая замкнутая неограниченная область, имеющая конечное число угловых точек, называется выпуклой *n-мерной многогранной областью.*

Определение 13. Линейная комбинация S векторов

$$t_1\bar{x}_1 + t_2\bar{x}_2 + \cdots + t_s\bar{x}_s = \sum_{i=1}^{s} t_i\bar{x}_i,$$

в которой коэффициенты t_i удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{s} t_i = 1, \quad t_i \geq 0, \quad i = \overline{1, s},$$

называется *выпуклой линейной комбинацией.*

Определение 14. *Пересечением выпуклых областей* называется множество точек, являющееся общей частью этих областей.

ТЕОРЕМА 19.1. *Пересечение выпуклых областей есть выпуклая область.*

ТЕОРЕМА 19.2. *Множество точек выпуклого n-мерного многогранника совпадает с множеством любых выпуклых линейных комбинаций его угловых точек.*

19.2. Решение систем m линейных неравенств с двумя переменными

Дана система m линейных неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \le 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \le 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + b_m \le 0. \end{cases}$$

Знаки некоторых или всех неравенств могут быть $\ge$.

Рассмотрим первое неравенство в системе координат X_1OX_2. Построим прямую

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 = 0,$$

которая является *граничной прямой*.

Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости 1 и 2 (рис. 19.4).

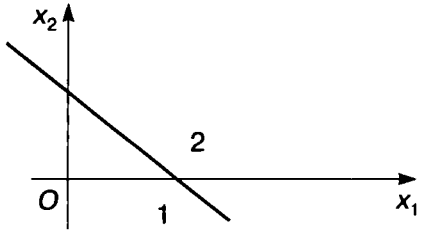


Рис. 19.4

Полуплоскость 1 содержит начало координат, полуплоскость 2 не содержит начала координат.

Для определения, по какую сторону от граничной прямой расположена заданная полуплоскость, надо взять произвольную точку на плоскости (лучше начало координат) и подставить координаты этой точки в неравенство. Если неравенство справедливо, то полуплоскость обращена в сторону этой точки, если не справедливо, то в противоположную от точки сторону.

Направление полуплоскости на рисунках показываем стрелкой.

Определение 15. *Решением каждого неравенства системы* является полуплоскость, содержащая граничную прямую и расположенная по одну сторону от нее.

Определение 16. Пересечение полуплоскостей, каждая из которых определяется соответствующим неравенством системы, называется *областью решения системы* (*ОР*).

Определение 17. Область решения системы, удовлетворяющая условиям неотрицательности ($x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$), называется *областью неотрицательных, или допустимых, решений* (*ОДР*).

Если система неравенств совместна, то ОР и ОДР могут быть многогранником, неограниченной многогранной областью или одной точкой.

Если система неравенств несовместна, то ОР и ОДР — пустое множество.

Пример 1. Найти ОР и ОДР системы неравенств и определить координаты угловых точек ОДР

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3, & (19.1) \\ 3x_1 - x_2 \leq 6, & (19.2) \\ 2x_1 - x_2 \geq 0, & (19.3) \\ x_1 + x_2 \leq 5. & (19.4) \end{cases}$$

Решение. Найдем ОР первого неравенства: $x_1 + 3x_2 \geq 3$. Построим граничную прямую $x_1 + 3x_2 - 3 = 0$ (рис. 19.5). Подставим координаты точки $(0,0)$ в неравенство: $1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 > 3$; так как координаты точки $(0,0)$ не удовлетворяют ему, то решением неравенства (19.1) является полуплоскость, не содержащая точку $(0,0)$.

Аналогично найдем решения остальных неравенств системы. Получим, что ОР и ОДР системы неравенств является выпуклый многогранник $ABCD$.

Найдем угловые точки многогранника. Точку A определим как точку пересечения прямых

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

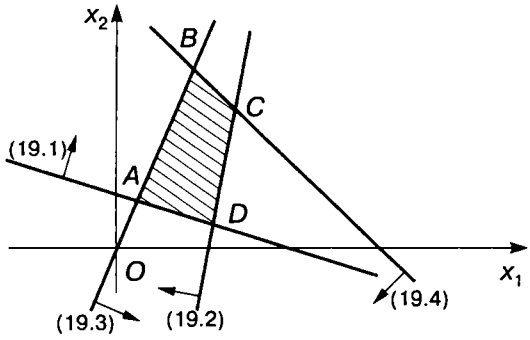


Рис. 19.5

Решая систему, получим $A(3/7, 6/7)$.

Точку B найдем как точку пересечения прямых

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Из системы получим $B(5/3, 10/3)$. Аналогично найдем координаты точек C и D: $C(11/4; 9/14)$, $D(3/10; 21/10)$.

Пример 2. Найти ОР и ОДР системы неравенств

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \le 15, & (19.5) \\ 2x_1 - 5x_2 \le 10, & (19.6) \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6. & (19.7) \end{cases}$$

Решение. Построим прямые и определим решения неравенств (19.5)–(19.7). ОР и ОДР являются неограниченные многогранные области $ACFM$ и $ABDEKM$ соответственно (рис. 19.6).

Пример 3. Найти ОР и ОДР системы неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, & (19.8) \\ x_1 - x_2 \le -1, & (19.9) \\ x_2 \le 1. & (19.10) \end{cases}$$

Решение. Найдем решения неравенств (19.8)–(19.10) (рис. 19.7). ОР представляет неограниченную многогранную область ABC; ОДР — точка B.

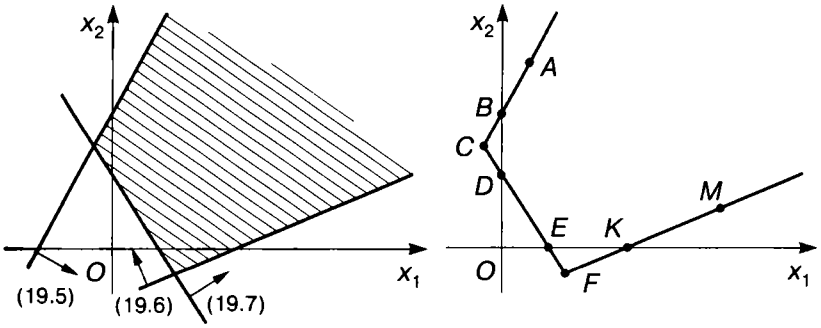


Рис. 19.6

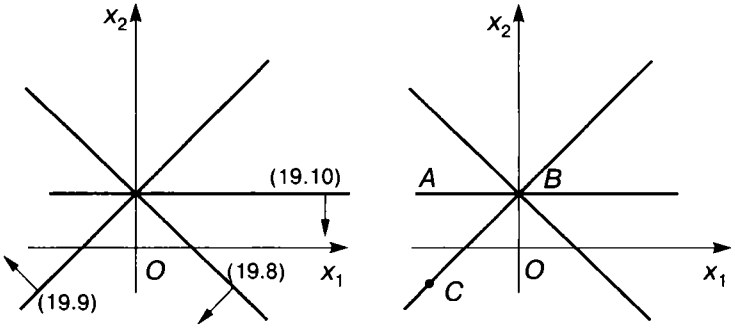


Рис. 19.7

Пример 4. Найти ОР и ОДР системы неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, & (19.11) \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, & (19.12) \\ x_2 \le 3. & (19.13) \end{cases}$$

Решение. Построив прямые, найдем решения неравенств системы. ОР и ОДР несовместны (рис. 19.8).

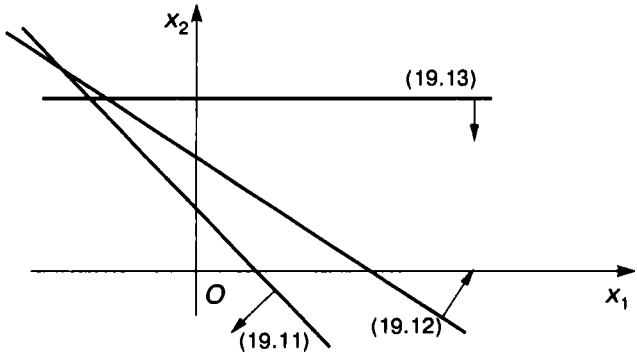


Рис. 19.8

УПРАЖНЕНИЯ

Найти ОР и ОДР систем неравенств

19.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 5. \end{cases}$

19.2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 11, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 0. \end{cases}$

19.3. $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -3, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 1, \\ 7x_1 + 4x_2 \geq 28. \end{cases}$

19.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 - 2x_2 \geq 2, \\ 2x_1 - x_2 \leq 1. \end{cases}$

19.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_2 \leq 2. \end{cases}$

19.6. $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 - 2x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 1. \end{cases}$

19.7. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 - 4x_2 \leq 4. \end{cases}$

19.8. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \geq 5. \end{cases}$

Глава 20
ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД

20.1. Постановка задачи

Наиболее простым и наглядным методом линейного программирования является графический метод. Он применяется для решения задач ЛП с двумя переменными, заданными в неканонической форме, и многими переменными в канонической форме при условии, что они содержат не более двух свободных переменных.

С геометрической точки зрения в задаче линейного программирования ищется такая угловая точка или набор точек из допустимого множества решений, на котором достигается самая верхняя (нижняя) линия уровня, расположенная дальше (ближе) остальных в направлении наискорейшего роста.

Для нахождения экстремального значения целевой функции при графическом решении задач ЛП используют вектор $\overline{\operatorname{grad}}\, L(\bar{x})$ на плоскости X_1OX_2, который обозначим $\bar{C}$. Этот вектор показывает направление наискорейшего изменения целевой функции, он равен

$$\overline{\operatorname{grad}}\, L(\bar{x}) = \bar{C} = \frac{\partial L}{\partial x_1}\bar{e}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}\bar{e}_2,$$

где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ — единичные векторы по осям OX_1 и OX_2 соответственно; таким образом, $\bar{C} = (\partial L/\partial x_1, \partial L/\partial x_2)$. Координатами вектора $\bar{C}$ являются коэффициенты целевой функции $L(\bar{x})$.

20.2. Алгоритм решения задач

1. Находим область допустимых решений системы ограничений задачи.

2. Строим вектор $\bar{C}$.

3. Проводим линию уровня L_0, которая перпендикулярна $\bar{C}$.

4. Линию уровня перемещаем по направлению вектора $\bar{C}$ для задач на максимум и в направлении, противоположном $\bar{C}$, для задач на минимум.

Перемещение линии уровня производится до тех пор, пока у нее не окажется только одна общая точка с областью допусти-

мых решений. Эта точка, определяющая единственное решение задачи ЛП, и будет точкой экстремума.

Если окажется, что линия уровня параллельна одной из сторон ОДР, то в таком случае экстремум достигается во всех точках соответствующей стороны, а задача ЛП будет иметь бесчисленное множество решений. Говорят, что такая задача ЛП имеет *альтернативный оптимум,* и ее решение находится по формуле

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (1-t)\bar{X}_1 + t\bar{X}_2,$$

где $0 \le t \le 1$, $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$ — оптимальные решения в угловых точках ОДР.

Задача ЛП может быть неразрешима, когда определяющие ее ограничения окажутся противоречивыми.

5. Находим координаты точки экстремума и значение целевой функции в ней.

20.3. Выбор оптимального варианта выпуска изделий

Фирма выпускает 2 вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используются два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы даны в табл. 20.1.

Таблица 20.1

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	Сливочное	Шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Розничная цена 1 кг сливочного мороженого 16 р., шоколадного — 14 р.

Какое количество мороженого каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение. Обозначим: x_1 — суточный объем выпуска сливочного мороженого, кг; x_2 — суточный объем выпуска шоколадного мороженого, кг.

Составим математическую модель задачи.

Целевая функция будет иметь вид

$$L(\bar{x}) = 16x_1 + 14x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365, \\ x_1 - x_2 \le 100, \\ x_2 \le 350, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

$OABDEF$ — область допустимых решений (рис. 20.1). Строим вектор $\bar{c}(1,1)$. Линия уровня L_0 задается уравнением

$$16x_1 + 14x_2 = \text{const}.$$

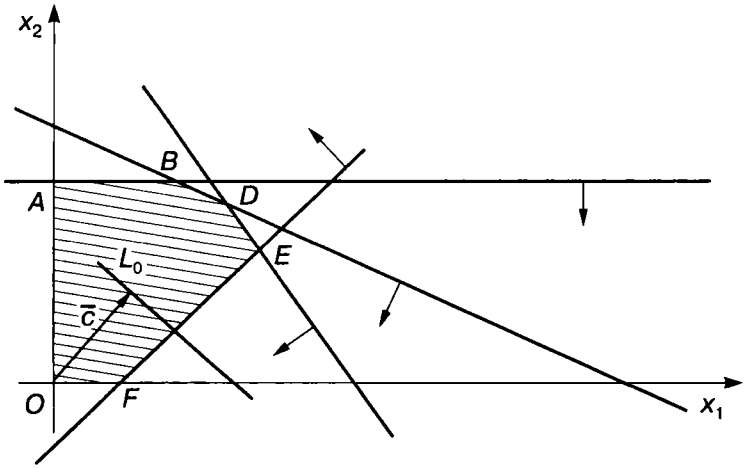


Рис. 20.1

Перемещаем линию уровня по направлению вектора $\bar{c}$. Точкой выхода L_0 из области допустимых решений является точка D, ее координаты определяются как пересечение прямых, заданных уравнениями:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365. \end{cases}$$

Решая систему, получим координаты точки $D(312,5; 300)$, в которой и будет оптимальное решение, т.е.

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (312{,}5; 300),$$

при этом

$$L(\bar{x})_{\max} = 16 \cdot 312{,}5 + 14 \cdot 300 = 9\,200 \text{ р.}$$

Таким образом, фирма должна выпускать в сутки 312,5 кг сливочного мороженого и 300 кг шоколадного мороженого, при этом доход от реализации составит 9 200 р.

20.4. Экономический анализ задач с использованием графического метода

Проведем экономический анализ рассмотренной выше задачи по производству мороженого.

Математическая модель задачи имеет вид

$$L(\bar{x}) = 16x_1 + 14x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400 & \text{(ограничение по молоку)}, & (20.1) \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365 & \text{(ограничение по наполнителям)}, & (20.2) \\ x_1 - x_2 \le 100 & \text{(рыночное ограничение по спросу)}, & (20.3) \\ x_2 \le 350 & \text{(рыночное ограничение по спросу)}, & (20.4) \end{cases}$$

$$x_{1,2} \le 0.$$

Согласно найденному оптимальному решению, фирме необходимо выпускать в сутки 312,5 кг сливочного и 300 кг шоколадного мороженого, при этом максимально возможный доход составит 9 200 р.

Определим, как влияет на оптимальное решение увеличение или уменьшение запасов исходных продуктов. Для анализа задачи примем, что неравенства системы ограничений могут быть активными или пассивными. Если прямая проходит через точку, в которой находится оптимальное решение, то будем считать, что она представляет активное ограничение. В противном случае прямая относится к пассивному ограничению.

Если ограничение активное, то будем считать, что соответствующий ресурс является дефицитным, так как он используется полностью. Если ограничение пассивное, то оно недефицитное и имеется в фирме в избытке.

Рассмотрим увеличение ресурса правой части ограничения (20.1) по молоку (рис. 20.2). При перемещении параллельно самой себе прямой (20.1) вправо до пересечения с прямыми (20.2) и (20.3) в точке M ограничение (20.1) будет оставаться активным. Точку M определим как точку пересечения прямых (20.2) и (20.3):

$$\begin{cases} 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365, \\ \qquad\quad x_1 - x_2 = 100. \end{cases}$$

Откуда получаем $M(370{,}83; 270,3)$.

Подставляя координаты точки M в уравнение (20.1), получим предельно допустимый суточный запас молока:

$$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 0,8 \cdot 370{,}83 + 0,5 \cdot 270{,}3 = 432,1 \text{ кг},$$

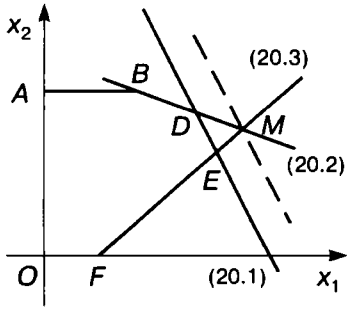


Рис. 20.2

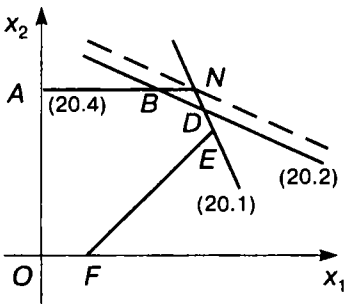


Рис. 20.3

при этом величина дохода составляет

$$L(\bar{x}) = 16 \cdot 370{,}83 + 14 \cdot 270{,}3 = 9724{,}9 \text{ р.}$$

Рассмотрим увеличение ограничения по наполнителям (рис. 20.3). При перемещении параллельно самой себе прямой (20.2) вправо до пересечения с прямыми (20.1) и (20.4) в точке N ограничение (20.2) будет оставаться активным. Точку N определим как точку пересечения прямых

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400, \\ \qquad\qquad\quad x_2 = 350. \end{cases}$$

Откуда получаем $N(281{,}25; 350)$.

Предельно допустимый суточный запас наполнителей можно увеличивать до значения

$$0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 0{,}4 \cdot 281{,}25 + 0{,}8 \cdot 350 = 392{,}5 \text{ кг},$$

при этом величина дохода составит

$$L(\bar{x}) = 16 \cdot 281{,}25 + 14 \cdot 350 = 9\,400 \text{ р.}$$

Рассмотрим возможность изменения правой части пассивных ограничений (20.3) и (20.4). Не изменяя оптимальное решение (рис. 20.4), прямую (20.3) можно перемещать параллельно самой себе вверх до пересечения с точкой $D(312{,}5; 300)$, т.е. правую часть ограничения (20.3) можно уменьшать до величины

$$312{,}5 - 300 = 12{,}5 \text{ кг.}$$

Прямую (20.3) можно перемещать параллельно самой себе вниз до пересечения с осью OX_1 в точке $P(500; 0)$, т.е. правую часть ограничения (20.3) можно увеличивать до 500 кг.

Таким образом, при неизменном оптимальном решении разница в покупательском спросе на сливочное и шоколадное мороженое может изменяться в диапазоне от 12,5 до 500 кг.

Аналогично, не изменяя оптимальное решение (рис. 20.5), прямую (20.4) можно перемещать параллельно самой себе вверх до пересечения с осью OX_2 в точке $R(0; 456{,}25)$ или вниз до пересечения с прямой (20.1) в точке $D(312{,}5; 300)$.

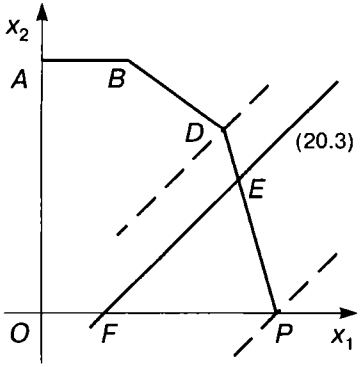


Рис. 20.4

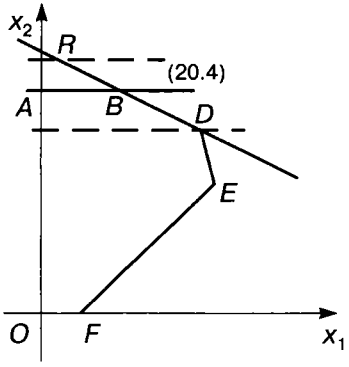


Рис. 20.5

Таким образом, при неизменном оптимальном решении покупательский спрос на шоколадное мороженое может изменяться в диапазоне от 300 до 456,25 кг.

Проведем анализ задачи по пределам возможного изменения коэффициентов целевой функции, т.е. по диапазону оптовых цен на мороженое, при котором не происходит изменения оптимального решения.

Изменение коэффициентов целевой функции оказывает влияние на наклон линии уровня. Уравнение линии уровня записывается в общем виде (рис. 20.6):

$$c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}.$$

Угловой коэффициент прямой (20.1):

$$K_1 = -8/5.$$

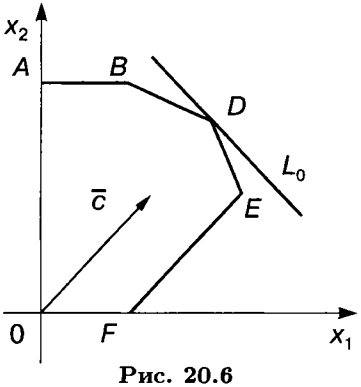


Рис. 20.6

Так как прямые совпадают, то $K = K_1$, откуда $c_{1\,\max} = 22{,}4$ при $c_2 = 14$. Коэффициент c_1 можно уменьшать до совпадения линии уровня с прямой (20.2), поэтому

$$-c_1/14 = -1/2, \qquad c_{1\,\min} = 7.$$

Таким образом, оптимальное решение задачи не изменится, если розничная цена 1 кг сливочного мороженого лежит в диапазоне от 7 до 22,4 р., при этом доход фирмы будет от 6 387,5 до 11 200 р.

Аналогичные рассуждения для случая $c_1 = 16$ позволили сделать вывод, что оптимальное решение задачи не изменится, если розничная цена 1 кг шоколадного мороженого лежит в диапазоне от 10 до 32 р., при этом доход фирмы будет от 8 000 до 14 600 р.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить задачи с использованием графического метода.

20.1. $L(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

20.2. $L(\bar{x}) = 2x_1 - 10x_2 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 5x_2 \ge -5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

20.3. $L(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 8, \\ x_1 \le 4, \\ 2x_2 \ge 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

20.4. $L(\bar{x}) = 3x_1 + 5x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3, \\ -3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_2 \ge 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

20.5. $L(\bar{x}) = 4x_1 + 6x_2 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 6x_2 \ge 12, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

20.6. $L(\bar{x}) = 4x_2 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 18, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ 5x_1 - 3x_2 \le 15, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

20.7. $L(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 20, \\ x_2 \ge 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

20.8. В суточный рацион включают два продукта питания Π_1 и Π_2, причем продукта Π_1 должно войти в дневной рацион не более 200 ед. Стоимость 1 ед. продукта Π_1 составляет 2 р., продукта Π_2 — 4 р. Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта, минимальные нормы потребления указаны в табл. 20.2.

Определить оптимальный рацион питания, стоимость которого будет наименьшей.

Провести анализ задач с использованием графического метода.

Таблица 20.2

Питательные вещества	Минимальная норма потребления	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта	
		$П_1$	$П_2$
A	120	0,2	0,2
B	160	0,4	0,2

20.9. $L(\bar{x}) = x_1 + x_2 \to \max\ (\min)$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

20.10. Фирма выпускает изделия двух типов: A и B. При этом используется сырье четырех видов. Расход сырья каждого вида на изготовление единицы продукции и запасы сырья заданы в табл. 20.3.

Таблица 20.3

Изделия	Сырье			
	1	2	3	4
A	2	1	0	2
B	3	0	1	1

Запасы сырья 1-го вида составляют 21 ед., 2-го вида — 4 ед., 3-го вида — 6 ед. и 4-го вида — 10 ед. Выпуск одного изделия типа A приносит доход 300 р., одного изделия типа B — 200 р.

Составить план производства, обеспечивающий фирме наибольший доход.

20.11. Обработка деталей A и B может производиться на трех станках, причем каждая деталь должна последовательно обрабатываться на каждом из станков. Прибыль от реализации детали A — 100 р., детали B — 160 р. Исходные данные приведены в табл. 20.4.

Таблица 20.4

Станки	Норма времени на обработку одной детали, ч		Время работы станка, ч
	A	*B*	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100

Определить производственную программу, максимизирующую прибыль при условии: спрос на деталь A — не менее 300 шт., на деталь B — не более 200 шт.

Глава 21
СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

21.1. Общая постановка задачи

Метод является универсальным, так как позволяет решить практически любую задачу линейного программирования, записанную в каноническом виде.

Идея симплексного метода (метода последовательного улучшения плана) заключается в том, что начиная с некоторого исходного опорного решения осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному. Значение целевой функции при этом перемещении для задач на максимум не убывает. Так как число опорных решений конечно, то через конечное число шагов получим оптимальное опорное решение. *Опорным решением называется базисное неотрицательное решение.*

21.2. Алгоритм симплексного метода

1. Математическая модель задачи должна быть канонической. Если она неканоническая, то ее надо привести к каноническому виду.

2. Находим исходное опорное решение и проверяем его на оптимальность. Для этого заполняем симплексную таблицу (табл. 21.1). Все строки таблицы 1-го шага, за исключением строки Δ_j (индексная строка), заполняем по данным системы ограничений и целевой функции.

Таблица 21.1

c_i	БП	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n	b_i
c_1	x_1	1	0	...	0	$h_{1,m+1}$	...	h_{1n}	f_1
c_2	x_2	0	1	...	0	$h_{2,m+1}$	...	h_{2n}	f_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
c_m	x_m	0	0	...	1	$h_{m,m+1}$	...	h_{mn}	f_m
	Δ_j	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_n	$L(\bar{x}_1)$

Индексная строка для переменных находится по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i h_{ij} - c_j, \quad j = \overline{1,n}$$

и по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i \text{ для свободного члена.}$$

Возможны следующие случаи при решении задачи на максимум:

— если все оценки $\Delta_j \geq 0$, то найденное решение оптимальное;

— если хотя бы одна оценка $\Delta_j \leq 0$, но при соответствующей переменной нет ни одного положительного коэффициента, решение задачи прекращаем, так как $L(\bar{x}) \to \infty$, т.е. целевая функция неограничена в области допустимых решений;

— если хотя бы одна оценка отрицательная, а при соответствующей переменной есть хотя бы один положительный коэффициент, то нужно перейти к другому опорному решению;

— если отрицательных оценок в индексной строке несколько, то в столбец базисной переменной (БП) вводят ту переменную, которой соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка.

Если хотя бы одна оценка $\Delta_k < 0$, то k-й столбец принимаем за ключевой. За ключевую строку принимаем ту, которой соответствует минимальное отношение свободных членов (b_i) к положительным коэффициентам k-го столбца. Элемент, находящийся на пересечении ключевых строки и столбца, называется *ключевым элементом.*

3. Заполняем симплексную таблицу 2-го шага:

— переписываем ключевую строку, разделив ее на ключевой элемент;

— заполняем базисные столбцы;

— остальные коэффициенты таблицы находим по правилу "прямоугольника"[1]. Оценки можно считать по приведенным выше формулам или по правилу "прямоугольника". Получаем новое опорное решение, которое проверяем на оптимальность, и т.д.

Примечание. Если целевая функция $L(\bar{x})$ требует нахождения минимального значения, то критерием оптимальности задачи является неположительность оценок Δ_j при всех $j = \overline{1, n}$.

---

[1]Правило "прямоугольника" заключается в следующем. Пусть ключевым элементом 1-го шага является элемент 1-й строки $(m+1)$-го столбца $h_{1,m+1}$. Тогда элемент i-й строки $(m+2)$-го столбца 2-го шага — обозначим его $h'_{i,m+2}$ — согласно правилу "прямоугольника" выражается формулой

$$h'_{i,m+2} = \frac{h_{1,m+1} \cdot h_{i,m+2} - h_{i,m+1} \cdot h_{1,m+2}}{h_{1,m+1}},$$

где $h_{i,m+2}$, $h_{i,m+1}$, $h_{1,m+1}$ — элементы 1-го шага.

21.3. Анализ эффективности использования производственного потенциала предприятия

Предприятие располагает тремя производственными ресурсами (сырьем, оборудованием, электроэнергией) и может организовать производство продукции двумя различными способами. Расход ресурсов за один месяц и общий ресурс при каждом способе производства даны в табл. 21.2 (в усл. ед.).

Таблица 21.2

Производственные ресурсы	Расход ресурсов за 1 месяц при работе		Общий ресурс
	1-м способом	2-м способом	
Сырье	1	2	4
Оборудование	1	1	3
Электроэнергия	2	1	8

При первом способе производства предприятие выпускает за один месяц 3 тыс. изделий, при втором — 4 тыс. изделий.

Сколько месяцев должно работать предприятие каждым из этих способов, чтобы при наличных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции?

Решение. Составим математическую модель задачи. Обозначим: x_1 — время работы предприятия первым способом, x_2 — время работы предприятия вторым способом.

Математическая модель имеет вид

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Составляем симплексную таблицу 1-го шага (табл. 21.3).

Таблица 21.3

c_i	БП	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	1	$\boxed{2}$	1	0	0	4
0	x_4	1	1	0	1	0	3
0	x_5	1	1	0	0	1	8
	Δ_j	−3	−4	0	0	0	0

Получим решение:

$$\bar{X}_1 = (0, 0, 4, 3, 8), \quad L(\bar{x}_1) = 0.$$

В индексной строке Δ_j имеются две отрицательные оценки, значит, найденное решение не является оптимальным и его можно улучшить. В качестве ключевого столбца следует принять столбец базисной переменной x_2, а за ключевую строку взять строку переменной x_3, где $\min(4/2, 3/1, 8/1) = \min(2, 3, 8) = 2$.

Ключевым элементом является $\boxed{2}$. Вводим в столбец базисной переменной x_2, выводим x_3. Составляем симплексную таблицу 2-го шага (табл. 21.4).

Получим

$$\bar{X}_2 = (0, 2, 0, 1, 6), \qquad L(\bar{x}_2) = 8.$$

Таблица 21.4

c_i	БП	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
4	x_2	1/2	1	1/2	0	0	2
0	x_4	$\boxed{1/2}$	0	−1/2	1	0	1
0	x_5	3/2	0	−1/2	1	1	6
	Δ_j	−1	0	2	0	0	8

Таблица 21.5

c_i	БП	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
4	x_2	0	1	1	−1	0	1
3	x_1	1	0	−1	2	0	2
0	x_5	0	0	1	−3	1	3
	Δ_j	0	0	1	2	0	10

В индексной строке имеется одна отрицательная оценка. Полученное решение можно улучшить. Ключевым элементом является $\boxed{1/2}$. Составляем симплексную таблицу 3-го шага (табл. 21.5).

Все оценки свободных переменных $\Delta_j \geq 0$, следовательно, найденное опорное решение является оптимальным:

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (2, 1, 0, 0, 3), \qquad L(\bar{x})_{\max} = 10.$$

Таким образом, по первому способу предприятие должно работать два месяца, по второму — один месяц, при этом максимальный выпуск продукции составит 10 тыс. ед.

21.4. Альтернативный оптимум

При решении задач линейного программирования симплексным методом критерием оптимальности является условие

$\Delta_j \geq 0$ для задач на максимум и условие $\Delta_j < 0$ для задач на минимум. Если на каком-то шаге окажется, что хотя бы одна оценка свободной переменной $\Delta_j = 0$, а все остальные $\Delta_j > 0$ для задач на максимум ($\Delta_j < 0$ для задач на минимум), то, приняв в качестве ключевого столбца столбец, где $\Delta_j = 0$, и найдя новое оптимальное решение, заметим, что значение целевой функции при этом не изменится. Говорят, что в этом случае задача имеет альтернативный оптимум.

Критерием альтернативного оптимума при решении задач симплексным методом является равенство нулю хотя бы одной оценки свободной переменной ($\Delta_j = 0$).

Если только одна оценка свободной переменной равна нулю, то решение находится по формуле

$$\bar{X}_{\text{опт}} = t\bar{X}_{\text{опт1}} + (1-t)\bar{X}_{\text{опт2}},$$

где $0 \leq t \leq 1$.

Если две оценки и более, например S, свободных переменных равны нулю, то оптимальное решение определяется по формуле

$$\bar{X}_{\text{опт}} = \sum_{i=1}^{s} t_i \bar{X}_i,$$

где $\sum\limits_{i=1}^{s} t_i = 1$, $t_i \geq 0$.

В задачах, имеющих альтернативный оптимум, возникает возможность включения в ее модель других критериев эффективности.

Пример. Дана задача линейного программирования

$$L(\bar{x}) = 2x_1 - 4x_3 + 2x_5 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Таблица 21.6

c_i	БП	0	2	4	0	2	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_1	1	3	−1	0	2	7
0	x_4	0	−2	$\boxed{4}$	1	2	12
	Δ_j	0	−2	4	0	0	10

Решение. Составим симплексную таблицу (табл. 21.6).

В индексной строке имеется одна положительная оценка. Полученное решение можно улучшить. Ключевым элементом является 4. Составляем симплексную таблицу 2-го шага (табл. 21.7).

Таблица 21.7

c_i	БП	0	2	4	0	2	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_1	1	$\boxed{5/2}$	0	1/4	2	10
−4	x_3	0	−1/2	1	1/4	1/2	3
	Δ_j	0	0	0	−1	−2	−12

Получаем

$$\bar{X}_{\text{опт}1} = (10, 0, 3, 0, 0).$$

Так как $\Delta_2 = 0$, то задача имеет альтернативный оптимум. Найдем еще одно оптимальное решение, введя вместо базисной переменной x_1 свободную переменную x_2 (табл. 21.8).

Получаем

$$\bar{X}_{\text{опт}2} = (0, 4, 5, 0, 0).$$

Найдем координаты оптимального решения задачи:

$$x_1 = 10t + (1-t)0 = 10t,$$
$$x_2 = 0t + (1-t)4 = 4 - 4t,$$

Таблица 21.8

c_i	БП	0	2	4	0	2	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
2	x_2	2/5	1	0	1/10	4/5	4
−4	x_3	1/5	0	1	3/10	9/10	5
	Δ_j	0	0	0	−1	−4	−12

$$x_3 = 3t + (1-t)5 = -2t + 5,$$
$$x_4 = 0t + (1-t)0 = 0,$$
$$x_5 = 0t + (1-t)0 = 0.$$
$$\bar{X}_{\text{опт}} = (10t, 4-4t, 5-2t, 0, 0).$$

Давая t значения из $[0,1]$, получим различные $\bar{X}_{\text{опт}}$, при которых $L(\bar{x}) = -12$.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить следующие задачи симплексным методом.

21.1. $L(\bar{x}) = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

21.2. $L(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

21.3. $L(\bar{x}) = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

21.4. $L(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

21.5. $L(\bar{x}) = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

21.6. $L(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

21.7. $L(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 1, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

21.8. $L(\bar{x}) = x_1 - 5x_2 - x_3 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 \leq 4, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

21.9. $L(\bar{x}) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \geq 4, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

21.10. $L(\bar{x}) = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

21.11. Механический завод при изготовлении двух типов деталей использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. При этом обработку каждой детали можно вести двумя различными технологическими способами. Необходимые исходные данные приведены в табл. 21.9.

Составить оптимальный план загрузки оборудования, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Таблица 21.9

Оборудование	Детали				Полезный фонд времени, станко-ч
	1		2		
	Технологические способы				
	1	2	1	2	
Фрезерное	2	2	3	0	20
Токарное	3	1	1	2	37
Сварочное	0	1	1	4	30
Прибыль, усл. ед.	11	6	9	6	

21.12. Торговая фирма для продажи товаров трех видов использует ресурсы: время и площадь торговых залов. Затраты ресурсов на продажу одной партии товаров каждого вида даны в табл. 21.10. Прибыль, получаемая от реализации одной

партии товаров 1-го вида, — 5 усл. ед., 2-го вида — 8 усл. ед., 3-го вида — 6 усл. ед.

Определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую фирме максимальную прибыль.

Таблица 21.10

Ресурсы	Вид товара			Объем ресурсов
	1	2	3	
Время,чел.-ч	0,5	0,7	0,6	370
Площадь, м^2	0,1	0,3	0,2	90

21.13. Фирма выпускает четыре пользующихся спросом изделия, причем месячная программа выпуска составляет 10 изделий типа 1 и 3, 200 изделий типа 2 и 120 изделий типа 4. Нормы затрат сырья на единицу различных типов изделий приведены в табл. 21.11.

Таблица 21.11

Вид сырья	Нормы затрат на одно изделие				Запасы сырья, ед.
	1	2	3	4	
1	5	1	0	2	1000
2	4	2	2	1	600
3	1	0	2	1	150

Прибыль от реализации изделий типа 1 равна 6 усл. ед., изделий типа 2 — 2 усл. ед., изделий типа 3 — 2,5 усл. ед. и изделий типа 4 — 4 усл. ед.

Определить, является ли месячная программа выпуска изделий оптимальной, и если нет, то определить оптимальную месячную программу и дополнительный доход, который фирма может при этом получить.

21.14. Металлургический завод из металлов A_1, A_2, A_3 может выпускать сплавы B_1, B_2, B_3. В течение планируемого периода завод должен освоить не менее 640 т металла A_1 и 800 т

металла A_2, при этом металла A_3 может быть израсходовано не более 860 т.

Определить минимальные затраты, если данные о нормах расхода и себестоимость даны в табл. 21.12.

Таблица 21.12

Вид металлов	Технологические нормы расхода металла на усл. ед. сплава			Наличие металла у завода
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1,0	4,3	2,6	640
A_2	5,0	1,5	3,0	800
A_3	3,0	3,9	4,3	860
Себестоимость 1 т сплава	18	15	15	

21.15. Ткань трех артикулов производится на ткацких станках двух типов с различной производительностью. Для изготовления ткани используются пряжа и красители. В табл. 21.13 указаны мощности станков в тысячах станко-часов, ресурсы пряжи и красителей в 1000 кг, производительности станков в метрах за час, нормы расхода пряжи и краски в килограммах на 1000 м и цена 1 м ткани.

Таблица 21.13

Вид ресурсов	Объем ресурсов	Нормы расхода		
		1	2	3
Станки 1-го типа	30	20	10	25
Станки 2-го типа	45	8	20	10
Пряжа	30	120	180	210
Красители	1	10	5	8
Цена, усл. ед.		15	15	20

По этим исходным данным решить следующие задачи:

1) определить оптимальный ассортимент, максимизирующий товарную продукцию предприятия;
2) приняв условие, что количество тканей трех артикулов находится в отношении 2 : 1 : 3, определить, какое максимальное количество комплектов ткани может выпустить предприятие;
3) определить оптимальный ассортимент, максимизирующий доход предприятия, если цена 1 м ткани составляет 8, 5 и 15 усл. ед. соответственно;
4) решить задачу (1) при условии, что станки 1-го типа ткань первого артикула не производят.

Глава 22
ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Произвольную задачу линейного программирования можно определенным образом сопоставить с другой задачей линейного программирования, называемой *двойственной*. Первоначальная задача является исходной. Эти две задачи тесно связаны между собой и образуют единую двойственную пару.

Различают симметричные, несимметричные и смешанные двойственные задачи.

22.1. Виды двойственных задач и составление их математических моделей

Симметричные двойственные задачи

Дана исходная задача

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 & \mid y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 & \mid y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m & \mid y_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Задача дана в неканоническом виде. Составим математическую модель двойственной задачи, для этого:

— каждому неравенству системы ограничений исходной задачи приводим в соответствие переменную y_i;
— составляем целевую функцию, коэффициентами которой являются свободные члены системы ограничений исходной задачи;
— составляем систему ограничений. Коэффициенты системы ограничений образуют транспонированную матрицу коэффициентов системы ограничений исходной задачи. Знаки неравенств меняются на противоположные;
— свободными членами системы ограничений являются коэффициенты целевой функции исходной задачи. Все переменные двойственной задачи неотрицательные.

Математическая модель двойственной задачи имеет вид

$$S(\bar{y}) = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Несимметричные двойственные задачи

Дана исходная задача

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & \mid y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & \mid y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & \mid y_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Задача дана в каноническом виде. Составим математическую модель двойственной задачи.

Для ее составления пользуются тем же правилом, что и для составления симметричной задачи, с учетом следующих особенностей:

— ограничениями двойственной задачи будут неравенства. Если в целевой функции двойственной задачи требуется найти минимум, то знак неравенства $\geq$, если максимум, то $\leq$;
— переменные y_i — произвольные по знаку.

Математическая модель двойственной задачи имеет вид

$$S(\bar{y}) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m \geq c_1, \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m2} y_m \geq c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \cdots + a_{mn} x_n \geq c_n, \end{cases}$$

$$y_i \text{ — произвольные по знаку}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Смешанные двойственные задачи

Математическая модель исходной задачи имеет условия симметричных и несимметричных задач. При составлении двойственной задачи необходимо выполнять правила симметричных и несимметричных задач.

22.2. Основные теоремы двойственности

ТЕОРЕМА 22.1. *Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то другая также имеет оптимальное решение, причем для любых оптимальных решений $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ выполняется равенство*

$$L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min}.$$

Если одна из двойственных задач неразрешима ввиду того, что $L(\bar{x})_{\max} \to \infty$ (или $S(\bar{y})_{\min} \to -\infty$), то другая задача не имеет допустимых решений.

ТЕОРЕМА 22.2. *Для оптимальности допустимых решений $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ пары двойственных задач необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли системе уравнений*

$$\begin{cases} x_{\text{опт}j}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_{\text{опт}i} - c_j\right) = 0, \\ y_{\text{опт}i}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_{\text{опт}j} - b_i\right) = 0. \end{cases}$$

Теоремы позволяют определить оптимальное решение одной из пары задач по решению другой.

22.3. Решение двойственных задач

Решение симметричных задач

Рассмотрим решение задач с использованием теорем двойственности.

Исходная задача

$$L(\bar{x}) = x_1 - x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 & \mid y_1 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 & \mid y_2 \\ x_1 + x_2 \le 5 & \mid y_3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Двойственная задача

$$S(\bar{y}) = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \ge 1 & \mid x_1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \ge -1 & \mid x_2 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Решим исходную задачу графическим методом, получим $\bar{X}_{\text{опт}} = (4, 1)$, при этом $L(\bar{x})_{\max} = 3$.

На основании 1-й теоремы двойственности

$$L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min} = 3.$$

Так как x_1, $x_2 > 0$, то по 2-й теореме двойственности систему ограничений двойственной задачи можно записать в виде равенств:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = -1. \end{cases}$$

Подставим $\bar{X}_{\text{опт}}$ в систему ограничений исходной задачи:

$$\begin{cases} -2 \cdot 4 + 1 \leq 2, & 9 < 2 \implies y_1 = 0, \\ 4 - 2 \cdot 1 \leq 2, & 2 = 2 \implies y_2 > 0, \\ 4 + 1 \leq 5, & 5 = 5 \implies y_3 > 0. \end{cases}$$

Тогда система ограничений двойственной задачи примет вид

$$\begin{cases} y_2 + y_3 = 1, \\ -2y_2 + y_3 = -1. \end{cases}$$

Откуда $\bar{Y}_{\text{опт}} = (0, 2/3, 1/3)$, при этом $S(\bar{y})_{\min} = 3$.

Пусть дано решение двойственной задачи $\bar{Y}_{\text{опт}} = (0, 2/3, 1/3)$, $S(\bar{y})_{\min} = 3$, найдем решение исходной.

По 1-й теореме двойственности $L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min} = 3$. Так как $y_2, y_3 > 0$, то по 2-й теореме двойственности второе и третье неравенства исходной задачи обращаются в равенства:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Откуда $\bar{X}_{\text{опт}} = (4, 1)$, при этом $L(\bar{x})_{\max} = 3$.

Рассмотрим решение задач методом, основанным на взаимно однозначном соответствии между переменными: основным переменным исходной задачи соответствуют балансовые переменные двойственной, и наоборот. Для этого решим двойственную задачу симплексным методом:

$$S(\bar{y}) = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 1, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 - y_5 = 1, \end{cases}$$

Таблица 22.1

b_i	БП	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	c_j
		-2	1	$\boxed{1}$	-1	0	1
	y_5	1	2	-1	0	1	1
5	y_3	-2	1	1	-1	0	1
0	y_5	-3	$\boxed{3}$	0	-1	1	2
	Δ_j	-12	3	0	-5	0	5
5	y_3	-1	0	1	$-2/3$	$-1/3$	$1/3$
2	y_2	-1	1	0	$-1/3$	$1/3$	$2/3$
	Δ_j	9	0	0	-4	-1	3

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

Из табл. 22.1 следует, что $\bar{Y}_{\text{опт}} = (0, 2/3, 1/3)$, $S(\bar{y})_{\min} = 3$. На основании 1-й теоремы двойственности получаем

$$L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min} = 3.$$

Решение другой задачи найдем по соответствию между переменными:

	Основные переменные			**Балансовые переменные**	
исходная задача	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
двойственная	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3
	балансовые переменные			основные переменные	

Значение x_j определяем по последней симплексной таблице в строке Δ_i в соответствующем столбце, причем значения x_j берем по модулю:

$$x_1 \to y_4, \quad x_1 = |\Delta_4| = |-4| = 4,$$
$$x_2 \to y_5, \quad x_2 = |\Delta_5| = |-1| = 1.$$

Таким образом, решение исходной задачи:

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (4, 1), \text{ при этом } L(\bar{x})_{\max} = 3.$$

Если исходная задача решена симплексным методом, то решение двойственной задачи может быть найдено по формуле

$$Y_{\text{опт}} = C \cdot A^{-1},$$

где C — матрица-строка коэффициентов при базисных переменных целевой функции в оптимальном решении исходной задачи; A^{-1} — обратная матрица для матрицы A, являющейся матрицей коэффициентов базисных переменных системы ограничений исходной задачи в оптимальном решении.

Решим симплексным методом исходную задачу вида

$$L(\bar{x}) = x_1 - x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Из табл. 22.2 следует, что $\bar{X}_{\text{опт}} = (4, 1)$, $L(\bar{x})_{\max} = 3$. Матрицы записываются в виде

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{1\times 3}, \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3},$$

тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y_{\text{опт}} = C \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Таблица 22.2

c_i	БП	1	1	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	-2	1	1	0	0	2
0	x_4	$\boxed{1}$	-2	0	1	0	2
0	x_5	1	1	0	0	1	5
	Δ_j	-1	1	0	0	0	0
0	x_3	0	-3	1	2	0	6
1	x_1	1	-2	0	1	0	2
0	x_5	0	$\boxed{3}$	0	-1	1	3
	Δ_j	0	-1	0	1	0	2
0	x_3	0	0	1	1	1	9
1	x_1	1	0	0	1/3	2/3	4
-1	x_2	0	1	0	$-1/3$	1/3	1
	Δ_j	0	0	0	2/3	1/3	3

Таким образом, решение двойственной задачи следующее:

$$\bar{Y}_{\text{опт}} = (0, 2/3, 1/3), \quad \text{при этом } S(\bar{y})_{\min} = 3.$$

Решение несимметричных задач

Рассмотрим решение задач с использованием теорем двойственности.

Исходная задача

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 & \mid y_1 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 6 & \mid y_2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Двойственная задача

$$S(\bar{y}) = 9y_1 + 6y_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 3 & \mid x_1 \\ -2y_1 + y_2 \leq 1 & \mid x_2 \\ 3y_1 - 6y_2 \leq 3 & \mid x_3 \\ -2y_1 - y_2 \leq 1 & \mid x_4 \end{cases}$$

y_1, y_2 — произвольные по знаку.

Решив двойственную задачу графическим методом, получим

$$\bar{Y}_{\text{опт}} = (1/2, 2), \text{ при этом } S(\bar{y})_{\max} = 33/2.$$

По 1-й теореме двойственности $L(\bar{x})_{\min} = S(\bar{y})_{\max} = 33/2$.

Подставим $\bar{Y}_{\text{опт}}$ в систему ограничений двойственной задачи:

$$\begin{gathered} 2 \cdot 1/2 + 2 \leq 3, \qquad 3 = 3, \\ -2 \cdot 1/2 + 2 \leq 1, \qquad 1 = 1, \\ 3 \cdot 1/2 - 6 \cdot 2 \leq 3, -21/2 < 3 \to x_3 = 0, \\ -2 \cdot 1/2 - 2 \leq 1, -3 < 1 \to x_4 = 0. \end{gathered}$$

Так как $x_3 = x_4 = 0$, то система ограничений исходной задачи примет вид

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 9, \\ x_1 + x_2 = 6. \end{cases}$$

Решая данную систему, получим

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (21/4, 3/4, 0, 0), \text{ при этом } L(\bar{x})_{\min} = 33/2.$$

Рассмотрим решение задач с использованием обратной матрицы.

Пусть решение исходной задачи

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (21/4, 3/4, 0, 0), \text{ при этом } L(\bar{x})_{\min} = 33/2.$$

Решение двойственной задачи найдем по формуле

$$Y_{\text{опт}} = C \cdot A^{-1},$$

где

$$C = (3\ 1), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$Y_{\text{опт}} = (3\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = (1/2 \quad 2).$$

Таким образом, $\bar{Y}_{\text{опт}} = (1/2, 2)$, при этом $S(\bar{y})_{\max} = 33/2$.

Решение смешанных двойственных задач

Смешанные двойственные задачи можно решать с использованием теорем двойственности.

Исходная задача

$$L(\bar{x}) = x_1 - 6x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3 & \mid y_1 \\ 2x_1 + 3x_3 \le 4 & \mid y_2 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Двойственная задача

$$S(\bar{y}) = 3y_1 + 4y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 1 & \mid x_1 \\ 3y_1 \ge -6 & \mid x_2 \\ 3y_1 + 3y_2 \ge -1 & \mid x_3 \end{cases}$$

y_1 — произвольная по знаку,
$y_2 \ge 0$.

Найдем оптимальное решение двойственной задачи:

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (1, 0, 2/3), \text{ при этом } L(\bar{x})_{\max} = 1/3.$$

По 1-й теореме двойственности

$$L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min} = 1/3.$$

Так как $x_1 > 0$, $x_3 > 0$, то по 2-й теореме двойственности первое и третье ограничения двойственной задачи выполняются в виде равенств:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 1, \\ 3y_1 + 3y_2 = -1, \end{cases}$$

откуда $y_1 = -5/3$, $y_2 = 4/3$, т.е. $\bar{Y}_{\text{опт}} = (-5/3, 4/3)$.

22.4. Экономический анализ задач с использованием теории двойственности

Рассмотрим задачу оптимального использования ресурсов, запишем ее математическую модель

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \mid y,$$

$$x_j \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Двойственная задача имеет вид

$$S(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j, \quad y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

ТЕОРЕМА 22.3. *Значения переменных y_i в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов системы ограничений исходной задачи на оптимальное значение ее целевой функции, т.е.*

$$y_i = \frac{\partial L_i}{\partial b_i}.$$

Примем $\partial L_i \approx \Delta L_i$, $\partial b_i \approx \Delta b_i$, тогда $\Delta L_i \approx y_i \cdot \Delta b_i$.

Для задачи оптимального использования сырья это уравнение показывает, что при изменении i-го ресурса оптимальный доход является линейной функцией от его приращения, причем коэффициентом служит y_i — i-я компонента оптимального решения двойственной задачи.

Если y_i мало, то значительному увеличению i-го ресурса будет соответствовать небольшое увеличение оптимального дохода и ценность ресурса невелика.

Если $y_i = 0$, то при увеличении i-го ресурса оптимальный доход остается неизменным и ценность этого ресурса равна нулю. В самом деле, сырье, запасы которого превышают потребности в нем, не представляет ценности для производства и его оценку можно принять за нуль.

Если y_i велико, то незначительному увеличению i-го ресурса будет соответствовать существенное увеличение оптимального дохода и ценность ресурса высока. Уменьшение ресурса ведет к существенному сокращению выпуска продукции.

Переменную y_i считают некоторой характеристикой ценности i-го ресурса. В частности, при увеличении i-го ресурса на единицу ($\Delta b_i = 1$) оптимальный доход возрастает на y_i, что позволяет рассматривать y_i как "условную цену", оценку единицы i-го ресурса, объективно обусловленную оценку.

Так как y_i представляет частную производную от оптимального дохода по i-му ресурсу, то y_i характеризует скорость изменения оптимального дохода при изменении i-го ресурса.

С помощью y_i можно определить степень влияния ограничений на значение целевой функции. Предельные значения (нижняя и верхняя границы) ограничений ресурсов, для которых y_i остаются неизменными, определяются по формулам:

$$b_i^{\text{н}} = \min\left(\frac{x_j}{d_{ij}}\right), \qquad b_i^{\text{в}} = \max\left(\frac{x_j}{d_{ij}}\right),$$

где x_j — значение переменной в оптимальном решении; d_{ij} — элементы матрицы $(d_{ij}) = A^{-1}$, обратной к матрице базиса оптимального решения, для которой $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Если в план включаются новые виды продукции, то их оценка находится по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{\text{опт}i} - c_j.$$

Если $\Delta_j < 0$, то новый вид продукции улучшает план. При $\Delta_j > 0$ нецелесообразно включать новый вид продукции.

22.5. Стратегическое планирование выпуска изделий с учетом имеющихся ресурсов

Фирма выпускает три вида изделий, располагая при этом сырьем 4 типов: А, Б, В, Г соответственно в количествах 18, 16, 8 и 6 т. Нормы затрат каждого типа сырья на единицу изделия первого вида составляют соответственно 1, 2, 1, 0, второго вида — 2, 1, 1, 1 и третьего вида — 1, 1, 0, 1. Прибыль

от реализации единицы изделия первого вида равна 3 усл. ед., второго — 4 усл. ед., третьего — 2 усл. ед.

Требуется:

1) составить план производства трех видов, максимизирующих прибыль;
2) определить дефицитность сырья;
3) установить размеры максимальной прибыли при изменении сырья А на 6 т, Б — на 3 т, В — на 2 т, Г — на 2 т. Оценить раздельное влияние этих изменений и суммарное их влияние на прибыль;
4) оценить целесообразность введения в план производства фирмы нового вида изделий (четвертого), нормы затрат на единицу которого соответственно равны 1, 2, 2, 0, а прибыль составляет 15 усл. ед.

Решение. 1. Обозначим через $\bar{X} = (x_1, x_2, x_3)$ план производства изделий трех видов, тогда математическая модель задачи примет вид

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 16, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 + x_3 \le 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Решаем задачу симплексным методом, при этом последняя таблица будет иметь вид табл. 22.3.

Из таблицы следует

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (5, 3, 3, 4, 0, 0, 0), \quad \text{при этом } L(\bar{x})_{\max} = 33 \text{ усл. ед.}$$

Согласно теоремам двойственности

$$\bar{Y}_{\text{опт}} = (0, 1/2, 2, 3/2, 0, 0, 0), \quad \text{при этом } S(\bar{y})_{\min} = 33 \text{ усл. ед.}$$

Таблица 22.3

c_i	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
0	x_4	0	0	0	1	0	−1	−1	4
2	x_3	0	0	1	0	1/2	−1	1/2	3
3	x_1	1	0	0	0	1/2	0	−1/2	5
4	x_2	0	1	0	0	−1/2	1	1/2	3
	Δ_j	0	0	0	0	1/2	2	3/2	33

2. Наиболее дефицитным является сырье типа В, для которого двойственная оценка $y_3 = 2$. Менее дефицитным является сырье вида Б, для которого $y_2 = 1/2$. Совсем не дефицитным является сырье А ($y_1 = 0$).

Для определения интервала устойчивости оценок найдем обратную матрицу для матрицы коэффициентов при базисных переменных в оптимальном решении системы ограничений. Базисными переменными в оптимальном решении являются x_1, x_2, x_3, x_4. Матрица коэффициентов при этих переменных в системе ограничений имеет вид

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица для матрицы A следующая:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем интервал устойчивости оценок по видам сырья:

$$\Delta b_1^{\text{н}} = \min\left(\frac{x_{\text{опт}j}}{d_{1j}}\right) = \frac{3}{1/2} = 6,$$

$$\Delta b_1^{\text{в}} = \min\left(\frac{x_{\text{опт}j}}{d_{1j}}\right) = \left|\frac{4}{-1/2}\right| = 8.$$

Интервал устойчивости оценок по отношению к первому ограничению:

$$(b_1 - b_1^{\text{н}}; b_1 + b_1^{\text{в}}) = (18 - 6; 18 + 8) = (12; 26).$$

Аналогично определим интервалы устойчивости оценок по отношению к ограничениям остальных видов сырья:

$$\Delta b_2^{\text{н}} = \min\left(\frac{3}{1}; \frac{4}{1/2}\right) = 3, \qquad \Delta b_2^{\text{в}} = \left|\frac{3}{-1/2}\right| = 6,$$

$$\Delta b_3^{\text{н}} = \min\left(\frac{3}{1/2}; \frac{4}{1/2}\right) = 6, \qquad \Delta b_3^{\text{в}} = \left|\frac{3}{-1}\right| = 3,$$

$$\Delta b_4^{\text{н}} = \frac{5}{1} = 5, \qquad \Delta b_4^{\text{в}} = \max\left|\frac{3}{-1}; \frac{4}{-1}\right| = 3.$$

Интервалы устойчивости оценок по отношению ко второму ограничению:

$$(16 - 3; 16 + 6) = (13; 22),$$

к третьему ограничению:

$$(8 - 6; 8 + 3) = (2; 11),$$

к четвертому ограничению:

$$(6 - 5; 6 + 3) = (1; 9).$$

3. Изменения сырья согласно условиям задачи на +6, −3, +2, +2 т приводят к ограничению запаса сырья до 24, 13, 10, 8 т соответственно. Поскольку эти изменения находятся в пределах устойчивости оценок, на что указывают интервалы, то раздельное их влияние на прибыль определяется по формуле

$$L_i = y_{\text{опт}i} \cdot b_i,$$

тогда

$$L_{1\max} = y_{\text{опт}1} \cdot b_1 = 0 \cdot 6 = 0,$$
$$L_{2\max} = y_{\text{опт}2} \cdot b_2 = 1/2 \cdot (-3) = -3/2,$$
$$L_{3\max} = y_{\text{опт}3} \cdot b_3 = 2 \cdot 2 = 4,$$
$$L_{4\max} = y_{\text{опт}4} \cdot b_4 = 3/2 \cdot 2 = 3.$$

Суммарное влияние на прибыль:

$$L_{\max} = L_{1\max} + L_{2\max} + L_{3\max} + L_{4\max} =$$
$$= 0 - 3/2 + 4 + 3 = 11/2 \text{ усл. ед.}$$

Если изменение сырья не находится в пределах устойчивости оценок, то необходимо найти новые условные оценки, т.е. решить задачу симплексным методом с изменением количества сырья соответствующих видов.

4. Для оценки целесообразности введения в план производства фирмы четвертого вида изделий используем формулу

$$\Delta_4 = \sum_{i=4}^{4} a_{ij} y_{\text{опт}i} - c_4 =$$
$$= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1/2 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3/2 - 15 = -10 < 0.$$

Так как прибыль превышает затраты, то введение в план производства четвертого вида изделий целесообразно.

УПРАЖНЕНИЯ

Для следующих задач составить математические модели двойственных задач и по решению исходной найти оптимальное решение двойственной.

22.1. $L(\bar{x}) = x_1 + 3x_3 + 3x_4 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_4 \geq -1, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

22.2. $L(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 \leq 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 1, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

22.3. $L(\bar{x}) = -x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ \qquad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

22.4. $L(\bar{x}) = -3x_2 + x_3 - x_4 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 32, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ \qquad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

22.5. $L(\bar{x}) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ \qquad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Составить математическую модель двойственных задач и по ее решению найти оптимальное решение исходной.

22.6. $L(\bar{x}) = 1{,}5x_1 + 2x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 7, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

22.7. $L(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + x_4 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 4, \\ \qquad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

22.8. $L(\bar{x}) = -2x_1 + x_2 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 - 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ -x_1 + 3x_2 \leq -5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

22.9. Для производства трех изделий A, B и C используются три вида сырья. Каждый из них используется в объеме, не превышающем 180, 210 и 236 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на одно изделие и цена единицы изделий приведены в табл. 22.4.

Таблица 22.4

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие, кг		
	A	B	C
1	4	2	1
2	3	1	3
1	1	2	5
Цена изделия, усл. ед.	10	14	12

Определить план выпуска изделий, обеспечивающий получение максимального дохода.

Составить для данной задачи двойственную и найти:

1) оптимальный план двойственной задачи;
2) интервалы устойчивости двойственных оценок;
3) увеличение максимального дохода при увеличении количества сырья 2-го и 3-го видов на 80 и 160 кг соответственно и при уменьшении количества сырья 1-го вида на 40 кг. Оценить раздельное и суммарное влияние этих изменений;
4) целесообразность введения в план производства 4-го изделия, нормы затрат сырья на одно изделие которого составляют 2, 4 и 6 кг, а цена изделия равна 18 усл. ед.;
5) оптимальные планы исходной и двойственной задач, если количество сырья 1, 2 и 3 равно 140, 250 и 240 кг соответственно.

Глава 23
ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

23.1. Общая постановка задачи

Транспортная задача — одна из распространенных задач линейного программирования. Ее цель — разработка наиболее рациональных путей и способов транспортирования товаров, устранение чрезмерно дальних, встречных, повторных перевозок. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятий, фирм, связанные с осуществлением процессов снабжения сырьем, материалами, топливом, оборудованием и т.д.

В общем виде задачу можно представить следующим образом: в m пунктах производства A_1, $A_2, \ldots, A_m$ имеется однородный груз в количестве соответственно a_1, $a_2, \ldots, a_m$. Этот груз необходимо доставить в n пунктов назначения B_1, $B_2, \ldots, B_n$ в количестве соответственно b_1, $b_2, \ldots, b_n$. Стоимость перевозки единицы груза (тариф) из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij}.

Требуется составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы и имеющий минимальную стоимость.

В зависимости от соотношения между суммарными запасами груза и суммарными потребностями в нем транспортные задачи могут быть закрытыми и открытыми.

Определение 1. Если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то задача называется *закрытой*. Если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то *открытой*.

Обозначим через x_{ij} количество груза, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j. Рассмотрим закрытую транспортную задачу. Ее условия запишем в *распределительную таблицу*, которую будем использовать для нахождения решения (табл. 23.1).

Таблица 23.1

B_j / A_i	B_1	B_2	$\dots$	B_j	$\dots$	B_n
	b_1	b_2	$\dots$	b_j	$\dots$	b_n
A_1 a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1j} x_{1j}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}
A_2 a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2j} x_{2j}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_i a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	$\dots$	c_{ij} x_{ij}	$\dots$	c_{in} x_{in}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mj} x_{mj}	$\dots$	c_{mn} x_{mn}

Математическая модель закрытой транспортной задачи имеет вид

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Оптимальным решением задачи является матрица

$$X_{\text{опт}} = (x_{ij})_{m \times n},$$

удовлетворяющая системе ограничений и доставляющая минимум целевой функции. Транспортная задача как задача линейного программирования может быть решена симплексным методом, однако наличие большого числа переменных и ограничений делает вычисления громоздкими. Поэтому для решения транспортных задач разработан специальный метод, имеющий те же этапы, что и симплексный метод, а именно:

— нахождение исходного опорного решения;
— проверка этого решения на оптимальность;
— переход от одного опорного решения к другому.

Рассмотрим каждый из этих этапов.

23.2. Нахождение исходного опорного решения

Условия задачи и ее исходное опорное решение будем записывать в распределительную таблицу. Клетки, в которые поместим грузы, называются занятыми, им соответствуют базисные переменные опорного решения. Остальные клетки незанятые, или пустые, им соответствуют свободные переменные. В верхнем правом углу каждой клетки будем записывать тарифы. Существует несколько способов нахождения исходного опорного решения.

Рассмотрим один из них — *метод минимального тарифа* (элемента). Согласно этому методу, грузы распределяются в первую очередь в те клетки, в которых находится минимальный тариф перевозок c_{ij}. Далее поставки распределяются в незанятые клетки с наименьшими тарифами с учетом оставшихся запасов у поставщиков и удовлетворения спроса потребителей. Процесс распределения продолжают до тех пор, пока все грузы от поставщиков не будут вывезены, а потребители не будут удовлетворены. При распределении грузов может оказаться, что количество занятых клеток меньше, чем $m+n-1$. В этом случае недостающее их число заполняется клетками с нулевыми поставками, такие клетки называют условно занятыми.

Нулевые поставки помещают в незанятые клетки с учетом наименьшего тарифа таким образом, чтобы в каждых строке и столбце было не менее чем по одной занятой клетке.

Рассмотрим нахождение исходного опорного решения транспортной задачи на конкретном примере.

23.3. Определение эффективного варианта доставки изделий к потребителю

На складах A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции в количествах 90, 400, 110 т соответственно. Потребители B_1, B_2, B_3

должны получить эту продукцию в количествах 140, 300, 160 т соответственно. Найти такой вариант прикрепления поставщиков к потребителям, при котором сумма затрат на перевозки была бы минимальной. Расходы по перевозке 1 т продукции заданы матрицей (усл. ед.)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Проверим, является ли данная транспортная задача закрытой:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 90 + 400 + 110 = 600 \text{ т},$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 140 + 300 + 160 = 600 \text{ т},$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j,$$

следовательно, данная транспортная задача закрытая. Найдем исходное опорное решение по методу минимального тарифа.

Таблица 23.2

a_i \ b_j		1	2	3
		140	300	160
1	90	2 90	5	2
2	400	4	1 300	5 100
3	110	3 50	6	8 60

Число занятых клеток в табл. 23.2 равно $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$, т.е. условие невырожденности выполнено. Получили

исходное опорное решение, которое запишем в виде матрицы:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 50 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозки при исходном опорном решении составляет

$$L(X_1) = 90 \cdot 2 + 300 \cdot 1 + 100 \cdot 5 + 50 \cdot 3 + 60 \cdot 8 = \\ = 1610 \text{ усл. ед.}$$

23.4. Проверка найденного опорного решения на оптимальность

Найденное исходное опорное решение проверяется на оптимальность методом потенциалов по следующему критерию: если опорное решение транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система $m+n$ действительных чисел u_i и v_j, удовлетворяющих условиям $u_i + v_j = c_{ij}$ для занятых клеток и $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ для свободных клеток.

Числа u_i и v_j называют *потенциалами*. В распределительную таблицу добавляют строку v_j и столбец u_i.

Потенциалы u_i и v_j находят из равенства $u_i + v_j = c_{ij}$, справедливого для занятых клеток. Одному из потенциалов дается произвольное значение, например $u_1 = 0$, тогда остальные потенциалы определяются однозначно. Так, если известен потенциал u_i, то $v_j = c_{ij} - u_i$; если известен потенциал v_j, то $u_i = c_{ij} - v_j$.

Обозначим $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Эту оценку называют *оценкой свободных клеток*. Если $\Delta_{ij} \leq 0$, то опорное решение является оптимальным. Если хотя бы одна из оценок $\Delta_{ij} > 0$, то опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить, перейдя от одного опорного решения к другому.

Проверим найденное опорное решение на оптимальность, добавив в распределительную табл. 23.3 столбец u_i и строку v_j.

Полагая $u_1 = 0$, запишем это значение в последнем столбце таблицы.

Таблица 23.3

a_i \ b_j		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	2 90	5	2	0
2	400	4	1 300	5 100	-2
3	110	3 50	6	8 60	1
	v_j	2	3	7	

Рассмотрим занятую клетку первой строки, которая расположена в первом столбце $(1,1)$, для нее выполняется условие $u_1 + v_1 = 2$, откуда $v_1 = 2$. Это значение запишем в последней строке таблицы. Далее надо рассматривать ту из занятых клеток таблицы, для которой один из потенциалов известен.

Рассмотрим занятую клетку $(3,1)$: $u_3 + v_1 = 3$, $v_1 = 2$, откуда $u_3 = 1$.

Для клетки $(3,3)$: $u_3 + v_3 = 8$, $u_3 = 1$, $v_3 = 7$.

Для клетки $(2,3)$: $u_2 + v_3 = 5$, $v_3 = 7$, $u_2 = -2$.

Для клетки $(2,2)$: $u_2 + v_2 = 1$, $u_2 = -2$, $v_2 = 3$.

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу.

Вычисляем оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 5 = -2 < 0,$$
$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 7 - 2 = 5 > 0,$$
$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 2 - 4 = -4 < 0,$$
$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 1 + 3 - 6 = -2 < 0.$$

Получили одну оценку $\Delta_{13} = 5 > 0$, следовательно, исходное опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

23.5. Переход от одного опорного решения к другому

Наличие положительной оценки свободной клетки ($\Delta_{ij} > 0$) при проверке опорного решения на оптимальность свидетельствует о том, что полученное решение неоптимально и для уменьшения значения целевой функции надо перейти к другому опорному решению. При этом надо перераспределить грузы, перемещая их из занятых клеток в свободные. Свободная клетка становится занятой, а одна из ранее занятых клеток — свободной.

Для свободной клетки с $\Delta_{ij} > 0$ строится цикл (цепь, многоугольник), все вершины которого кроме одной находятся в занятых клетках; углы прямые, число вершин четное. Около свободной клетки цикла ставится знак (+), затем поочередно проставляют знаки (−) и (+). У вершин со знаком (−) выбирают минимальный груз, его прибавляют к грузам, стоящим у вершин со знаком (+), и отнимают от грузов у вершин со знаком (−). В результате перераспределения груза получим новое опорное решение. Это решение проверяем на оптимальность, и т.д. до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

Рассмотрим переход от одного опорного решения к другому на заданном примере.

Строим цикл для клетки (1, 3), имеющей положительную оценку. У вершин цикла ставим знаки (+) и (−) и записываем грузы:

$$\begin{array}{ccc} 90 & & \\ & \boxed{\begin{matrix} - & + \\ + & - \end{matrix}} & \\ 50 & & 60 \end{array}$$

У вершин со знаком (−) выбираем минимальный груз, он равен 60. Его прибавляем к грузам, стоящим у положительных вершин, и отнимаем от грузов, стоящих у отрицательных вершин. Получаем новый цикл:

$$\begin{array}{ccc} 30 & & 60 \\ & \boxed{\begin{matrix} + & - \\ - & + \end{matrix}} & \\ 110 & & \end{array}$$

Новое опорное решение:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученное решение на оптимальность. Для этого запишем его в распределительную таблицу, найдем потенциалы занятых и оценки свободных клеток (табл. 23.4).

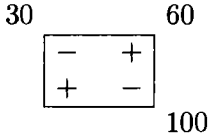
Таблица 23.4

a_i \ b_j		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	2 30	5	2 60	0
2	400	4	1 300	5 100	3
3	110	3 110	6	8	2
	v_j	2	−2	2	

Имеем

$$\Delta_{12} = -7, \quad \Delta_{21} = 1 > 0, \quad \Delta_{32} = -7, \quad \Delta_{33} = -5.$$

Построим цикл для клетки с положительной оценкой $\Delta_{21} = 1$:



Произведем перераспределение грузов:

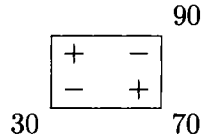


Таблица 23.5

a_i \ b_j		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	2	5	2 90	0
2	400	4 30	1 300	5 70	3
3	110	3 110	6	8	2
	v_j	1	−2	2	

Получим новое решение, которое занесем в табл. 23.5. Проверим его на оптимальность.

Получим

$$\Delta_{11} = -1, \quad \Delta_{12} = -1, \quad \Delta_{32} = -6, \quad \Delta_{33} = -4.$$

Все оценки свободных клеток отрицательные, следовательно, найденное решение оптимальное. Итак,

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость транспортных расходов равна

$$L(x)_{\min} = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280 \text{ усл. ед.}$$

По сравнению с исходным опорным решением транспортные расходы уменьшились на $1610 - 1280 = 330$ усл. ед.

23.6. Открытая транспортная задача

При открытой транспортной задаче сумма запасов не совпадает с суммой потребностей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

При этом:

а) если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то объем запасов превышает объем потребления, все потребители будут удовлетворены полностью и часть запасов останется невывезенной. Для решения задачи вводят фиктивного $(n+1)$-го потребителя, потребности которого

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Модель такой задачи будет иметь вид

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n};$$

б) если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то объем потребления превышает объем запасов, часть потребностей останется неудовлетворенной. Для решения задачи вводим фиктивного $(m+1)$-го поставщика:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Модель такой задачи имеет вид

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \\ \sum\limits_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1, m+1}, j = \overline{1, n}.$$

При введении фиктивного поставщика или потребителя открытая транспортная задача становится закрытой и решается по ранее рассмотренному алгоритму для закрытых транспортных задач, причем тарифы, соответствующие фиктивному поставщику или потребителю, больше или равны наибольшему из всех транспортных тарифов, иногда их считают равными нулю. В целевой функции фиктивный поставщик или потребитель не учитывается.

23.7. Определение оптимального варианта перевозки грузов с учетом трансформации спроса и предложений

Рассмотрим следующую задачу.

Составить оптимальный план перевозки грузов от трех поставщиков с грузами 240, 40, 110 т к четырем потребителям с запросами 90, 190, 40 и 130 т. Стоимости перевозок единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю даны матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 13 & 9 & 8 \\ 14 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 15 & 20 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запасы грузов у поставщиков: $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i = 390$ т. Запросы потребителей: $\sum\limits_{j=1}^{4} b_j = 450$ т; так как $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i < \sum\limits_{j=1}^{4} b_j$, то вводим фиктивного поставщика с грузом $a_{4ф} = 450 - 390 = 60$ т.

Тариф фиктивного поставщика 4ф примем равным 20 усл. ед.

Так как $m + n - 1 = 7$, а число занятых клеток равно 6, то для исключения вырожденности введем в клетку $(2, 2)$ нулевую поставку. Оценки свободных клеток:

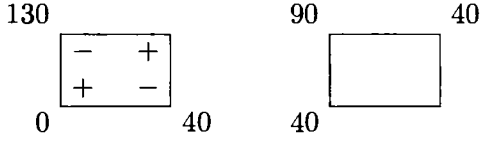
$$\Delta_{11} = -2, \quad \Delta_{13} = 3, \quad \Delta_{21} = 14, \quad \Delta_{24} = -7, \quad \Delta_{32} = -4,$$
$$\Delta_{33} = -10, \quad \Delta_{4ф1} = -8, \quad \Delta_{4ф3} = -1, \quad \Delta_{4ф4} = -5$$

(табл. 23.6).

Таблица 23.6

a_i \ b_j		1	2	3	4	u_i
		90	190	40	130	
1	240	7	13 130	9	8 110	0
2	40	14	8 0	7 40	10	−5
3	110	3 90	15	20	6 20	−2
4ф	60	20	20 60	20	20	7
	v_j	5	13	12	8	

Оценка свободной клетки $(1, 3)$ больше нуля, перераспределим грузы:



Запишем полученное перераспределение грузов в табл. 23.7.

Таблица 23.7

a_i \ b_j		1	2	3	4	u_i
		90	190	40	130	
1	240	7	13 90	9 40	8 110	0
2	40	14	8 40	7	10	−5
3	110	3 90	15	20	6 20	−2
4ф	60	20	20 60	20	20	7
	v_j	5	13	9	8	

Имеем

$$\Delta_{11} = -2, \quad \Delta_{21} = -14, \quad \Delta_{23} = -3, \quad \Delta_{24} = -7,$$
$$\Delta_{32} = -4, \quad \Delta_{33} = -13, \quad \Delta_{41} = -7, \quad \Delta_{43} = -4, \quad \Delta_{44} = -5.$$

Получили оптимальное решение:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 40 & 110 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Стоимость транспортных расходов — 3 120 усл. ед.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить следующие транспортные задачи, заданные распределительной таблицей.

23.1.

a_i \ b_j	70	30	20	40
90	1	3	4	5
30	5	3	1	2
40	2	1	4	2

23.2.

a_i \ b_j	30	80	60	110
60	6	8	15	4
130	9	15	2	3
90	6	12	7	1

23.3.

a_i \ b_j	120	80	60
100	2	4	2
70	5	5	6
70	4	6	3
20	6	8	1

23.4.

a_i \ b_j	240	40	110
90	7	15	3
190	13	8	15
40	9	7	20
130	8	10	6

Глава 24
ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

24.1. Общая формулировка задачи

Некоторые задачи линейного программирования требуют целочисленного решения. К ним относятся задачи по производству и распределению неделимой продукции (выпуск станков, телевизоров, автомобилей и т.д.). В общем виде математическая модель задачи целочисленного программирования имеет вид

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$$

$$x_j \geq 0 \text{ — целое, } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Оптимальное решение задачи, найденное симплексным методом, часто не является целочисленным. Его можно округлить до ближайших целых чисел. Однако такое округление может дать решение, не лучшее среди целочисленных решений, или привести к решению, не удовлетворяющему системе ограничений. Поэтому для нахождения целочисленного реше-

ния нужен особый алгоритм. Такой алгоритм предложен Гомори и состоит в следующем.

Симплексным методом находят оптимальное решение задачи. Если решение целочисленное, то задача решена. Если же оно содержит хотя бы одну дробную координату, то накладывают дополнительное ограничение по целочисленности и вычисления продолжают до получения нового решения. Если и оно является нецелочисленным, то вновь накладывают дополнительное ограничение по целочисленности. Вычисления продолжают до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение или показано, что задача не имеет целочисленного решения.

Пусть получено оптимальное решение $\bar{X}_{\text{опт}} = (f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_r, 0, \ldots, 0)$, которое не является целочисленным, тогда последний шаг симплексной таблицы имеет следующий вид:

$$\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & h_{1,r+1} & \ldots & h_{1,n} & f_1, \\
x_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & h_{2,r+1} & \ldots & h_{2,n} & f_2, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_i & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & h_{i,r+1} & \ldots & h_{i,n} & f_i, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_r & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & h_{r,r+1} & \ldots & h_{r,n} & f_r,
\end{array}$$

где r — ранг системы ограничений; $h_{i,r+1}$ — коэффициент симплексной таблицы i-й строки, $(r+1)$-го столбца; f_i — свободный член i-й строки.

Пусть f_i и хотя бы одно h_{ij} $(j = \overline{r+1, n},\ i = \overline{1, r})$ — дробные числа.

Обозначим через $[f_i]$ и $[h_{ij}]$ целые части чисел f_i и h_{ij}.

Определение 2. Целой частью числа f_i называют наибольшее целое число, не превосходящее числа f_i.

Дробную часть чисел f_i и h_{ij} обозначим $\{f_i\}$ и $\{h_{ij}\}$, она определяется следующим образом:

$$\{f_i\} = f_i - [f_i], \quad \{h_{ij}\} = h_{ij} - [h_{ij}].$$

$$\left[\frac{4}{5}\right] = 0, \qquad \left\{\frac{4}{5}\right\} = \frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5},$$

$$\left[\frac{8}{3}\right] = 2, \qquad \left\{\frac{8}{3}\right\} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3},$$

$$\left[-\frac{4}{5}\right] = -1, \qquad \left\{-\frac{4}{5}\right\} = -\frac{4}{5} + 1 = \frac{1}{5},$$

$$\left[-\frac{8}{3}\right] = -3, \qquad \left\{-\frac{8}{3}\right\} = -\frac{8}{3} + 3 = \frac{1}{3}.$$

Если f_i и хотя бы одно значение h_{ij} дробны, то с учетом введенных обозначений целых и дробных чисел дополнительное ограничение по целочисленности примет вид

$$\{h_{i,r+1}\}\, x_{r+1} + \{h_{i,r+2}\}\, x_{r+2} + \cdots + \{h_{i,n}\}\, x_n \geq \{f_i\}\,.$$

Примечания. 1) Если f_i — дробное число, а все h_{ij} — целые числа, то задача линейного программирования не имеет целочисленного решения.

2) Ограничение целочисленности может быть наложено не на все переменные, а лишь на их часть. В этом случае задача является частично целочисленной.

24.2. Графический метод решения задач

При наличии в задаче линейного программирования двух переменных, а в системе ограничений — неравенств она может быть решена графическим методом.

В системе координат X_1OX_2 находят область допустимых решений, строят вектор $\bar{C}$ и линию уровня. Перемещая линию уровня по направлению $\bar{C}$ для задач на максимум, находим наиболее удаленную от начала координат точку и ее координаты.

В том случае, когда координаты этой точки нецелочисленные, в области допустимых решений строят целочисленную решетку и находят на ней такие целые числа, которые удовлетворяют системе ограничений и при которых значение целевой функции наиболее близко к экстремальному нецелочисленному решению. Координаты такой вершины и являются целочисленным решением.

Аналогично решается задача на минимум.

24.3. Прогнозирование эффективного использования производственных площадей

Рассмотрим следующую задачу.

Для улучшения финансового положения фирма приняла решение об увеличении выпуска конкурентоспособной продукции, для чего принято решение об установке в одном из цехов дополнительного оборудования, занимающего $19/3\,\text{м}^2$ площади. На приобретение дополнительного оборудования фирма выделила 10 усл. ед., при этом она может купить оборудование двух видов. Приобретение 1-го комплекта оборудования 1-го вида стоит 1,0 усл. ед., 2-го вида — 3 усл. ед. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 шт., а одного комплекта оборудования 2-го вида — на 4 шт. Зная, что для установки одного комплекта оборудования 1-го вида требуется $2\,\text{м}^2$ площади, а для оборудования 2-го вида — $1\,\text{м}^2$ площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который дает возможность максимально увеличить выпуск продукции.

Решение. Составим математическую модель задачи. Предположим, что фирма приобретает x_1 комплектов дополнительного оборудования 1-го вида и x_2 комплектов оборудования 2-го вида. Математическая модель задачи будет иметь вид

$$L(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0 \text{ — целые.}$$

Получим задачу целочисленного программирования, так как неизвестных только два (x_1 и x_2). Найдем решение задачи графическим способом (рис. 24.1).

$OABC$ — область допустимых решений (ОДР). Оптимальное решение задача имеет в точке $B(9/5, 41/15)$, при этом максимальное значение целевой функции составляет $218/15$ ед. Полученное оптимальное решение нецелочисленное.

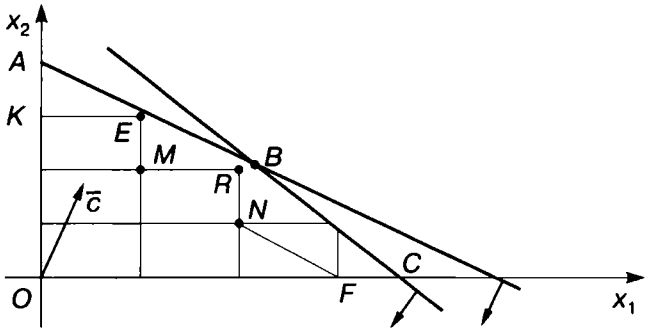


Рис. 24.1

Условию целочисленности переменных удовлетворяют координаты 12 точек. Чтобы найти точку, координаты которой определяют решение исходной задачи, заменим многоугольник $OABC$ многоугольником $OKEMRNF$, содержащим все допустимые точки с целочисленными координатами.

Строим вектор $\bar{c}(2,4)$. Линию уровня перемещаем по направлению $\bar{c}$, получим в точке $E(1,3)$ максимальное значение целевой функции:

$$L(\bar{x}_{\text{цел}})_{\max} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 14 \text{ усл. ед.}$$

Таким образом, фирме следует приобрести один комплект оборудования 1-го вида и три комплекта оборудования 2-го вида, что обеспечит ей при имеющихся ограничениях на производственные площади и денежные средства максимальное увеличение выпуска продукции, равное 14 усл. ед. в смену.

24.4. Метод Гомори

Решим эту же задачу методом Гомори, ее математическая модель:

$$L(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max,$$

ограничения:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 \le 10, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0 \text{ — целые.}$$

Таблица 24.1

c_i	БП	2	4	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	2	1	1	0	19/3
0	x_4	1	$\boxed{3}$	0	1	10
	Δ_j	−2	−4	0	0	0
0	x_3	$\boxed{5/3}$	0	1	−1/3	3
4	x_2	1/3	1	0	1/3	10/3
	Δ_j	−2/3	0	0	4/3	40/3
2	x_1	1	0	3/5	−1/5	9/5
4	x_2	0	1	−1/5	2/5	41/15
	Δ_j	0	0	2/5	6/5	218/15

Симплексная таблица представлена в табл. 24.1.

Получим

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (9/5, 41/15), \quad L(\bar{x}) = 218/15.$$

Найдем дробные части чисел 9/15 и 41/15:

$$\left\{\frac{9}{5}\right\} = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}, \quad \left\{\frac{41}{15}\right\} = \frac{41}{15} - 2 = \frac{11}{15}, \quad \frac{4}{5} = \frac{12}{15} > \frac{11}{15}.$$

Учитывая дробные части чисел 3/5 и −1/5:

$$\left\{\frac{3}{5}\right\} = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}, \quad \left\{-\frac{1}{5}\right\} = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5},$$

составляем дополнительное ограничение целочисленности для 1-й строки:

$$3/5x_3 + 4/5x_4 \geq 4/5, \text{ или } 3/5x_3 + 4/5x_4 - x_5 = 4/5,$$

которое вводим в табл. 24.2.

Получим

$$\bar{X}_{\text{цел}} = (1, 3), \; L(\bar{x}) = 14.$$

Таблица 24.2

c_j	БП	2	4	0	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	x_1	1	0	3/5	−1/5	0	9/5
	x_2	0	1	−1/5	2/5	0	41/15
		0	0	$\boxed{3/5}$	4/5	−1	4/5
2	x_1	1	0	0	−1	1	1
4	x_2	0	1	0	2/3	−1/3	3
0	x_3	0	0	1	4/3	−5/3	4/3
	Δ_j	0	0	0	2/3	2/3	14

Сравнивая полученное значение целевой функции целочисленного решения со значением при оптимальном решении, заметим, что условие целочисленности задачи приводит к уменьшению значения целевой функции.

Ответ. $\bar{X}_{\text{цел.}} = (1, 3)$, $L(\bar{x}) = 14$.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти целочисленное решение следующих задач.

24.1. $L(\bar{x}) = 16x_1 + 9x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ x_1 + x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0 \text{ — целые.}$$

24.2. $L(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 9, \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 3, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0 \text{ — целые.}$$

24.3. $L(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0 \text{ — целые.}$$

24.4. $L(\bar{x}) = 4x_1 + x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 3x_1 + 10x_2 \le 15, \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0 \text{ — целые.}$$

24.5. $L(\bar{x}) = x_1 + x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \\ -3x_1 + x_2 \le 0, \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0 \text{ — целые.}$$

24.6. $L(\bar{x}) = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \le 11, \\ 3x_1 + 3x_2 \le 13, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3} \text{ — целые.}$$

24.7. $L(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 12x_2 + 4x_3 + x_4 = 34, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 22, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4} \text{ — целые.}$$

24.8. Фирма выпускает три вида изделий А, Б, В, причем плановый сменный выпуск составляет 9 шт. изделия А, 7 шт. изделия Б, 6 шт. изделия В.

Сменные ресурсы: 51 ед. производственного оборудования, 48 ед. сырья, 67 ед. электроэнергии, их расход на одно изделие дан в табл. 24.3.

Прибыль от реализации изделий А — 40 усл. ед., Б — 50 усл. ед., В — 10 усл. ед.

Определить, сколько изделий каждого вида надо производить, чтобы получить максимальную прибыль от выпускаемых сверх плана изделий.

Таблица 24.3

Ресурсы	Изделие А	Изделие Б	Изделие В
Оборудование	3	2	0
Сырье	1	4	0
Электроэнергия	3	3	1

24.9. Для приобретения оборудования по сортировке зерна фермер выделяет 34 усл. ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 60 м^2.

Фермер может заказать оборудование двух видов: менее мощные машины А стоимостью 3 усл. ед., требующие производственной площади 3 м^2 (с учетом проходов) и обеспечивающие производительность за смену 2 т зерна, и более мощные машины В стоимостью 4 усл. ед., занимающие площадь 5 м^2 и обеспечивающие за смену сортировку 3 т зерна.

Определить оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий фермеру при данных ограничениях максимум общей производительности сортировки, если он может приобрести не более 8 машин типа В.

24.10. Три типа самолетов следует распределить между четырьмя авиалиниями. В табл. 24.4 приведены данные месячного объема перевозок каждым самолетом на каждой линии и соответствующих эксплуатационных расходов.

Распределить самолеты по линиям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных расходах перевезти по каждой из четырех авиалиний не менее 300, 200, 1000 и 500 ед. груза соответственно.

Таблица 24.4

Тип самолета	Число самолетов	Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям				Эксплуатационные расходы на один самолет по авиалиниям			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1	50	15	10	20	50	15	20	25	40
2	20	30	25	10	17	70	28	15	45
3	30	25	50	30	45	40	70	40	65

Часть 6
ЭЛЕМЕНТЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Глава 25
НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

25.1. Общая постановка задачи

Математическая модель задачи нелинейного программирования в общем виде формулируется следующим образом: найти вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i, & i = \overline{1, m_1}; \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b_i, & i = \overline{m_1 + 1, m_2}; \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i, & i = \overline{m_2 + 1, m} \end{cases}$$

и доставляющий экстремум (наибольшее или наименьшее значение) целевой функции

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где x_j — переменные; $j = \overline{1, n}$; L, f, g_i — заданные функции от n переменных; b_i — фиксированные значения.

Нелинейное программирование применяется при прогнозировании промышленного производства, управлении товарными ресурсами, планировании обслуживания и ремонта оборудования и т.д.

Для задачи нелинейного программирования в отличие от линейных задач нет единого метода решения. В зависимости от вида целевой функции и системы ограничений разработаны специальные методы решения, к которым относятся методы множителей Лагранжа, квадратичное и выпуклое програм-

мирование, градиентные методы, приближенные методы решения, графический метод.

Из нелинейного программирования наиболее разработаны задачи, в которых система ограничений линейная, а целевая функция нелинейная. Однако даже для таких задач оптимальное решение может быть найдено для определенного класса целевых функций. Например, когда целевая функция сепарабельная, т.е. является суммой n функций $f_j(x_j)$, или квадратичная. При этом следует отметить, что в отличие от задач линейного программирования, где точками экстремума являются вершины многогранника решений, в задачах с нелинейной целевой функцией точки могут находиться внутри многогранника, на его ребре или в вершине.

При решении задач нелинейного программирования для целевой функции необходимо определить глобальный максимум или глобальный минимум. Глобальный максимум (минимум) функции — это ее наибольшее (наименьшее) значение из локальных максимумов (минимумов).

Наличие локальных экстремумов затрудняет решение задач, так как большинство существующих методов нелинейного программирования не позволяет установить, является найденный экстремум локальным или глобальным. Поэтому имеется возможность в качестве оптимального решения принять локальный экстремум, который может существенно отличаться от глобального.

25.2. Графический метод

Рассмотрим примеры решения задач нелинейного программирования с двумя переменными, причем их целевые функции и системы ограничений могут быть заданы в линейном и нелинейном виде. Так же как и в задачах линейного программирования, они могут быть решены графически.

Задача с линейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений

Пример 1. Найти глобальные экстремумы функции

$$L = 2x_1 + x_2$$

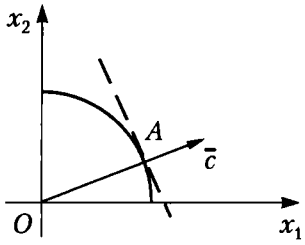


Рис. 25.1

при ограничениях:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 16,$$
$$x_{1,2} \geq 0.$$

Решение. Область допустимых решений — часть окружности с радиусом 4, которая расположена в первой четверти (рис. 25.1).

Линиями уровня целевой функции являются параллельные прямые с угловым коэффициентом, равным -2. Глобальный минимум достигается в точке $O(0,0)$, глобальный максимум — в точке A касания линии уровня и окружности. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную линии уровня. Прямая проходит через начало координат, имеет угловой коэффициент $1/2$ и уравнение $x_2 = 1/2\,x_1$.

Решаем систему

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 16, \\ x_2 = 1/2\,x_1, \end{cases}$$

откуда находим $x_1 = 8\sqrt{5}/5$, $x_2 = 4\sqrt{5}/5$, $L = 16\sqrt{5}/5 + 4\sqrt{5}/5 = 4\sqrt{5}$.

Ответ. Глобальный минимум, равный нулю, достигается в точке $O(0,0)$, глобальный максимум, равный $4\sqrt{5}$, — в точке $A(8\sqrt{5}/5,\ 4\sqrt{5}/5)$.

Задача с нелинейной целевой функцией и линейной системой ограничений

Пример 2. Найти глобальные экстремумы функции

$$L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$

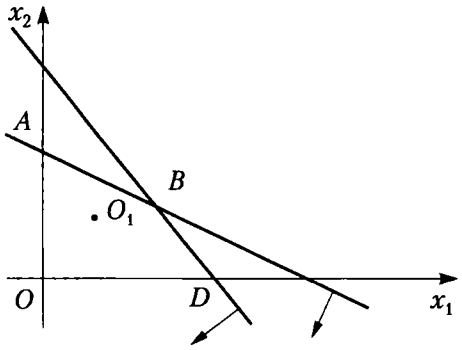


Рис. 25.2

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \geq 0.$$

Решение. Область допустимых решений — $OABD$ (рис. 25.2). Линиями уровня будут окружности с центром в точке O_1. Максимальное значение целевая функция имеет в точке $D(9,0)$, минимальное — в точке $O_1(2,3)$. Поэтому

$$L(D) = (9-2)^2 + (0-3)^2 = 58.$$

Ответ. Глобальный максимум, равный 58, достигается в точке $D(9,0)$, глобальный минимум, равный нулю, — в точке $O_1(2,3)$.

Пример 3. Найти глобальные экстремумы функции

$$L = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 15, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \geq 0.$$

Решение. Область допустимых решений — $OABD$ (рис. 25.3). Линии уровня представляют собой окружности с центром в точке $O_1(6,3)$. Глобальный максимум находится в

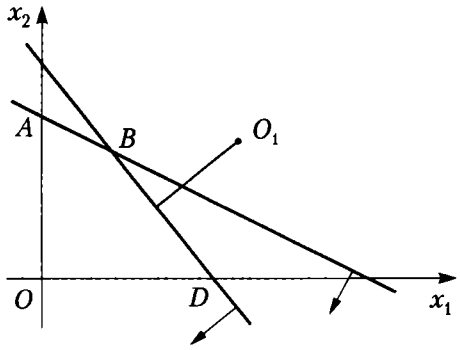


Рис. 25.3

точке $O(0,0)$ как самой удаленной от точки O_1. Глобальный минимум расположен в точке E, находящейся на пересечении прямой $3x_1 + 2x_2 = 15$ и перпендикуляра к этой прямой, проведенного из точки O_1.

Найдем координаты точки E: так как угловой коэффициент прямой $3x_1+2x_2 = 15$ равен $-3/2$, то угловой коэффициент перпендикуляра O_1E равен $2/3$. Из уравнения прямой, проходящей через данную точку O_2 с угловым коэффициентом $2/3$, получим

$$(x_2 - 3) = \frac{2}{3}(x_1 - 6), \text{ откуда } 2x_1 - 3x_2 = 3.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 15, \end{cases}$$

находим координаты точки E: $x_1 = 51/13$, $x_2 = 21/13$, при этом $L(E) = 1053/169$.

Координаты точки E можно найти следующим образом: дифференцируя выражение $(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2$ как неявную функцию по x_1, получим

$$2(x_1 - 6) + 2(x_2 - 3)x_2' = 0,$$
$$x_2' = -\frac{6 - x_1}{x_2 - 3}.$$

Приравниваем полученное значение к тангенсу угла наклона прямой $3x_1 + 2x_2 = 15$:

$$-\frac{6 - x_1}{x_2 - 3} = \frac{-3}{2}, \text{ или } 2x_1 - 3x_2 = 3.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 15, \end{cases}$$

получим координаты точки E: $x_1 = 51/13$, $x_2 = 21/13$.

Ответ. Глобальный максимум, равный 52, находится в точке $O(0,0)$. Глобальный минимум, равный 1053/169, находится в точке $E(51/13,\ 21/13)$.

Задача с нелинейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений

Пример 4. Найти глобальные экстремумы функции

$$L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

при ограничениях:

$$x_1^2 + x_2^2 \le 16,$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

Решение. Областью допустимых решений является окружность с радиусом 4, расположенная в первой четверти (рис. 25.4). Линиями уровня будут окружности с центром в точке $O_1(2,1)$.

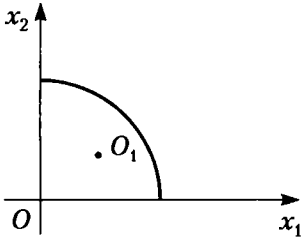


Рис. 25.4

Глобальный минимум достигается в точке O_1. Глобальный максимум — в точке $A(0,4)$, при этом

$$L(A) = (0-2)^2 + (4-1)^2 = 4 + 9 = 13.$$

Ответ. Глобальный минимум, равный нулю, достигается в точке $O_1(2,1)$, глобальный максимум, равный 13, находится в точке $A(0,4)$.

Пример 5. Найти глобальные экстремумы

$$L = x_1^2 + x_2^2$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \le 7, \\ x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Решение. Область допустимых решений не является выпуклой и состоит из двух частей (рис. 25.5). Линиями уровня являются окружности с центром в точке $O(0,0)$.

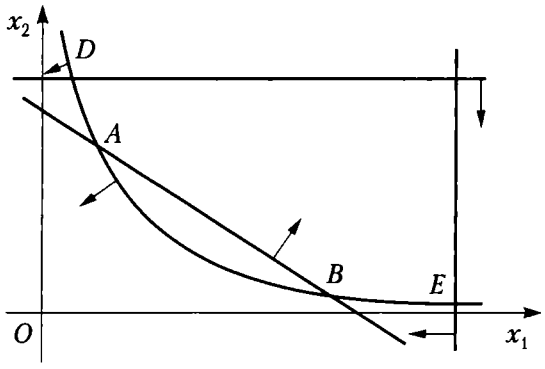


Рис. 25.5

Найдем координаты точек A и B, решая систему

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 4, \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Получим $A(1,4)$, $B(4,1)$. В этих точках функция имеет глобальные минимумы, равные 17. Найдем координаты точек D и E, решая системы

$$\begin{cases} x_1x_2 = 4, \\ x_2 = 6, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1x_2 = 4, \\ x_1 = 7, \end{cases}$$

откуда получаем $D(2/3,6)$ и $L(D) = 328/9$, $E(7,4/7)$ и $L(E) = 2417/49$.

Ответ. Целевая функция имеет два глобальных минимума, равных 17, в точках $A(1,4)$ и $B(4,1)$, глобальный максимум, равный $2417/49$, достигается в точке $E(7,4/7)$.

25.3. Метод множителей Лагранжа

Постановка задачи

Дана задача нелинейного программирования

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Предположим, что функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывны вместе со своими первыми частными производными.

Ограничения заданы в виде уравнений, поэтому для решения задачи воспользуемся методом отыскания условного экстремума функции нескольких переменных.

Для решения задачи составляется функция Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) =$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где λ_i — множители Лагранжа.

Затем определяются частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1,n}, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Приравняв к нулю частные производные, получим систему

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Решая систему, получим множество точек, в которых целевая функция L может иметь экстремальные значения. Следует отметить, что условия рассмотренной системы являются необходимыми, но недостаточными. Поэтому не всякое полученное решение определяет точку экстремума целевой функции. Применение метода бывает оправданным, когда заранее предполагается существование глобального экстремума, совпадающего с единственным локальным максимумом или минимумом целевой функции.

Пример 6. Найти точку условного экстремума функции

$$L = x_1x_2 + x_2x_3$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1x_2 + x_2x_3 +$$
$$+\lambda_1(x_1 - x_2 - 2) + \lambda_2(x_2 + 2x_3 - 4).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа по переменным x_1, x_2, x_3, λ_1, λ_2. Приравняв к нулю полученные выражения, решим систему

$$\begin{cases} \partial F/\partial x_1 = x_2 + \lambda_1 = 0, \\ \partial F/\partial x_2 = x_1 + x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \partial F/\partial x_3 = x_2 + 2\lambda_2 = 0, \\ \partial F/\partial \lambda_1 = x_1 - x_2 - 2 = 0, \\ \partial F/\partial \lambda_2 = x_2 + 2x_3 - 4 = 0. \end{cases}$$

Откуда $\lambda_1 = -x_2$, $\lambda_2 = -x_2/2$, $x_1 = -2$, $x_2 = -4$, $x_3 = 4$, $L = -8$.

Определим характер экстремума, изменяя полученные значения переменных. Измененные значения должны удовлетворять заданной системе ограничений. Возьмем $x_1 > -2$, например $x_1 = -1$, тогда из системы ограничений получим $x_2 = -3$, $x_3 = 7/2$, $L = -15/2$. Возьмем $x_1 < -2$, например $x_1 = -3$, тогда получим $x_2 = -5$, $x_3 = 9/2$, $L = -15/2$. Следовательно, $L = -8$ — минимальное значение функции.

Ответ. Точка экстремума $x_1 = -2$, $x_2 = -4$, $x_3 = 4$, при этом минимальное значение функции $L = -8$.

Расчет экономико-математической модели при нелинейных реализациях продукции

Рассмотрим применение приведенных выше методов на примере решения задачи оптимальной реализации продукции.

Пример 7. Мукомольный комбинат реализует муку двумя способами: в розницу через магазин и оптом через торговых агентов. При продаже x_1 кг муки через магазин расходы на реализацию составляют x_1^2 ден. ед., а при продаже x_2 кг муки посредством торговых агентов — x_2^2 ден. ед.

Определить, сколько килограммов муки следует продавать каждым способом, чтобы затраты на реализацию были минимальными, если в сутки выделяется для продажи 5000 кг муки.

Решение. Составим математическую модель задачи.

Найдем минимум суммарных расходов

$$L = x_1^2 + x_2^2$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 = 5\,000,$$
$$x_{1,2} \geq 0.$$

Для расчета модели используем метод множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 5\,000).$$

Найдем частные производные функции F по x_1, x_2 и λ, приравняем их к нулю, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0, \\ 2x_2 + \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 - 5\,000 = 0, \end{cases}$$

откуда $\lambda = -5\,000$, $x_1 = 2\,500$, $x_2 = 2\,500$, $L = 12\,500\,000$ ден. ед.

Давая x_1 значения больше и меньше 2500, находим L и из определения экстремума функции получаем, что L при $x_1 = x_2 = 2\,500$ достигает минимума.

Таким образом, для получения минимальных расходов необходимо расходовать в сутки через магазин и торговых агентов по 2 500 кг муки, при этом расходы на реализацию составят 12 500 000 ден. ед.

УПРАЖНЕНИЯ

Используя графический метод, найти глобальные экстремумы функций.

25.1. $L = x_1 + 2x_2$ при ограничениях:

$$x_1^2 + x_2^2 \le 25,$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

25.2. $L = x_1 + 3x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 x_2 \le 8, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \le 4, \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

25.3. $L = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

25.4. $L = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 10x_1 - x_2 \le 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \le 12, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

25.5. $L = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 18, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

25.6. $L = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$ при ограничениях:

$$x_1^2 + x_2^2 \le 36,$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

25.7. $L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} (x_1 - 1)(x_2 + 1) \le 4, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

25.8. $L = x_1^2 + x_2^2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \le 7, \\ x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Используя метод множителей Лагранжа, найти точку условного экстремума следующих функций.

25.9. $L = 2x_1x_3 - x_2x_3$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

25.10. $L = x_1x_2 + x_2x_3$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

25.11. $L = x_1x_2 + x_2x_3$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

25.12. $L = 2x_1 - x_2 + x_3$ при ограничениях:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

25.13. Фирма реализует автомобили двумя способами: через розничную и оптовую торговлю. При реализации x_1 автомобилей в розницу расходы на реализацию составляют $4x_1 + x_1^2$ р., а при продаже x_2 автомобилей оптом — x_2^2 ден. ед.

Найти оптимальный способ реализации автомобилей, минимизирующий суммарные расходы, если общее число предназначенных для продажи автомобилей составляет 200 шт.

Глава 26
ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

26.1. Постановка задачи

Динамическое программирование — один из разделов оптимального программирования, в котором процесс принятия решения и управления может быть разбит на отдельные этапы (шаги).

Экономический процесс является управляемым, если можно влиять на ход его развития. Под управлением понимается совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход развития процесса. Например, выпуск продукции предприятием — управляемый процесс. Совокупность решений, принимаемых в начале года (квартала и т.д.) по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, финансированию и т.д., является управлением. Необходимо организовать

выпуск продукции так, чтобы принятые решения на отдельных этапах способствовали получению максимально возможного объема продукции или прибыли.

Динамическое программирование позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим задачам с малым числом переменных. Это значительно сокращает объем вычислений и ускоряет процесс принятия управленческого решения.

В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным методом решения, в динамическом программировании такого универсального метода не существует. Одним из основных методов динамического программирования является метод рекуррентных соотношений, который основывается на использовании принципа оптимальности, разработанного американским математиком Р. Беллманом. Принцип состоит в том, что, каковы бы ни были начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного шага. Использование данного принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, не локально лучше, а лучше с точки зрения процесса в целом.

В некоторых задачах, решаемых методом динамического программирования, процесс управления разбивается на шаги. При распределении на несколько лет ресурсов деятельности предприятия шагом целесообразно считать временной период; при распределении средств между предприятиями — номер очередного предприятия. В других задачах разбиение на шаги вводится искусственно. Например, непрерывный управляемый процесс можно рассматривать как дискретный, условно разбив его на временные отрезки (шаги). Исходя из условий каждой конкретной задачи, длину шага выбирают таким образом, чтобы на каждом шаге получить простую задачу оптимизации и обеспечить требуемую точность вычислений.

26.2. Некоторые экономические задачи, решаемые методами динамического программирования

Оптимальная стратегия замены оборудования

Одной из важных экономических проблем является определение оптимальной стратегии в замене старых станков, агрегатов, машин на новые.

Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты по выпуску продукции на старом оборудовании, увеличиваются затраты на его ремонт и обслуживание, снижаются производительность и ликвидная стоимость.

Наступает время, когда старое оборудование выгоднее продать, заменить новым, чем эксплуатировать ценой больших затрат; причем его можно заменить новым оборудованием того же вида или новым, более совершенным.

Оптимальная стратегия замены оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены. Критерием оптимальности при этом может служить прибыль от эксплуатации оборудования, которую следует оптимизировать, или суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого промежутка времени, подлежащие минимизации.

Введем обозначения: $r(t)$ — стоимость продукции, производимой за один год на единице оборудования возраста t лет;

$u(t)$ — ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста t лет;

$s(t)$ — остаточная стоимость оборудования возраста t лет;

P — покупная цена оборудования.

Рассмотрим период N лет, в пределах которого требуется определить оптимальный цикл замены оборудования.

Обозначим через $f_N(t)$ максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t лет за оставшиеся N лет цикла использования оборудования при условии оптимальной стратегии.

Возраст оборудования отсчитывается в направлении течения процесса. Так, $t = 0$ соответствует случаю использования нового оборудования. Временные же стадии процесса нумеруются в обратном направлении по отношению к ходу процесса.

Так, $N = 1$ относится к одной временной стадии, остающейся до завершения процесса, а $N = N$ — к началу процесса (рис. 26.1).

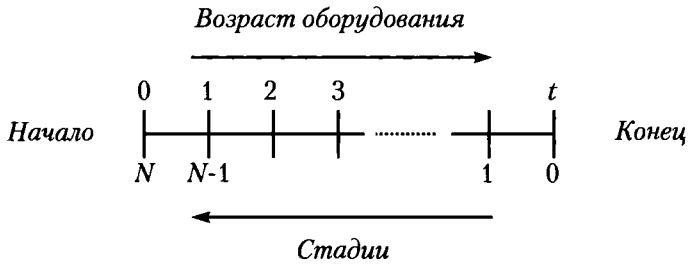


Рис. 26.1

На каждом этапе N-стадийного процесса должно быть принято решение о сохранении или замене оборудования. Выбранный вариант должен обеспечивать получение максимальной прибыли.

Функциональные уравнения, основанные на принципе оптимальности, имеют вид:

$$f_N(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) + f_{N-1}(t+1) \longrightarrow \text{Сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - f_{N-1}(1) \longrightarrow \text{Замена,} \end{cases} \tag{26.1}$$

$$f_1(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) \longrightarrow \text{Сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - u(0) \longrightarrow \text{Замена.} \end{cases} \tag{26.2}$$

Уравнение (26.1) описывает N-стадийный процесс, а (26.2) — одностадийный. Оба уравнения состоят из двух частей: верхняя строка определяет доход, получаемый при сохранении оборудования; нижняя — доход, получаемый при замене оборудования и продолжении процесса работы на новом оборудовании.

В уравнении (26.1) функция $r(t) - u(t)$ есть разность между стоимостью произведенной продукции и эксплуатационными издержками на N-й стадии процесса.

Функция $f_{N-1}(t+1)$ характеризует суммарную прибыль от $(N-1)$ оставшихся стадий для оборудования, возраст которого в начале осуществления этих стадий составляет $(t+1)$ лет.

Нижняя строка (26.1) характеризуется следующим образом: функция $s(t)-P$ представляет чистые издержки по замене оборудования, возраст которого t лет.

Функция $r(0)$ выражает доход, получаемый от нового оборудования возраста 0 лет. Предполагается, что переход от работы на оборудовании возраста t лет к работе на новом оборудовании совершается мгновенно, т.е. период замены старого оборудования и переход на работу на новом оборудовании укладываются в одну и ту же стадию.

Последняя функция f_{N-1} в (26.1) представляет собой доход от оставшихся $(N-1)$ стадий, до начала осуществления которых возраст оборудования составляет один год.

Аналогичная интерпретация может быть дана уравнению для одностадийного процесса. Здесь нет слагаемого вида $f_0(t+1)$, так как N принимает значение $1, 2, \ldots, N$. Равенство $f_0(t) = 0$ следует из определения функции $f_N(t)$.

Уравнения (26.1) и (26.2) являются рекуррентными соотношениями, которые позволяют определить величину $f_N(t)$ в зависимости от $f_{N-1}(t+1)$. Структура этих уравнений показывает, что при переходе от одной стадии процесса к следующей возраст оборудования увеличивается с t до $(t+1)$ лет, а число оставшихся стадий уменьшается с N до $(N-1)$.

Расчет начинают с использования уравнения (26.1). Уравнения (26.1) и (26.2) позволяют оценить варианты замены и сохранения оборудования, с тем чтобы принять тот из них, который предполагает больший доход. Эти соотношения дают возможность не только выбрать линию поведения при решении вопроса о сохранении или замене оборудования, но и определить прибыль, получаемую при принятии каждого из этих решений.

Пример 1. Определить оптимальный цикл замены оборудования при следующих исходных данных: $P = 10$, $S(t) = 0$, $f(t) = r(t) - u(t)$, представленных в табл. 26.1.

Таблица 26.1

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0

Решение. Уравнения (26.1) и (26.2) запишем в следующем виде:

$$f_N(t) = \max \begin{cases} f(t) + f_{N-1}(t+1), \\ -p + f(0) + f_{N-1}(1), \end{cases} \tag{26.3}$$

$$f_1(t) = \max \begin{cases} f(t), \\ -p + f(0). \end{cases}$$

Для $N = 1$

$$f_1(0) = \max \begin{cases} f(0) \\ -p + f(0) \end{cases} = \max \begin{cases} 10 \\ -10 + 10 \end{cases} = 10,$$

$$f_1(1) = \max \begin{cases} f(1) \\ -p + f(0) \end{cases} = \max \begin{cases} 9 \\ -10 + 10 \end{cases} = 9,$$

. . . . . .

$$f_1(12) = \max \begin{cases} f(12) \\ -p + f(0) \end{cases} = \max \begin{cases} 0 \\ -10 + 10 \end{cases} = 0.$$

Для $N = 2$

$$f_2(0) = \max \begin{cases} f(0) + f_1(1) \\ -p + f(0) + f_1(1) \end{cases} = \max \begin{cases} 10 + 9 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 19,$$

$$f_2(1) = \max \begin{cases} f(1) + f_1(2) \\ -p + f(0) + f_1(1) \end{cases} = \max \begin{cases} 9 + 8 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 17,$$

. . . . . .

Вычисления продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено условие $f_1(1) > f_2(2)$, т.е. в данный момент оборудование необходимо заменить, так как величина прибыли, получаемая в результате замены оборудования, больше, чем в случае использования старого. Результаты расчетов помещаем в таблицу, момент замены отмечаем звездочкой, после чего дальнейшие вычисления по строчке прекращаем (табл. 26.2).

Можно не решать каждый раз уравнение (26.3), а вычисления проводить в таблице. Например, вычислим $f_4(t)$:

$$f_4(0) = f_1(0) + f_3(1) = 10 + 24 = 34 > f_3(1) = 24,$$

Таблица 26.2

$F_N(t)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	N	$N-1$	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$f_1(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0
$f_2(t)$	19	17	15	13	11	9	9*						
$f_3(t)$	27	24	21	18	17	17*							
$f_4(t)$	34	30	26	24	24*								
$f_5(t)$	40	35	32	31	30	30*							
$f_6(t)$	45	41	39	37	36	35	35*						
$f_7(t)$	51	48	45	43	41	41*							
$f_8(t)$	58	54	51	48	48*								
$f_9(t)$	64	60	56	55	54	54*							
$f_{10}(t)$	70	65	63	61	60	60*							
$f_{11}(t)$	75	72	69	67	66	65	65*						
$f_{12}(t)$	82	78	75	73	72	72*							

$$f_4(1) = f_1(1) + f_3(2) = 9 + 21 = 30 > f_3(1),$$
$$f_4(2) = f_1(2) + f_3(3) = 8 + 18 = 26 > f_3(1),$$
$$f_4(3) = f_1(3) + f_3(4) = 7 + 17 = 24 > f_3(1),$$
$$f_4(4) = f_1(4) + f_3(5) = 6 + 17 = 23 < f_3(1).$$

Дальнейшие расчеты для $f_4(t)$ прекращаем, так как $f_4(4) = 23 < f_3(1) = 24$.

По результатам вычислений и по линии, разграничивающей области решений сохранения и замены оборудования, находим оптимальный цикл замены оборудования. Для данной задачи он составляет 4 года.

Ответ. Для получения максимальной прибыли от использования оборудования в двенадцатиэтапном процессе оптимальный цикл состоит в замене оборудования через каждые 4 года.

Оптимальное распределение ресурсов

Пусть имеется некоторое количество ресурсов x, которое необходимо распределить между n различными предприятиями, объектами, работами и т.д. так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения.

Введем обозначения: x_i — количество ресурсов, выделенных i-му предприятию ($i = \overline{1,n}$);

$g_i(x_i)$ — функция полезности, в данном случае это величина дохода от использования ресурса x_i, полученного i-м предприятием;

$f_k(x)$ — наибольший доход, который можно получить при использовании ресурсов x от первых k различных предприятий.

Сформулированную задачу можно записать в математической форме:

$$f_n(x) = \max \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x,$$
$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Для решения задачи необходимо получить рекуррентное соотношение, связывающее $f_k(x)$ и $f_{k-1}(x)$.

Обозначим через x_k количество ресурса, используемого k-м способом ($0 \leq x_k \leq x$), тогда для $(k-1)$ способов остается величина ресурсов, равная $(x - x_k)$. Наибольший доход, который получается при использовании ресурса $(x - x_k)$ от первых $(k-1)$ способов, составит $f_{k-1}(x - x_k)$.

Для максимизации суммарного дохода от k-го и первых $(k-1)$ способов необходимо выбрать x_k таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$f_1(x) = g_1(x),$$
$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2,n}.$$

Рассмотрим конкретную задачу по распределению капиталовложений между предприятиями.

Распределение инвестиций для эффективного использования потенциала предприятия

Совет директоров фирмы рассматривает предложения по наращиванию производственных мощностей для увеличения выпуска однородной продукции на четырех предприятиях, принадлежащих фирме.

Для расширения производства совет директоров выделяет средства в объеме 120 млн ден. ед. с дискретностью 20 млн р. Прирост выпуска продукции на предприятиях зависит от выделенной суммы, его значения представлены предприятиями и содержатся в табл. 26.3.

Таблица 26.3

Выделяемые средства, млн ден. ед.	Прирост выпуска продукции, млн ден. ед.			
	Предприятие №1	Предприятие №2	Предприятие №3	Предприятие №4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

Найти распределение средств между предприятиями, обеспечивающее максимальный прирост выпуска продукции, причем на одно предприятие можно осуществить не более одной инвестиции.

Решение. Разобьем решение задачи на четыре этапа по количеству предприятий, на которых предполагается осуществить инвестиции.

Рекуррентные соотношения будут иметь вид:
для предприятия № 1

$$f_1(x) = g_1(x_1),$$

для всех остальных предприятий

$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2, n}.$$

Решение будем проводить согласно рекуррентным соотношениям в четыре этапа.

1-й этап. Инвестиции производим только первому предприятию. Тогда

$$f_1(20) = 8, \qquad f_1(40) = 16, \qquad f_1(60) = 25,$$
$$f_1(80) = 36, \qquad f_1(100) = 44, \qquad f_1(120) = 62.$$

2-й этап. Инвестиции выделяем первому и второму предприятиям. Рекуррентное соотношение для 2-го этапа имеет вид

$$f_2(x) = \max\{g_2(x_2) + f_1(x - x_2)\}.$$

Тогда

при $x = 20$ $\quad f_2(20) = \max(8 + 0, 0 + 10) = \max(8, 10) = 10,$

при $x = 40$ $\quad f_2(40) = \max(16, 8 + 10, 20) =$
$= \max(16, 18, 20) = 20,$

при $x = 60$ $\quad f_2(60) = \max(25, 16 + 10, 8 + 20, 28) =$
$= \max(25, 26, 28, 28) = 28,$

при $x = 80$ $\quad f_2(80) = \max(36, 25 + 10, 16 + 20, 8 + 28, 40) =$
$= \max(36, 35, 36, 36, 40) = 40,$

при $x = 100$ $\quad f_2(100) = \max(44, 36 + 10, 25 + 20, 16 + 28, 8+$
$+40, 48) = \max(44, 46, 45, 44, 48, 48) = 48,$

при $x = 120$ $\quad f_2(120) = \max(62, 44+10, 36+20, 25+28, 16+40, 8+$
$+48, 62) = \max(62, 54, 56, 53, 56, 56, 62) = 62.$

3-й этап. Финансируем 2-й этап и третье предприятие. Расчеты проводим по формуле

$$f_3(x) = \max\{g_3(x_3) + f_2(x - x_3)\}.$$

Тогда

при $x = 20$ $\quad f_3(20) = \max(10, 12) = 12,$

при $x = 40$ $\quad f_3(40) = \max(20, 10 + 12, 21) =$

$$= \max(20, 22, 21) = 22,$$

при $x = 60$ $\quad f_3(60) = \max(28, 20 + 12, 10 + 21, 27) =$

$$= \max(28, 32, 31, 27) = 32,$$

при $x = 80$ $\quad f_3(80) = \max(40, 28 + 12, 20 + 21, 10 + 27, 38) =$

$$= \max(40, 40, 41, 37, 38) = 41,$$

при $x = 100$ $\quad f_3(100) = \max(48, 40 + 12, 28 + 21, 20+$

$$+27, 10 + 38, 50) = \max(48, 52, 49, 47, 48, 50) = 52,$$

при $x = 120$ $\quad f_3(120) = \max(62, 48+12, 40+21, 28+27, 20+$

$$+38, 10 + 50, 63) = \max(62, 60, 61, 55, 58, 60, 63) = 63.$$

4-й этап. Инвестиции в объеме 120 млн ден. ед. распределяем между 3-м этапом и четвертым предприятием.

При $x = 120$ $\quad f_4(120) = \max(63, 52+11, 41+23, 32+30, 22+$

$$+37, 12 + 51, 63) = \max(63, 63, 64, 62, 59, 63, 63) = 64.$$

Получены условия управления от 1-го до 4-го этапа. Вернемся от 4-го к 1-му этапу. Максимальный прирост выпуска продукции в 64 млн ден. ед. получен на 4-м этапе как $41 + 23$, т.е. 23 млн ден. ед. соответствуют выделению 40 млн ден. ед. четвертому предприятию (см. табл. 26.3). Согласно 3-му этапу 41 млн ден. ед. получен как $20 + 21$, т.е. 21 млн ден. ед. соответствует выделению 40 млн ден. ед. третьему предприятию. Согласно 2-му этапу 20 млн ден. ед. получено при выделении 40 млн ден. ед. второму предприятию.

Таким образом, инвестиции в объеме 120 млн ден. ед. целесообразно выделить второму, третьему и четвертому предприятиям по 40 млн ден. ед. каждому, при этом прирост продукции будет максимальным и составит 64 млн ден. ед.

Минимизация затрат на строительство и эксплуатацию предприятий

Задача по оптимальному размещению производственных предприятий может быть сведена к задаче распределения ресурсов согласно критерию минимизации с учетом условий целочисленности, накладываемых на переменные.

Пусть задана потребность в пользующемся спросом продукте на определенной территории. Известны пункты, в которых можно построить предприятия, выпускающие данный продукт. Подсчитаны затраты на строительство и эксплуатацию таких предприятий.

Необходимо так разместить предприятия, чтобы затраты на их строительство и эксплуатацию были минимальные.

Введем обозначения:

x — количество распределяемого ресурса, которое можно использовать n различными способами;

x_i — количество ресурса, используемого по i-му способу ($i = \overline{1,n}$);

$g_i(x_i)$ — функция расходов, равная, например, величине затрат на производство при использовании ресурса x_i по i-му способу;

$\varphi_k(x)$ — наименьшие затраты, которые нужно произвести при использовании ресурса x первыми k способами.

Необходимо минимизировать общую величину затрат при освоении ресурса x всеми способами:

$$\varphi_n(x) = \min \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Экономический смысл переменных x_i состоит в нахождении количества предприятий, рекомендуемого для строительства в i-м пункте. Для удобства расчетов будем считать, что планируется строительство предприятий одинаковой мощности.

Рассмотрим конкретную задачу по размещению предприятий.

Пример. В трех районах города предприниматель планирует построить пять предприятий одинаковой мощности по выпуску хлебобулочных изделий, пользующихся спросом.

Необходимо разместить предприятия таким образом, чтобы обеспечить минимальные суммарные затраты на их строительство и эксплуатацию. Значения функции затрат $g_i(x)$ приведены в табл. 26.4.

Таблица 26.4

x	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	11	18	35	51	76
$g_2(x)$	10	19	34	53	75
$g_3(x)$	9	20	36	54	74

В данном примере $g_i(x)$ — функция расходов в млн р., характеризующая величину затрат на строительство и эксплуатацию в зависимости от количества размещаемых предприятий в i-м районе;

$\varphi_k(x)$ — наименьшая величина затрат в млн р., которые нужно произвести при строительстве и эксплуатации предприятий в первых k районах.

Решение. Решение задачи проводим с использованием рекуррентных соотношений: для первого района

$$\varphi_1(x) = \min g_i(x_i) = g_1(x),$$

для остальных районов

$$\varphi_k(x) = \min\{g_k(x_k) + \varphi_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2, n}.$$

Задачу будем решать в три этапа.

1-й этап. Если все предприятия построить только в первом районе, то

$$\varphi_1(1) = g_1(1) = 11, \quad \varphi_1(2) = g_1(2) = 18, \quad \varphi_1(3) = g_1(3) = 35,$$
$$\varphi_1(4) = g_1(4) = 51, \quad \varphi_1(5) = g_1(5) = 76,$$

минимально возможные затраты при $x = 5$ составляют 76 млн р.

2-й этап. Определим оптимальную стратегию при размещении предприятий только в первых двух районах по формуле

$$\varphi_2(x) = \min\{g_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\}.$$

Найдем $\varphi_2(1)$:

$$g_2(1) + \varphi_1(0) = 10 + 0 = 10,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(1) = 0 + 11 = 11,$$
$$\varphi_2(1) = \min(10, 11) = 10.$$

Вычислим $\varphi_2(2)$:

$$g_2(2) + \varphi_1(0) = 19 + 0 = 19,$$
$$g_2(1) + \varphi_1(1) = 10 + 11 = 21,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(2) = 0 + 18 = 18,$$
$$\varphi_2(2) = \min(19, 21, 18) = 18.$$

Найдем $\varphi_2(3)$:

$$g_2(3) + \varphi_1(0) = 34 + 0 = 34,$$
$$g_2(2) + \varphi_1(1) = 19 + 11 = 30,$$
$$g_2(1) + \varphi_1(2) = 10 + 18 = 28,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(3) = 0 + 35 = 35,$$
$$\varphi_2(3) = \min(34, 30, 28, 35) = 28.$$

Определим $\varphi_2(4)$:

$$g_2(4) + \varphi_1(0) = 53 + 0 = 53,$$
$$g_2(3) + \varphi_1(1) = 34 + 11 = 45,$$
$$g_2(2) + \varphi_1(2) = 19 + 18 = 37,$$
$$g_2(1) + \varphi_1(3) = 10 + 35 = 45,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(4) = 0 + 51 = 51,$$
$$\varphi_2(4) = \min(53, 45, 37, 45, 51) = 37.$$

Вычислим $\varphi_2(5)$:

$$g_2(5) + \varphi_1(0) = 75 + 0 = 75,$$
$$g_2(4) + \varphi_1(1) = 53 + 11 = 64,$$
$$g_2(3) + \varphi_1(2) = 34 + 18 = 52,$$
$$g_2(2) + \varphi_1(3) = 19 + 35 = 54,$$
$$g_2(1) + \varphi_1(4) = 10 + 51 = 61,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(5) = 0 + 76 = 76,$$
$$\varphi_2(5) = \min(75, 64, 52, 54, 61, 76) = 52.$$

3-й этап. Определим оптимальную стратегию при размещении пяти предприятий в трех районах по формуле

$$\varphi_3(x) = \min\{g_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3)\}.$$

Найдем $\varphi_3(5)$:

$$g_3(5) + \varphi_2(0) = 74 + 0 = 74,$$
$$g_3(4) + \varphi_2(1) = 54 + 10 = 64,$$
$$g_3(3) + \varphi_2(2) = 36 + 18 = 54,$$
$$g_3(2) + \varphi_2(3) = 20 + 28 = 48,$$
$$g_3(1) + \varphi_2(4) = 9 + 37 = 46,$$
$$g_3(0) + \varphi_2(5) = 0 + 52 = 52,$$
$$\varphi_3(5) = \min(74, 64, 54, 48, 46, 52) = 46.$$

Минимально возможные затраты при $x = 5$ составляют 46 млн ден. ед.

Определены затраты на строительство предприятий от 1-го до 3-го этапа. Вернемся от 3-го к 1-му этапу. Минимальные затраты в 46 млн ден. ед. на 3-м этапе получены как 9 + 37, т.е. 9 млн ден. ед. соответствуют строительству одного предприятия в третьем районе (см. табл. 26.4). Согласно 2-му этапу 37 млн ден. ед. получены как 19 + 18, т.е. 19 млн ден. ед. соответствуют строительству двух предприятий во втором районе. Согласно 1-му этапу 18 млн ден. ед. соответствуют строительству двух предприятий в первом районе.

Ответ. Оптимальная стратегия состоит в строительстве одного предприятия в третьем районе, по два предприятия во втором и первом районах, при этом минимальная стоимость строительства и эксплуатации составит 46 млн ден. ед.

Нахождение рациональных затрат при строительстве трубопроводов и транспортных артерий

Требуется проложить путь (трубопровод, шоссе) между двумя пунктами A и B таким образом, чтобы суммарные затраты на его сооружение были минимальные.

Решение. Разделим расстояние между пунктами A и B на шаги (отрезки). На каждом шаге можем двигаться либо строго на восток (по оси X), либо строго на север (по оси Y). Тогда путь от A в B представляет ступенчатую ломаную линию, отрезки которой параллельны одной из координатных осей. Затраты на сооружение каждого из отрезков известны (рис. 26.2) в млн ден. ед.

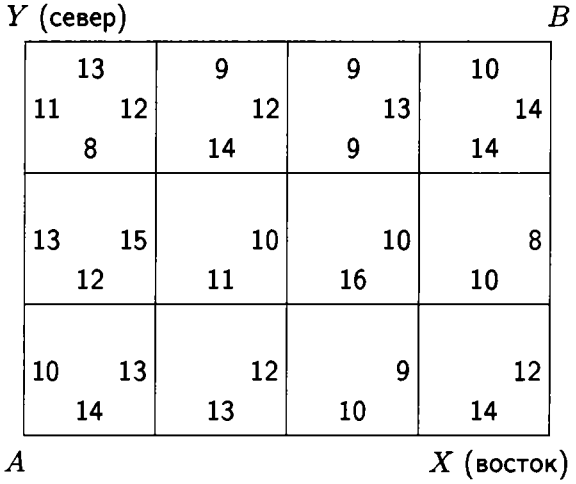


Рис. 26.2

Разделим расстояние от A до B в восточном направлении на 4 части, в северном — на 3 части. Путь можно рассматривать как управляемую систему, перемещающуюся под вли-

янием управления из начального состояния A в конечное B. Состояние этой системы перед началом каждого шага будет характеризоваться двумя целочисленными координатами x и y. Для каждого из состояний системы (узловой точки) найдем условное оптимальное управление. Оно выбирается так, чтобы стоимость всех оставшихся шагов до конца процесса была минимальна. Процедуру условной оптимизации проводим в обратном направлении, т.е. от точки B к точке A.

Найдем условную оптимизацию последнего шага (рис. 26.3).

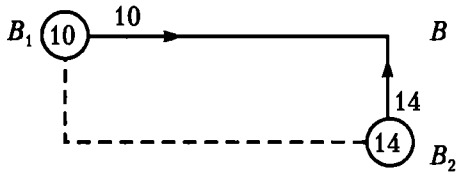


Рис. 26.3

В точку B можно попасть из B_1 или B_2. В узлах запишем стоимость пути. Стрелкой покажем минимальный путь.

Рассмотрим предпоследний шаг (рис. 26.4).

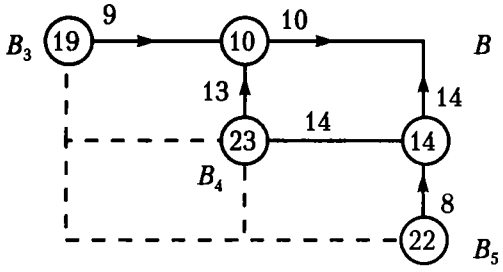


Рис. 26.4

Для точки B_3 условное управление — по оси X, а для точки B_5 — по оси Y. Управление для точки B_4 выбираем как

$$\min(13 + 10, 14 + 14) = \min(23, 28) = 23,$$

т.е. по оси Y.

Условную оптимизацию проводим для всех остальных узловых точек (рис. 26.5).

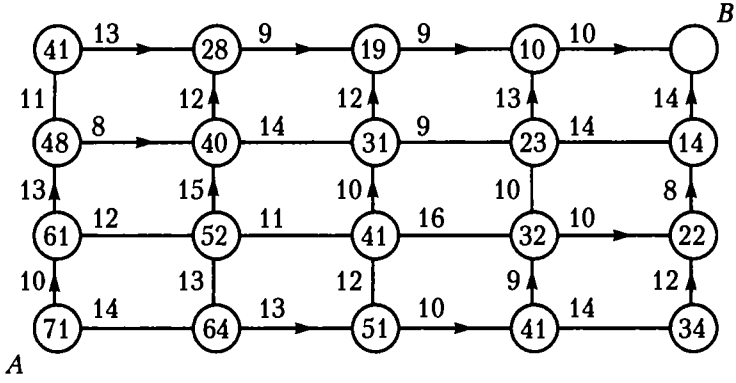


Рис. 26.5

Получим

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (c,\ c,\ в,\ c,\ в,\ в,\ в),$$

где c — север, $в$ —восток.

Минимальные затраты составляют

$$10 + 13 + 8 + 12 + 9 + 9 + 10 = 71 \text{ млн ден. ед.}$$

Если решать задачу исходя из оптимальности на каждом этапе, то решение будет следующим:

$$\bar{x} = (c,\ в,\ в,\ c,\ в,\ c,\ в).$$

Затраты составят $10 + 12 + 11 + 10 + 9 + 13 + 10 = 75 > 71$.

Ответ. Прокладывать путь целесообразно по схеме: c, c, $в$, c, $в$, $в$, $в$, при этом затраты будут минимальные и составят 71 млн ден. ед.

УПРАЖНЕНИЯ

26.1. К началу рассматриваемого периода на предприятии установлено новое оборудование. Зависимость производительности этого оборудования от времени его работы, а также затраты на содержание и ремонт при различном времени его использования приведены в табл. 26.5.

Таблица 26.5

Наименование	Время, в течение которого используется оборудование, годы					
	0	1	2	3	4	5
Годовой выпуск продукции, млн р.	80	75	65	60	60	55
Ежегодные затраты на содержание и ремонт оборудования, млн р.	20	25	30	35	45	55

Известно, что затраты, связанные с приобретением и установкой нового оборудования, идентичного установленному, составляют 40 млн р., а заменяемое оборудование списывается. Составить такой план замены оборудования в течение пяти лет, при котором общий доход за данный период времени максимален.

26.2. К началу анализируемого периода на предприятии установлено новое оборудование.

Определить оптимальный цикл замены оборудования при следующих исходных данных:

покупная цена оборудования (P) составляет 12 ден. ед.;

остаточная стоимость оборудования $S(t) = 0$;

$f_N(t) = r(t) - u(t)$ — максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t лет за оставшиеся N лет цикла использования оборудования при условии оптимальной стратегии, где $r(t)$ — стоимость продукции, выпускаемой за год на единице оборудования возраста t лет; $u(t)$ — ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста t лет; $N = 8$ лет.

Зависимость $f_N(t)$ от N задана в табл. 26.6.

Таблица 26.6

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(t)$	12	11	10	8	6	4	2	0	0

26.3. Торговая фирма располагает 5 автолавками, которые могут быть направлены в воскресный день в 3 населенных пункта. Считается, что товарооборот фирмы зависит лишь от коли-

чества и ассортимента направляемых товаров и определяется числом посланных в тот или иной населенный пункт машин.

Среднее значение товарооборота в тыс. р. в каждом из населенных пунктов задано в табл. 26.7.

Таблица 26.7

Количество автолавок	Товарооборот в населенных пунктах, тыс. р.		
	1	2	3
1	15	12	18
2	24	20	23
3	30	31	29
4	37	38	36
5	41	42	39

Найти оптимальную стратегию фирмы в распределении автолавок по населенным пунктам, максимизирующую общий товарооборот.

26.4. В табл. 26.8 указан возможный прирост выпуска продукции четырьмя плодово-консервными заводами области в млн р. при осуществлении инвестиций на их модернизацию с дискретностью 50 млн р., причем на один завод можно осуществить только одну инвестицию.

Таблица 26.8

Инвестиции, млн р.	Прирост выпуска продукции, млн р.			
	Заводы			
	1	2	3	4
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

Составить план распределения инвестиций между заводами области, максимизирующий общий прирост выпуска продукции.

26.5. В трех областях необходимо построить 5 предприятий по переработке сельскохозяйственной продукции одинаковой мощности.

Разместить предприятия таким образом, чтобы обеспечить минимальные суммарные затраты на их строительство и эксплуатацию.

Функция расходов $g_i(x)$, характеризующая величину затрат на строительство и эксплуатацию в зависимости от количества размещаемых предприятий в i-й области, приведена в табл. 26.9.

Таблица 26.9

x	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	8	14	22	29	34
$g_2(x)$	10	17	18	27	31
$g_3(x)$	11	16	15	26	31

26.6. Проложить трубопровод между двумя пунктами A и B так, чтобы суммарные затраты на его изготовление были минимальные. Исходные данные по затратам в млн р. для проведения расчетов представлены на рис. 26.6.

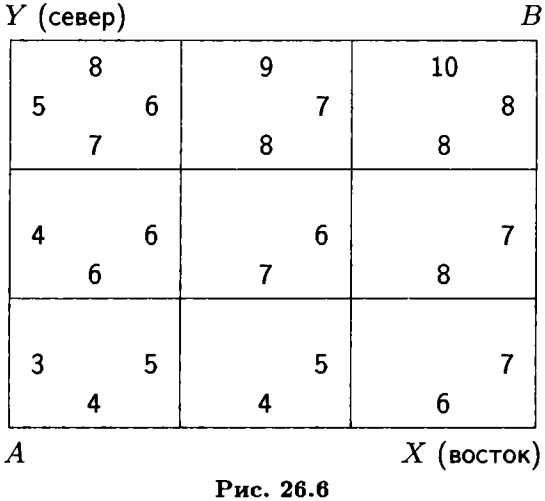


Рис. 26.6

Глава 27
СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ

До появления сетевых методов планирование работ, проектов осуществлялось в небольшом объеме. Наиболее известным средством такого планирования был ленточный график Ганта, недостаток которого состоит в том, что он не позволяет установить зависимости между различными операциями.

Современное сетевое планирование начинается с разбиения программы работ на операции. Определяются оценки продолжительности операций, и строится сетевая модель (график). Построение сетевой модели позволяет проанализировать все операции и внести улучшения в структуру модели до начала ее реализации. Строится календарный график, определяющий начало и окончание каждой операции, а также взаимосвязи с другими операциями графика. Календарный график выявляет критические операции, которым надо уделять особое внимание, чтобы закончить все работы в директивный срок. Что касается некритических операций, то календарный план позволяет определить резервы времени, которые можно выгодно использовать при задержке выполнения работ или эффективном применении как трудовых, так и финансовых ресурсов.

27.1. Основные понятия сетевой модели

Сетевая модель — графическое изображение плана выполнения комплекса работ, состоящего из нитей (работ) и узлов (событий), которые отражают логическую взаимосвязь всех операций. В основе сетевого моделирования лежит изображение планируемого комплекса работ в виде графа. Граф — схема, состоящая из заданных точек (вершин), соединенных системой линий. Отрезки, соединяющие вершины, называются ребрами (дугами) графа. Ориентированным называется такой граф, на котором стрелкой указаны направления всех его ребер (дуг), что позволяет определить, какая из двух его граничных вершин является начальной, а какая — конечной. Исследование таких сетей проводится методами теории графов.

Теория графов оперирует понятием пути, объединяющим

последовательность взаимосвязанных ребер. Контур означает такой путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной. Сетевой график — это ориентированный граф без контуров. В сетевом моделировании имеются два основных элемента — работа и событие.

Работа — это активный процесс, требующий затрат ресурсов, либо пассивный (ожидание), приводящий к достижению намеченного результата.

Фиктивная работа — это связь между результатами работ (событиями), не требующая затрат времени и ресурсов.

Событие — это результат (промежуточный или конечный) выполнения одной или нескольких предшествующих работ.

Путь — это любая непрерывная последовательность (цепь) работ и событий.

Критический путь — это путь, не имеющий резервов и включающий самые напряженные работы комплекса. Работы, расположенные на критическом пути, называют критическими. Все остальные работы являются некритическими (ненапряженными) и обладают резервами времени, которые позволяют передвигать сроки их выполнения, не влияя на общую продолжительность выполнения всего комплекса работ.

При построении сетевых моделей необходимо соблюдать следующие правила.

1. Сеть изображается слева направо, и каждое событие с большим порядковым номером изображается правее предыдущего. Общее направление стрелок, изображающих работы, также в основном должно быть расположено слева направо, при этом каждая работа должна выходить из события с меньшим номером и входить в событие с бóльшим номером.

2. Два соседних события могут объединяться лишь одной работой. Для изображения параллельных работ вводятся промежуточное событие и фиктивная работа (рис. 27.1).

3. В сети не должно быть тупиков, т.е. промежуточных событий, из которых не выходит ни одна работа (рис. 27.2).

4. В сети не должно быть промежуточных событий, которым не предшествует хотя бы одна работа (рис. 27.3).

5. В сети не должно быть замкнутых контуров, состоящих из взаимосвязанных работ, создающих замкнутую цепь

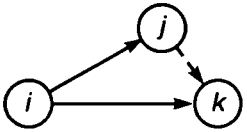


Рис. 27.1

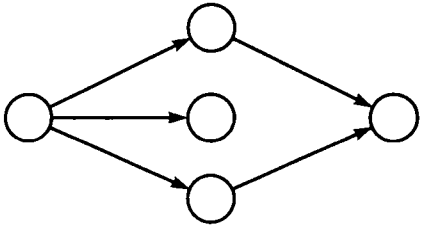


Рис. 27.2

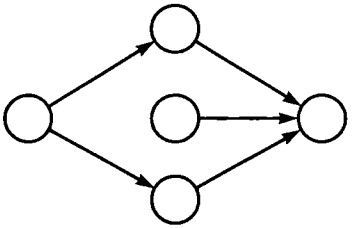


Рис. 27.3

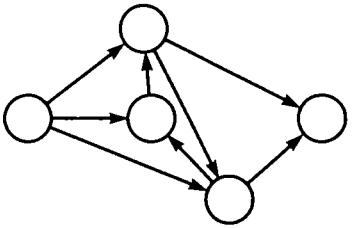


Рис. 27.4

(рис. 27.4). Для правильной нумерации событий поступают следующим образом: нумерация событий начинается с исходного события, которому дается номер 1. Из исходного события 1 вычеркивают все исходящие из него работы, на оставшейся сети вновь находят событие, в которое не входит ни одна работа. Этому событию дается номер 2. Затем вычеркивают работы, выходящие из события 2, и вновь находят на оставшейся части сети событие, в которое не входит ни одна работа, ему присваивается номер 3, и так продолжается до завершающего события. Пример нумерации сетевого графика показан на рис. 27.5.

Продолжительность выполнения работ устанавливается на основании действующих нормативов или по экспертным оценкам специалистов. В первом случае временные оценки являются детерминированными (однозначными), во втором — стохастическими (вероятностными).

Рассмотрим в качестве примера программу создания нового бытового прибора, пользующегося спросом у населения. Необходимые данные приведены в табл. 27.1.

На основании данных таблицы построим сетевой график создания прибора с учетом вышеизложенных рекомендаций (рис. 27.6).

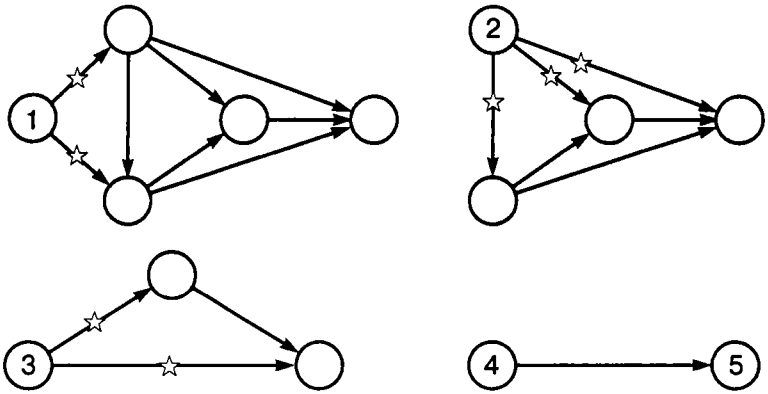


Рис. 27.5

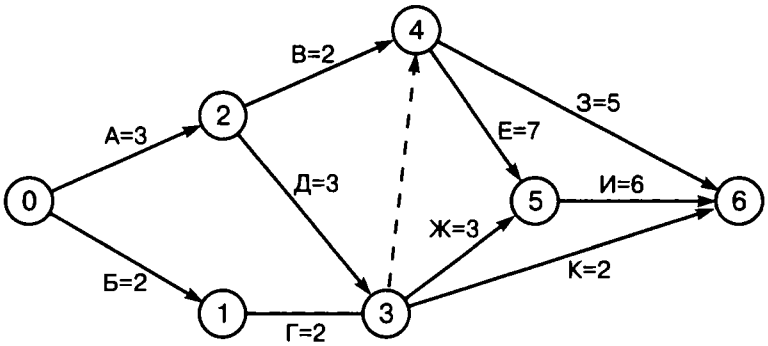


Рис. 27.6

Расчет временны́х параметров сетевого графика

Основным временны́м параметром сетевого графика является продолжительность критического пути.

Расчет критического пути включает два этапа. Первый называется *прямым проходом.* Вычисления начинают с исходного события и продолжают до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие. Для каждого события определяется одно число, представляющее ранний срок его наступления. На втором этапе, называемом обратным проходом, вычисления начинают с завершающего события и продолжают, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события вычисляется поздний срок его наступления.

Таблица 27.1

Операции	Наименование работы	Непосредственно предшествующие операции	Продолжительность, недели
А, Б	Разработка технической документации (ТД) на прибор и его электронную часть	—	А-3, Б-2
В, Г	Разработка технологической документации на электронную часть прибора и прибор	А, Б	В-2, Г-2
Д	Передача ТД на прибор	А	3
Е	Изготовление приборов	В	7
Ж	Изготовление электронной части прибора	Г, Д	3
З, К	Разработка ТД на эксплуатацию прибора и электронную часть	В, Г	З-5, К-2
И	Сборка и испытания прибора	Е, Ж	6

Рассмотрим прямой проход:

$t_i^{\text{р.н}}$ — ранний срок начала всех операций, выходящих из события i.

Если $i = 0$, то $t_0^{\text{р.н}} = 0$;

$t_j^{\text{р.н}}$ — ранний срок начала всех операций, входящих в j. Тогда

$$t_j^{\text{р.н}} = \max_i (t_i^{\text{р.н}} + t_{ij}) \text{ для всех } (i, j),$$

где t_{ij} — продолжительность операции (i, j);

$$t_1^{\text{р.н}} = t_0^{\text{р.н}} + t_{0,1} = 0 + 2 = 2; \quad t_2^{\text{р.н}} = t_0^{\text{р.н}} + t_{0,2} = 0 + 3 = 3;$$

$$t_3^{\text{р.н}} = \max_{i=1,2}\{2 + 2, 3 + 3\} = 6; \quad t_4^{\text{р.н}} = \max_{i=2,3}\{3 + 2, 6 + 0\} = 6;$$

$$t_5^{\text{р.н}} = \max_{i=3,4}\{6 + 3, 6 + 7\} = 13; \quad t_6^{\text{р.н}} = \max_{i=3,4,5}\{6+2, 6+5, 13+6\} = 19.$$

Прямой проход закончился, начинаем обратный:

$t_i^{\text{п.о}}$ — поздний срок окончания всех операций, входящих в событие i.

Если $i = n$, где n — завершающее событие сети, то $t_n^{\text{п.о}} = t_n^{\text{р.н}}$ и является отправной точкой обратного прохода;

$$t_i^{\text{п.о}} = \min_j (t_j^{\text{п.о}} - t_{i,j}) \text{ для всех операций } (i,j);$$

$$t_6^{\text{п.о}} = t_6^{\text{р.н}} = 19, \qquad t_5^{\text{п.о}} = t_6^{\text{п.о}} - t_{5,6} = 19 - 6 = 13,$$

$$t_4^{\text{п.о}} = \min_{j=5,6}\{19-5, 13-7\} = 6, \qquad t_3^{\text{п.о}} = \min_{j=4,5,6}\{19-2, 13-3, 6-0\} = 6,$$

$$t_2^{\text{п.о}} = \min_{j=3,4}\{6-3, 6-2\} = 3, \qquad t_1^{\text{п.о}} = t_3^{\text{п.о}} - t_{1,3} = 6 - 2 = 4,$$

$$t_0^{\text{п.о}} = \min_{j=1,2}\{3 - 3, 4 - 2\} = 0.$$

Используя результаты вычислений при прямом и обратном проходах, можно определить операции критического пути. Операция (i,j) принадлежит критическому пути, если она удовлетворяет условиям:

$$t_i^{\text{р.н}} = t_i^{\text{п.о}},$$
$$t_j^{\text{р.н}} = t_j^{\text{п.о}},$$
$$t_j^{\text{р.н}} - t_i^{\text{р.н}} = t_j^{\text{п.о}} - t_i^{\text{п.о}} = t_{ij}.$$

Для рассматриваемого примера критический путь включает операции $(0,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,6)$.

Операции связаны еще с двумя сроками:

$t_{ij}^{\text{п.н}}$ — поздний срок начала работы. Он является наиболее поздним (максимальным) из допустимых моментов начала данной работы, при котором еще возможно выполнение всех последующих работ в установленный срок:

$$t_{ij}^{\text{п.н}} = t_j^{\text{п.о}} - t_{ij};$$

$t_{ij}^{\text{р.о}}$ — ранний срок окончания работы. Он является наиболее ранним (минимальным) из возможных моментов окончания работы при заданной продолжительности работ:

$$t_{ij}^{\text{р.о}} = t_i^{\text{р.н}} + t_{ij}.$$

Различают два вида резервов времени: полный резерв ($r_{\text{п}}$) и свободный резерв ($r_{\text{св}}$).

Полный резерв времени показывает, на сколько может быть увеличена сумма продолжительности всех работ относительно критического пути. Он представляет собой разность между максимальным отрезком времени, в течение которого может быть выполнена операция, и ее продолжительностью (t_{ij}) и определяется как

$$t_{ij}^{\text{п.н}} - t_i^{\text{р.н}}.$$

Свободный резерв времени — максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность работы при условии, что все события наступают в ранние сроки:

$$r_{\text{св}\,ij} = t_j^{\text{р.н}} - t_i^{\text{р.н}} - t_{ij}.$$

Результаты расчета критического пути и резервов времени некритических операций представлены в нижеследующей таблице. Следует отметить, что критические операции должны иметь нулевой полный резерв времени, при этом свободный резерв также должен быть равен нулю.

Построение сетевого графика и распределение ресурсов

Конечным результатом выполняемых на сетевой модели расчетов является сетевой график (план). При построении сетевого графика необходимо учитывать наличие ресурсов, так как одновременное выполнение некоторых операций из-за ограничений, связанных с рабочей силой, оборудованием и другими видами ресурсов, иногда оказывается невозможным. Именно в этом отношении представляют ценность полные резервы времени некритических операций.

Сдвигая некритическую операцию в том или ином направлении, но в пределах ее полного резерва времени, можно добиться снижения максимальной потребности в ресурсах. Однако даже при отсутствии ограничений на ресурсы полные резервы времени обычно используются для выравнивания потребностей в ресурсах на протяжении всего срока реализации программы работ. Это означает, что работы удастся выполнить более или менее постоянным составом рабочей силы.

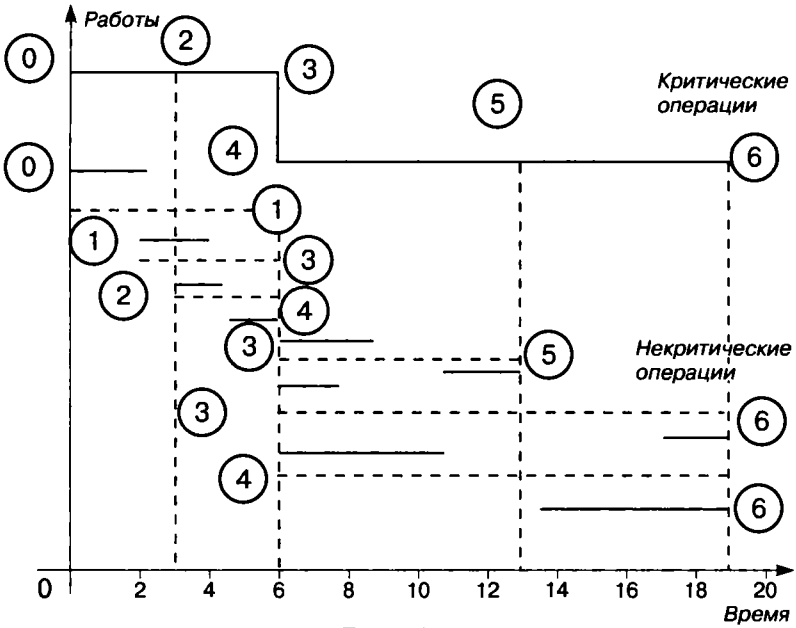


Рис. 27.7

На рис. 27.7 показан график примера, рассмотренного выше. Роль полных и свободных резервов при выборе сроков объясняется двумя правилами:

1) если полный резерв равен свободному, то календарные сроки некритической операции можно выбрать в любой точке между ее ранним началом и поздним окончанием;

2) если свободный резерв меньше полного, то срок начала некритической операции можно сдвинуть по отношению к раннему сроку ее начала не более чем на величину свободного резерва.

В вышеуказанном примере правило 2 применимо к операции $(0, 1)$, а сроки всех остальных операций выбираются по правилу 1.

В табл. 27.2 представлены ресурсы рабочей силы для различных операций.

На рис. 27.8 показана потребность в рабочей силе при условии выбора в качестве календарных сроков некритических операций начала их ранних сроков, на рис. 27.9 — потребность в рабочей силе при выборе наиболее поздних сроков.

Таблица 27.2

Работа (i,j)	Продолжительность t_{ij}	Раннее		Позднее		Полный резерв $r_п$	Свободный резерв $r_{св}$
		начало $t_i^{р.н}$	окончание $t_{ij}^{р.о}$	начало $t_{ij}^{п.н}$	окончание $t_j^{п.о}$		
1	2	3	4	5	6	7	8
(0,1)	2	0	2	2	4	2	0
(0,2)	3	0	3	0	3	$0^к$	0
(1,3)	2	2	4	4	6	2	2
(2,3)	3	3	6	3	6	$0^к$	0
(2,4)	2	3	5	4	6	1	1
(3,4)	0	6	6	6	6	$0^к$	0
(3,5)	3	6	9	10	13	4	4
(3,6)	2	6	8	17	19	11	11
(4,5)	7	6	13	6	13	$0^к$	0
(4,6)	5	6	11	14	19	8	8
(5,6)	6	13	19	13	19	$0^к$	0

Примечание: к — критические операции.

Пунктирной линией представлена потребность критических операций, которая должна быть удовлетворена, если нужно выполнить все работы в минимально возможный срок.

Оптимальное решение задачи равномерного использования ресурсов (минимизация максимальной потребности в ресурсах) представлено на рис. 27.10, уточненный график выполнения работ указан на рис. 27.11.

Учет стоимостных факторов при реализации сетевого графика

Стоимостные факторы при реализации сетевого графика учитываются путем определения зависимости "затраты–продолжительность" для каждой операции. При этом рассматриваются прямые затраты, а косвенные типа административных или управленческих расходов не принимаются во внимание.

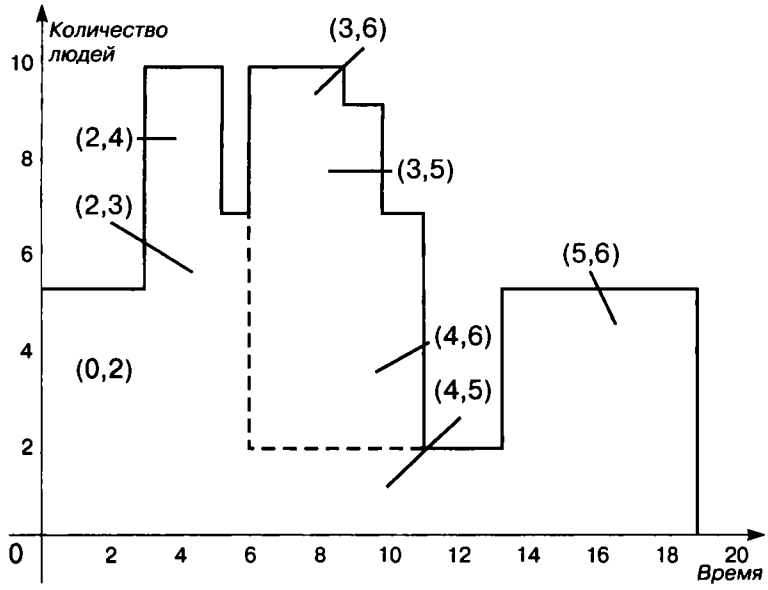


Рис. 27.8

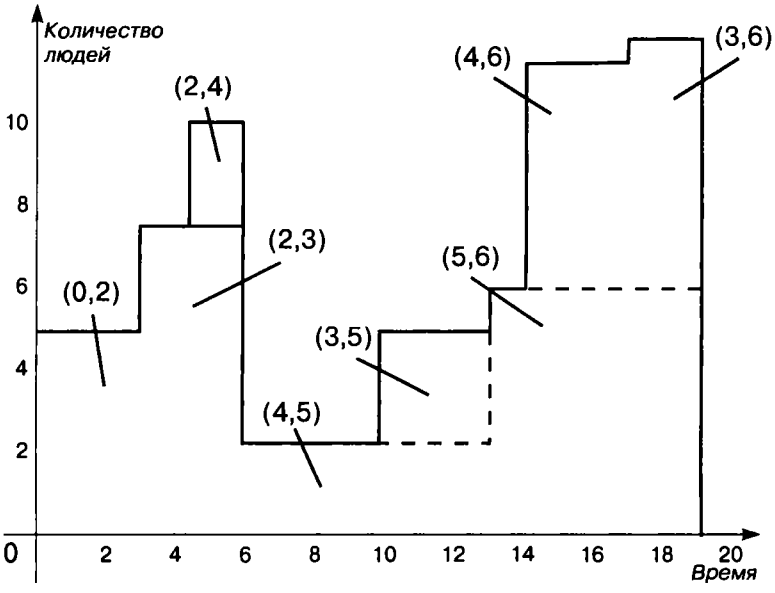


Рис. 27.9

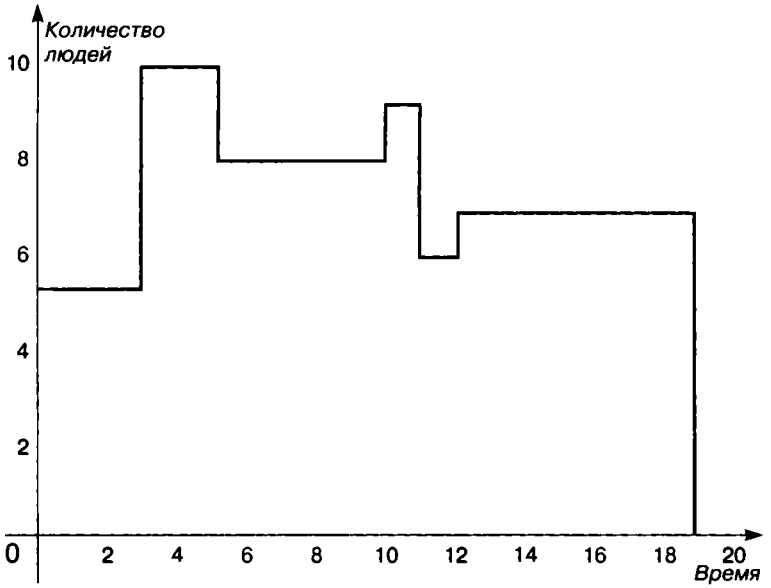


Рис. 27.10

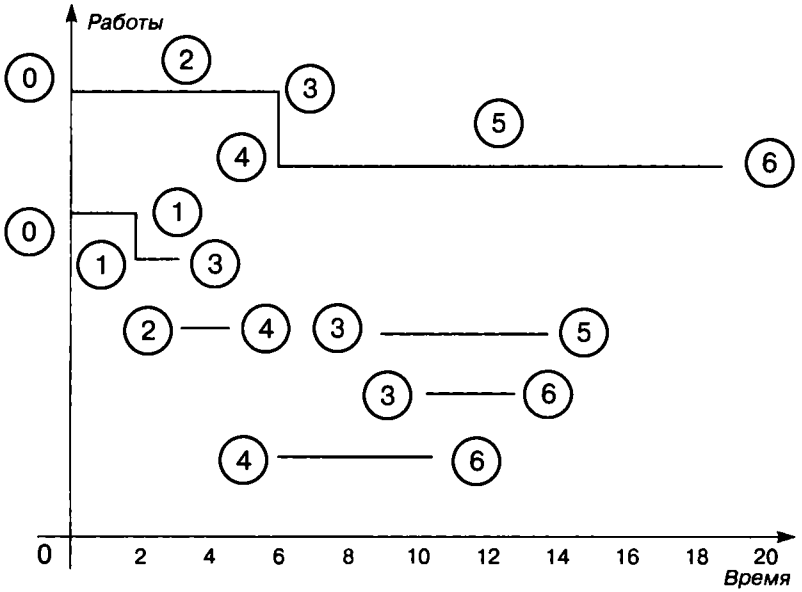


Рис. 27.11

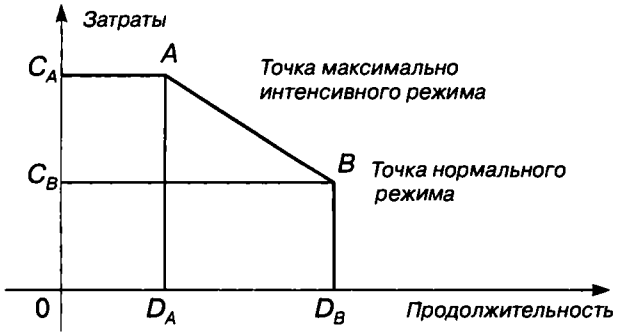


Рис. 27.12

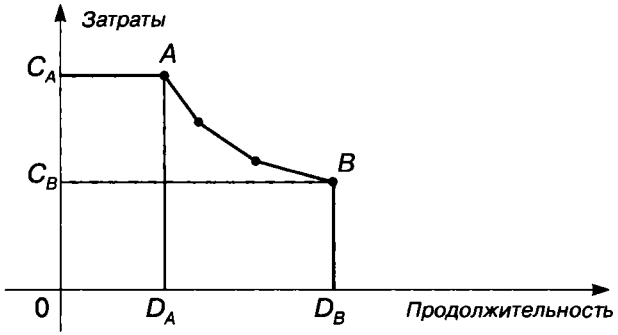


Рис. 27.13

На рис. 27.12 показана линейная зависимость стоимости операции от ее продолжительности. Точка (D_B, C_B), где D_B — продолжительность операции, а C_B — ее стоимость, соответствует нормальному режиму выполнения операции. Продолжительность операции можно уменьшить (сжать), увеличив интенсивность использования ресурсов, а следовательно, увеличив стоимость операции. Однако существует предел, называемый *минимальной продолжительностью операции.* За точкой, соответствующей этому пределу (точка максимально интенсивного режима), дальнейшее увеличение интенсивности использования ресурсов ведет лишь к увеличению затрат без сокращения продолжительности операции. Этот предел обозначен на рис. 27.12 точкой A с координатами (D_A, C_A).

Линейная зависимость "затраты–продолжительность" принимается из соображений удобства, так как ее можно опреде-

лить для любой операции по двум точкам нормального и максимально интенсивного режимов, т.е. по точкам A и B.

Использование нелинейной зависимости "затраты–продолжительность" существенно усложняет вычисления. Поэтому иногда нелинейную зависимость можно аппроксимировать кусочно-линейной (рис. 27.13), когда операция разбивается на части, каждая из которых соответствует одному линейному отрезку. Следует отметить, что наклоны этих отрезков при переходе от точки нормального режима к точке максимально интенсивного режима возрастают. Если это условие не выполняется, то аппроксимация не имеет смысла.

Определив зависимость "затраты–продолжительность", для всех операций сети принимают нормальную продолжительность. Далее рассчитывается сумма затрат на все операции сети при этой продолжительности работ. На следующем этапе рассматривается возможность сокращения продолжительности работ. Этого можно достичь за счет уменьшения продолжительности какой-либо критической операции, только критические операции и следует подвергать анализу.

Чтобы добиться сокращения продолжительности выполнения работ при минимально возможных затратах, необходимо в максимально допустимой степени сжать ту критическую операцию, у которой наклон кривой "затраты–продолжительность" наименьший. В результате сжатия критической операции получают новый календарный график, возможно, с новым критическим путем. Стоимость работ при новом календарном графике будет выше стоимости работ по предшествующему графику. На следующем этапе этот новый график вновь подвергается сжатию за счет следующей критической операции с минимальным наклоном кривой "затраты–продолжительность" при условии, что продолжительность этой операции не достигла минимального значения. Подобная процедура повторяется, пока все критические операции не будут находиться в режиме максимальной интенсивности. Полученный таким образом оптимальный календарный график соответствует минимуму прямых затрат.

Обоснование привлекательности проекта по выпуску продукции

Для финансирования проектов по строительству и наладке изготовления конкурентоспособной продукции в большинстве случаев фирмам требуются инвестиции. Включение в проект материалов с оптимизацией сетевых моделей в части обоснования сроков возврата инвестиций делает проект более привлекательным и способствует принятию инвестором положительного решения.

Пример 1. Предприятие решило для улучшения финансового состояния наладить выпуск конкурентоспособной продукции (мороженого). Для переоборудования цеха (участка) под выпуск этой продукции необходимо выполнить:

1) подготовку технического задания на переоборудование участка (30 дн.);
2) заказ и поставку нового оборудования (60 дн.);
3) заказ и поставку нового электрооборудования (50 дн.);
4) демонтаж старого и установку нового оборудования (90 дн.);
5) демонтаж старого и установку нового электрооборудования (80 дн.);
6) переобучение персонала (30 дн.);
7) испытания и сдачу в эксплуатацию оборудования для производства мороженого (20 дн.).

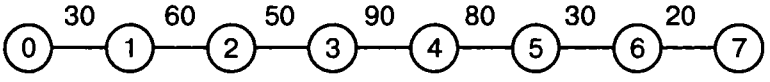
Ожидается, что производительность после ввода новой линии составит 20 т мороженого в смену. Прибыль от реализации 1 т продукции составит 0,5 тыс. р. в смену. Деньги на покупку и переоборудование участка в размере 2 000 тыс. р. взяты в банке под 20% годовых (из расчета 1 500 тыс. р. на закупку оборудования и 500 тыс. р. на работы по демонтажу старого оборудования и установке нового оборудования). Затраты на проведение работ в нормальном и максимальном режимах указаны в табл. 27.3.

Определить, через какое время может быть возвращен кредит в банк.

Таблица 27.3

Работа	Нормальный режим		Максимальный режим	
	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. р.	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. р.
1	30	20	25	30
2	60	40	45	60
3	50	30	40	40
4	90	70	70	100
5	80	60	65	70
6	30	25	20	25
7	20	20	17	25
Итого	360	265	282	350

Решение. 1. Составим график проведения работ по пуску новой линии:



На проведение переоборудования необходимо

$$30 + 60 + 50 + 90 + 80 + 30 + 20 = 360 \text{ дн.}$$

2. График можно улучшить, выполняя некоторые работы параллельно. Получим график (рис. 27.14).

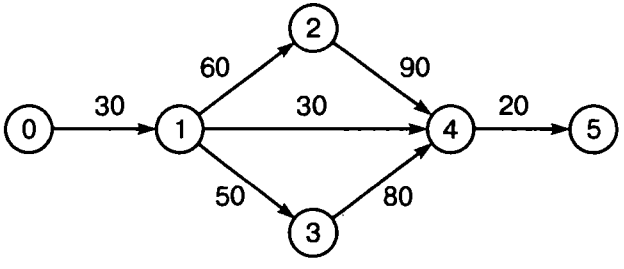


Рис. 27.14

На этом графике обозначены работы:

$0,1$ — подготовка технического задания;

$1,2$ — заказ и поставка нового оборудования;

$1,3$ — заказ и поставка нового электрооборудования;

$2,4$ — установка нового оборудования;

$3,4$ — установка нового электрооборудования;

$1,4$ — переобучение персонала;

$4,5$ — сдача в эксплуатацию новой линии.

По графику путь $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,4)$, $(4,5)$ имеет продолжительность 200 дн.; $(0,1)$, $(1,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$ — 180 дн.; $(0,1)$, $(1,4)$, $(4,5)$ — 80 дн.

Критическим путем графика является путь, на котором находятся работы $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,4)$, $(4,5)$ продолжительностью

$$30 + 60 + 90 + 20 = 200 \text{ дн.}$$

График улучшился на $360 - 200 = 160$ дн.

Определим, через какое время после начала выпуска мороженого может быть возвращен кредит в банк.

Через 200 дн. после начала работ предприятие истратит 1 500 тыс. р. на приобретение оборудования (согласно условию примера) и 265 тыс. р. на его установку и сдачу в эксплуатацию (см. табл. 27.3, столбец "Затраты" при нормальном режиме). В наличии у предприятия останется

$$2\,000 - 1\,500 - 265 = 235 \text{ тыс. р.}$$

Построим графики изменения кредита в зависимости от времени получения прибыли предприятием — от выпуска мороженого (рис. 27.15).

Для построения графика изменения кредита в зависимости от времени составим уравнение. Через 360 дн. после выдачи банком кредита под 20% годовых долг предприятия составит 2 400 тыс. р. Поэтому известны две точки этой прямой: $A(0, 2\,000)$, $B(360, 2\,400)$. Согласно уравнению прямой, проходящей через две точки:

$$(y - y_A)/(y_B - y_A) = (x - x_A)/(x_B - x_A),$$
$$(y - 2000)/(2400 - 2000) = (x - 0)/(360 - 0).$$

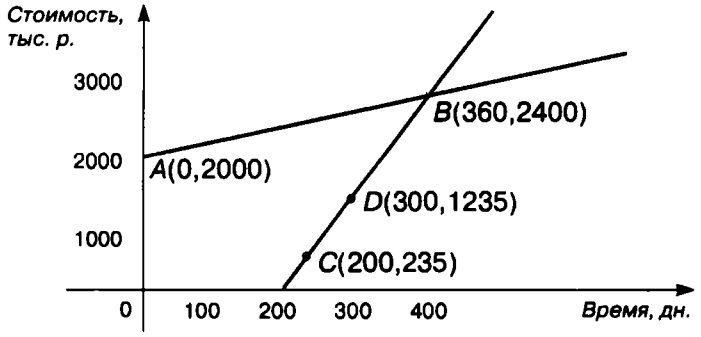


Рис. 27.15

Решая уравнение, получим

$$10x - 9y + 18\,000 = 0. \qquad (27.1)$$

Найдем уравнение прибыли предприятия. Известно, что через 200 дн. после начала работ у предприятия осталось от кредита 235 тыс. р. Через 100 дн. после начала выпуска продукции предприятие получит прибыль

$$0,5(\text{тыс. р.}) \cdot 20(\text{т}) \cdot 100(\text{дн.}) = 1000 \text{ тыс. р.}$$

и у него будет в наличии

$$1000 + 235 = 1235 \text{ тыс. р.}$$

Таким образом, для нахождения уравнения прибыли имеем две точки: $C(200, 235)$, $D(300, 1235)$. Тогда

$$\begin{gathered}(y - y_C)/(y_D - y_C) = (x - x_C)/(x_D - x_C),\\ (y - 235)/(1235 - 235) = (x - 200)/(300 - 200), \qquad (27.2)\\ 10x - y - 1765 = 0.\end{gathered}$$

Решая совместно уравнения (27.1) и (27.2), определим время, когда кредит может быть возвращен в банк:

$$\begin{cases} 10x - 9y + 18\,000 = 0,\\ \quad 10x - y - 1765 = 0.\end{cases}$$

Откуда получаем $y = 2471$, $x = 423{,}6 \approx 424$ дн.

3. График выполнения работ может быть сжат за счет выполнения некоторых операций в максимально интенсивном режиме.

Вычислим наклоны кривой "затраты–продолжительность" для каждой операции. Результаты расчетов даны в табл. 27.4.

Таблица 27.4

Операция	Наклон
0,1	2
1,2	1,3
1,3	1
2,4	1,5
3,4	0,7
1,4	1
4,5	1,7

Учитывая наклоны кривой, производим сжатие операций $(0,1)$, $(2,4)$, $(3,4)$, $(4,5)$, получим сетевой график (рис. 27.16).

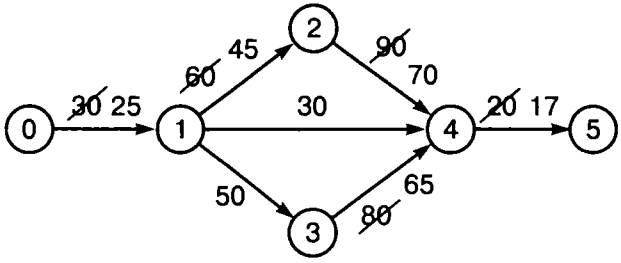


Рис. 27.16

Новый график имеет 2 критических пути: $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,4)$, $(4,5)$ и $(0,1)$, $(1,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$ с продолжительностью 157 дн.

Таким образом, критический путь сокращен с 200 до 157 дн., а это означает, что предприятие начнет производить мороженое через 157 дн. после начала работ.

Определим, сколько предприятию придется заплатить за "сжатие" критического пути (см. табл. 27.3):

$$
\begin{aligned}
&(0,1): && 30-20=10 \text{ тыс. р.};\\
&(1,2): && 60-40=20 \text{ тыс. р.};\\
&(2,4): && 100-70=30 \text{ тыс. р.};\\
&(3,4): && 70-60=10 \text{ тыс. р.};\\
&(4,5): && 25-20=5 \text{ тыс. р.}
\end{aligned}
$$

Таким образом, "сжатие" работ $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,4)$, $(4,5)$ обойдется предприятию в

$$10+20+30+10+5=75 \text{ тыс. р.}$$

График изменения кредита в зависимости от времени остается прежним (см. рис. 27.15). Его вид определяет уравнение

$$10x-9y+18\,000=0.$$

Найдем уравнение прибыли.

Через 157 дн. после начала работ у предприятия осталось от кредита

$$2000-1500-265-75=160 \text{ тыс. р.}$$

Через 100 дн. после начала выпуска продукции предприятие получит прибыль

$$20(\text{тыс. р.})\cdot 0,5(\text{тыс. р.})\cdot 100(\text{дн.})=1000 \text{ тыс. р.},$$

и у него будет в наличии

$$1000+160=1160 \text{ тыс. р.}$$

Таким образом, для нахождения уравнения прибыли предприятия имеем две точки:

$$C'(157,160) \text{ и } D'(257,1160).$$

Согласно уравнению прямой, проходящей через 2 точки, получим

$$\begin{gathered}(y - y_{C'})/(y_{D'} - y_{C'}) = (x - x_{C'})/(x_{D'} - x_{C'}),\\ (y - 160)/(1160 - 160) = (x - 157)/(257 - 157), \qquad (27.3)\\ 10x - y - 1410 = 0.\end{gathered}$$

Решая совместно уравнения (27.1) и (27.3), определим время, когда кредит может быть возвращен в банк:

$$\begin{cases} 10x - 9y + 18\,000 = 0,\\ \quad 10x - y - 1410 = 0,\end{cases}$$

$$y = 2426,25,\ x = 383,6 \approx 384 \text{ дн.}$$

Таким образом, через 384 дн. предприятие может вернуть кредит в банк. По сравнению с предыдущим случаем (см. п. 2) предприятие вернет в банк деньги раньше на $424 - 384 = 40$ дн.

При нормальном режиме работ критический путь составляет 200 дн., стоимость работ — 265 тыс. р.

Критический путь уменьшен до 157 дн., минимальная стоимость работ составляет $265 + 75 = 340$ тыс. р. при максимальном режиме.

27.2. Минимизация сети

Задача минимизации сети состоит в нахождении ребер, соединяющих все узлы сети и имеющих минимальную суммарную длину (рис. 27.17).

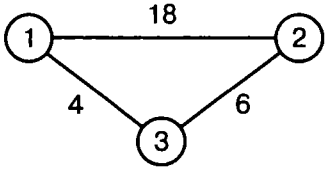


Рис. 27.17

На ребрах, соединяющих узлы 1, 2, 3, указаны длины. Узел 3 соединен с узлами 1 и 2 минимальной длиной $4 + 6 = 10$. Если

соединить узлы 1 и 2, то возникает цикл и получающаяся сеть не будет минимальной. Отсутствие циклов в минимальной сети дало ей название "минимальное дерево-остов".

Алгоритм решения

Начнем с любого узла и соединим его с ближайшим узлом сети. Соединенные два узла образуют связное множество, а остальные — несвязное. Далее в несвязном множестве выберем узел, который расположен ближе других к любому из узлов связного множества. Скорректируем связное и несвязное множества и будем повторять процесс до тех пор, пока в связное множество не попадут все узлы сети. В случае одинаково удаленных узлов выберем любой из них, что указывает на неоднозначность (альтернативность) "минимального дерева-остова".

Пример 2. Телевизионная фирма планирует создание кабельной сети для обслуживания 5 районов-новостроек. Числа на ребрах указывают длину кабеля (рис. 27.18). Узел 1 — телевизионный центр. Отсутствие ребра между двумя узлами означает, что соединение соответствующих новостроек либо связано с большими затратами, либо невозможно.

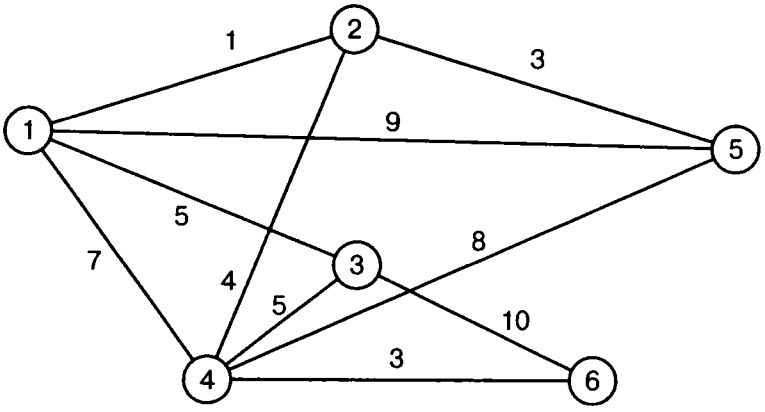


Рис. 27.18

Найти такое соединение кабелем районов-новостроек, чтобы длина его была минимальной.

Решение. Минимальная длина кабеля: $1+3+4+3+5=16$ (рис. 27.19).

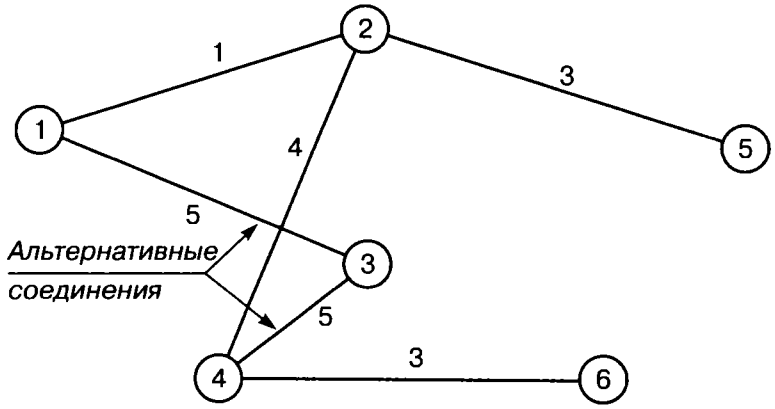


Рис. 27.19

Пример 3. На рис. 27.20 указаны длины коммуникаций, связывающих 9 установок по добыче газа в открытом море с расположенным на берегу приемным пунктом. Поскольку скважина 1 расположена ближе всех к берегу, она оснащена необходимым оборудованием для перекачки газа, идущего с остальных скважин в приемный пункт.

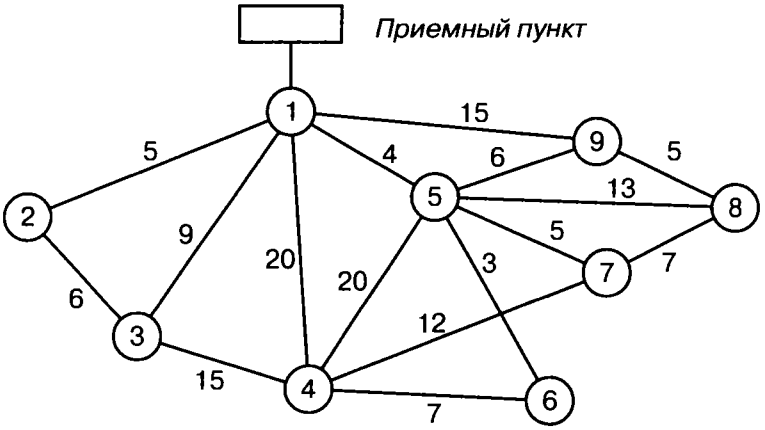


Рис. 27.20

Построить сеть трубопровода, соединяющего все скважины с приемным пунктом и имеющего минимальную общую длину труб.

Решение. Минимальная длина труб: 5+6+4+3+7+5+6+ + 5 = 41 (рис. 27.21).

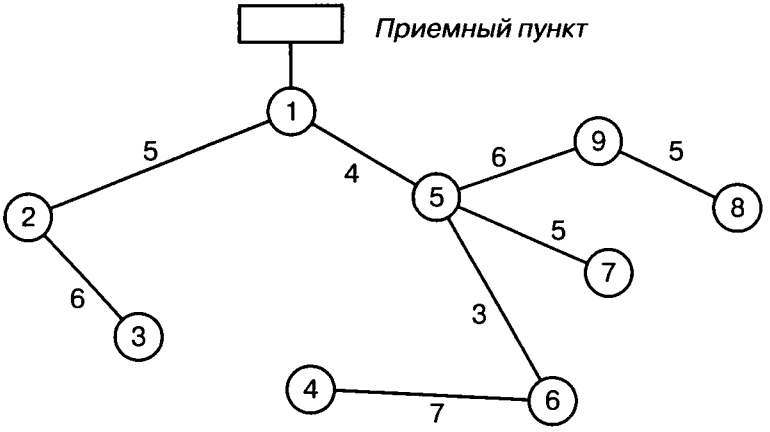


Рис. 27.21

Нахождение кратчайшего пути

Задача состоит в нахождении связанных между собой дорог на транспортной сети, которые в совокупности имеют минимальную длину от исходного пункта до пункта назначения.

Введем обозначения:

d_{ij} — расстояние на сети между смежными узлами i и j;

U_j — кратчайшее расстояние между узлами i и j, $U_1 = 0$.

Формула для вычисления U_j:

$$U_j = \min_i \left\{ \begin{array}{l} \text{Кратчайшее расстояние} \\ \text{до предыдущего узла } i \\ \text{плюс расстояние меж-} \\ \text{ду текущим узлом } j \text{ и} \\ \text{предыдущим узлом } i \end{array} \right\} = \min_i \{U_i + d_{ij}\}.$$

Из формулы следует, что кратчайшее расстояние U_j до узла j можно вычислить лишь после того, как определено кратчайшее расстояние до каждого предыдущего узла i, соединенного дугой с узлом j. Процедура завершается, когда получено U_i последнего звена.

Определить кратчайшее расстояние между узлами 1 и 7 (рис. 27.22).

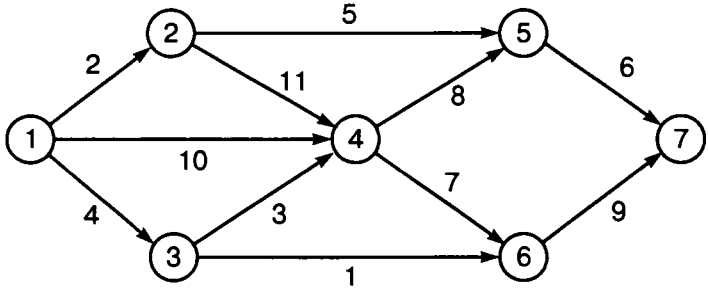


Рис. 27.22

Решение. Найдем минимальные расстояния:

$$U_1 = 0,$$
$$U_2 = U_1 + d_{12} = 0 + 2 = 2,$$
$$U_3 = U_1 + d_{13} = 0 + 4 = 4,$$
$$U_4 = \min\{U_1 + d_{14}; U_2 + d_{24}; U_3 + d_{34}\} = \\ = \min\{0 + 10; 2 + 11; 4 + 3\} = 7,$$
$$U_5 = \min\{U_2 + d_{25}; U_4 + d_{45}\} = \min\{2 + 5; 7 + 8\} = 7,$$
$$U_6 = \min\{U_3 + d_{36}; U_4 + d_{46}\} = \min\{4 + 1; 7 + 7\} = 5,$$
$$U_7 = \min\{U_5 + d_{57}; U_6 + d_{67}\} = \min\{7 + 6; 5 + 9\} = 13.$$

Минимальное расстояние между узлами 1 и 7 равно 13, а соответствующий маршрут: 1–2–5–7.

Задача замены автомобильного парка

Фирма по прокату автомобилей планирует замену автомобильного парка на очередные 5 лет. Автомобиль должен проработать не менее 1 года, прежде чем фирма поставит вопрос о его замене. На рис. 27.23 приведены стоимости замены автомобилей (усл. ед.), зависящие от времени замены и количества лет, в течение которых автомобиль находился в эксплуатации.

Определить план замены автомобилей, обеспечивающий при этом минимальные расходы.

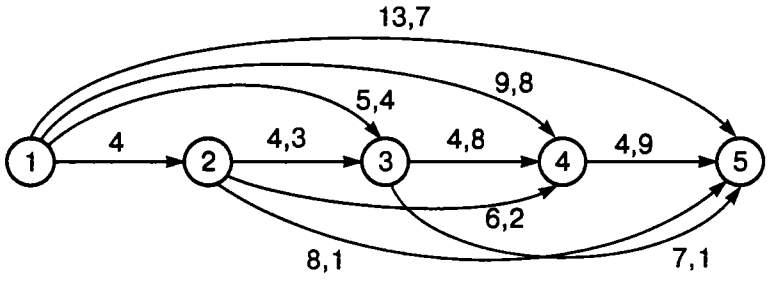


Рис. 27.23

Решение. Найдем минимальные расстояния:

$$U_1 = 0,$$
$$U_2 = U_1 + d_{12} = 0 + 4 = 4,$$
$$U_3 = \min\{U_1 + d_{13}; U_2 + d_{23}\} = \min\{0 + 5,4; 4 + 4,3\} = 5,4,$$
$$U_4 = \min\{U_1 + d_{14}; U_2 + d_{24}; U_3 + d_{34}\} =$$
$$= \min\{0 + 9,8; 4 + 6,2; 5,4 + 4,8\} = 9,8,$$
$$U_5 = \min\{U_1 + d_{15}; U_2 + d_{25}; U_3 + d_{35}; U_4 + d_{45}\} =$$
$$= \min\{0 + 13,7; 4 + 8,1; 5,4 + 7,1; 9,8 + 4,9\} = 12,1.$$

Кратчайший путь 1–2–5 со стоимостью 12,1 усл. ед. Это означает, что каждый автомобиль заменяется через 2 года, а через 5 — списывается.

УПРАЖНЕНИЯ

27.1. Составить сетевой график выполнения работ и рассчитать временные параметры по данным, представленным в табл. 27.5.

27.2. Постройте график работ, определите критический путь и стоимость работ при нормальном режиме, критический путь и минимальную стоимость работ при максимальном режиме. Исходные данные указаны в табл. 27.6.

27.3. Постройте график работ, определите критический путь и стоимость работ при нормальном режиме, критический путь и минимальную стоимость работ при максимальном режиме. Необходимые исходные данные приведены в табл. 27.7.

Таблица 27.5

Содержание работы	Обозначение	Предыдущая работа	Продолжительность, дн.
Составление сметы	a_1		10
Заказ и доставка оборудования	a_2	a_1	15
Распределение кадров	a_3	a_1	5
Установка оборудования	a_4	a_2	20
Подготовка кадров	a_5	a_3	9
Оформление торгового зала	a_6	a_4	8
Доставка товаров	a_7	a_5	7
Заказ и получение ценников	a_8	a_5	5
Заказ и получение формы	a_9	a_5	6
Выкладка товаров	a_{10}	a_6, a_7	3
Заполнение ценников	a_{11}	a_8	4
Генеральная репетиция	a_{12}	a_9, a_{10}, a_{11}	2

27.4. Для улучшения финансового состояния фирме необходимо увеличить спрос на выпускаемый цемент марки М400 и расширить потребительский рынок. Фирма считает целесообразным размещать цемент в специализированной таре. Для переоснащения цеха необходимо установить оборудование по производству специализированной тары. Предполагается выполнить следующее:

1) подготовку и выпуск технического задания на переоборудование цеха (20 дн.);
2) разработку мероприятий по технике безопасности (25 дн.);
3) подбор кадров (10 дн.);
4) заказ и поставку необходимого оборудования (30 дн.);
5) заказ и поставку электрооборудования (40 дн.);
6) установку оборудования (50 дн.);
7) установку электрооборудования (45 дн.);

Таблица 27.6

Операция	Нормальный режим работ		Максимальный режим работ	
	Продолжительность, дн.	Стоимость, ден. ед.	Продолжительность, дн.	Стоимость, ден. ед.
1,2	4	80	2	150
1,3	2	50	1	70
1,4	3	60	2	80
2,4	2	60	1	70
2,6	6	100	3	160
3,4	2	40	1	60
3,5	3	70	2	90
4,6	4	90	2	170
5,6	4	80	2	160

Таблица 27.7

Операция	Нормальный режим работ		Максимальный режим работ	
	Продолжительность, дн.	Стоимость, ден. ед.	Продолжительность, дн.	Стоимость, ден. ед.
1,2	5	110	4	130
1,3	3	70	2	90
1,4	2	50	1	60
2,5	3	60	2	80
2,6	4	80	2	110
3,6	2	60	1	70
4,7	6	110	4	150
5,7	3	70	2	80
6,7	5	100	2	150

8) обучение персонала (15 дн.);

9) испытание и сдачу в эксплуатацию линии (25 дн.).

Ожидается, что производительность вводимой линии по производству тары составит 1 000 мешков в день при односменном режиме работы. Стоимость 1 мешка — 25 р., выручка от реализации тары в смену составит 25 тыс. р., из которых чистая прибыль фирмы равна 50 тыс. р. Деньги на покупку оборудования и переоснащение цеха в размере 5 500 тыс. р. взяты в банке под 30% годовых из расчета 5 000 тыс. р. на оборудование и 500 тыс. р. на его установку.

Затраты на проведение работ и их продолжительность в нормальном и максимальном режимах указаны в табл. 27.8.

Таблица 27.8

Работа	Нормальный режим работы		Максимальный режим работы	
	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. р.	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. р.
1	20	20	18	26
2	25	30	20	37
3	10	5	9	7
4	30	60	23	64
5	40	65	32	78
6	50	90	43	100
7	45	80	41	85
8	15	5	9	10
9	25	50	21	57

Составить график проведения работ, определить критический путь и стоимость работ по переоборудованию цеха при нормальном режиме работ.

Провести "сжатие" работ, определить, через какое время после начала выпуска тары фирма может вернуть кредит банку, и минимальную суммарную стоимость работ.

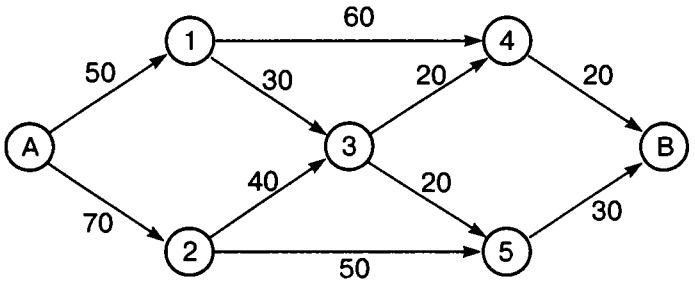


Рис. 27.24

27.5. Автотранспортному предприятию предстоит освоить новый маршрут между городами A и B. На рис. 27.24 представлены различные маршруты следования из A в B, проходящие через несколько других поселков. Расстояния указаны (числами в километрах) около стрелок.

Определить кратчайший маршрут следования автобусов из города A в город B.

27.6. Пожарной службе необходимо определить кратчайший путь от гаража (пункт A) до нефтеперерабатывающего завода (пункт B) по данным в километрах, указанным на рис. 27.25.

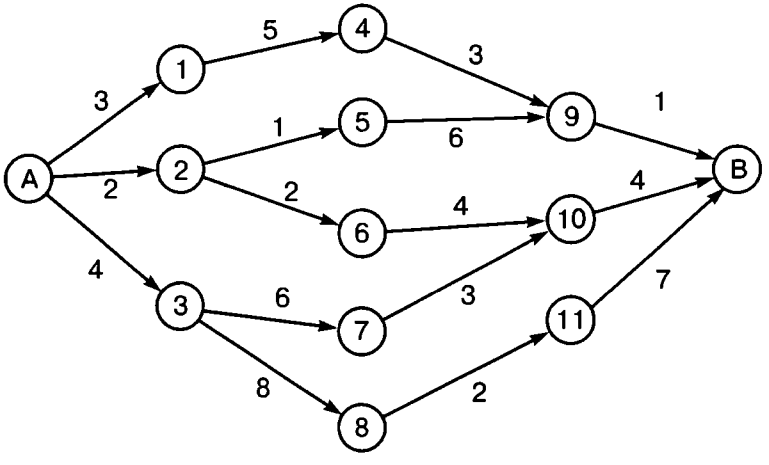


Рис. 27.25

27.7. Строительной фирме необходимо проложить водопроводные трубы к 9 объектам, на которых она ведет строительство. Числа на ребрах указывают длину труб в метрах. Узел 1 — подсоединение к водопроводной трассе (рис. 27.26).

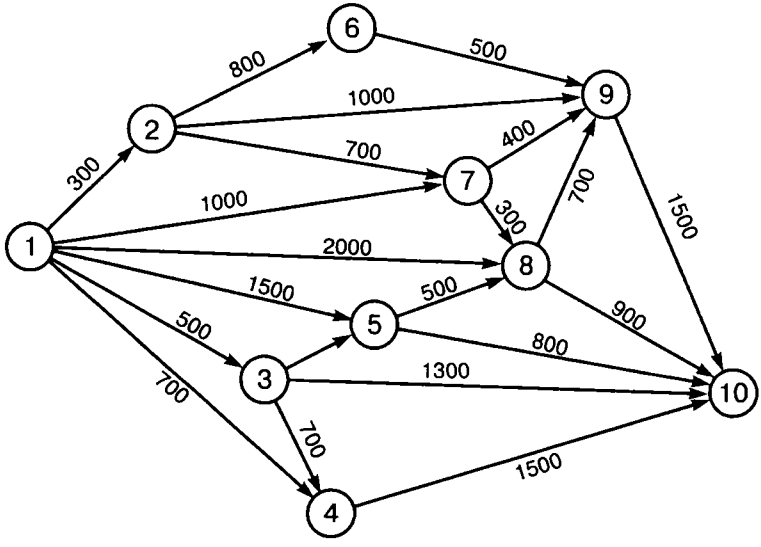


Рис. 27.26

Отсутствие ребра между двумя узлами означает, что соединение соответствующих объектов невозможно.

Найти такое соединение узла 1 с объектами строительства, чтобы суммарная длина трубопроводов была минимальной.

27.8. Фирма по прокату видео- и стереокассет планирует их замену на очередные 5 лет. Партия кассет должна эксплуатироваться не менее одного года, прежде чем ее заменяют. На рис. 27.27 приведены стоимости замены партии кассет (в тыс. р.), зависящие от времени замены и числа лет, в течение которых кассеты находятся в эксплуатации.

Определить план замены кассет, обеспечивающий фирме минимальные расходы.

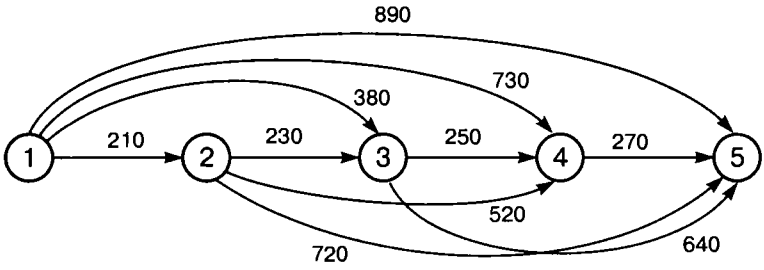


Рис. 27.27

Глава 28
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

В экономике иногда приходится сталкиваться с ситуацией, когда при наличии многих участников эффективность решения одного из них зависит от того, какие решения приняли другие участники. Например, доход предприятия от продажи изделия зависит не только от установленной на него цены, но и от количества купленных покупателем изделий. Или при выборе ассортимента товаров, выпускаемых предприятием, нужно учитывать, какой ассортимент товаров выпускают другие предприятия.

Все ситуации, когда эффективность действия одного из участников зависит от действий других, можно разбить на два типа: интересы участников совпадают, и они могут договориться о совместных действиях; интересы участников не совпадают. В этом случае может оказаться невыгодным сообщать другим участникам свои решения, так как кто-нибудь из них сможет воспользоваться знанием чужих решений и получит больший выигрыш за счет других участников. Ситуации такого типа называются *конфликтными*. Построением математических моделей конфликтных ситуаций и разработкой методов решения возникающих в этих ситуациях задач занимается *теория игр*.

В игре могут сталкиваться интересы двух или нескольких противников, поэтому игры разделяются на парные и множественные. Если во множественной игре интересы игроков сов-

падают, то они могут объединяться, создавая коалиции. Такие игры называются коалиционными.

Задачей теории игр является выработка рекомендаций для игроков, т.е. определение для них оптимальной стратегии. *Стратегией игрока* называется система правил, однозначно определяющих поведение игрока на каждом ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры. *Оптимальной* называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш. Количество стратегий у каждого игрока может быть конечным или бесконечным, в зависимости от этого игры подразделяются на конечные и бесконечные.

Рассмотрим простейшую математическую модель конечной конфликтной ситуации, когда имеются два участника и когда выигрыш одного равен проигрышу другого. Такая модель называется *антагонистической игрой двух лиц с нулевой суммой.*

В игре участвуют первый и второй игроки, каждый из них может записать независимо от другого цифры 1, 2 и 3. Если разность между цифрами, записанными игроками, положительна, то первый игрок выигрывает количество очков, равное разности между цифрами, и, наоборот, если разность отрицательна, то выигрывает второй игрок. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью.

У первого игрока три стратегии (варианта действия): A_1 (записать 1), A_2 (записать 2), A_3 (записать 3); у второго игрока также три стратегии: B_1, B_2, B_3 (табл. 28.1).

Таблица 28.1

	$B_1 = 1$	$B_2 = 2$	$B_3 = 3$
$A_1 = 1$	0	−1	−2
$A_2 = 2$	1	0	−1
$A_3 = 3$	2	1	0

Задача первого игрока — максимизировать свой выигрыш. Задача второго игрока — минимизировать свой проигрыш или минимизировать выигрыш первого игрока.

Игру можно представить в виде матрицы, в которой строки — стратегии первого игрока, столбцы — стратегии второго игрока, а элементы матрицы — выигрыши первого игрока. Такую матрицу называют *платежной*.

Для данного примера платежная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

В общем случае парную игру с нулевой суммой можно записать платежной матрицей

$$(a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Задача каждого из игроков — найти наилучшую стратегию игры, при этом предполагается, что противники одинаково разумны и каждый из них делает все, чтобы получить наибольший доход.

Найдем наилучшую стратегию первого игрока: минимальное число a_{ij} в каждой строке обозначим α_i $(i = \overline{1, m})$,

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Зная α_i, т.е. минимальные выигрыши при различных стратегиях A_i, первый игрок выберет ту стратегию, для которой α_i максимально. Обозначим это максимальное значение через α, тогда

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величина α — гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе первый игрок, — называется нижней ценой игры (*максимином*).

Аналогично для определения наилучшей стратегии второго игрока найдем максимальные значения выигрыша по столбцам и, выбрав из них минимальное значение, получим

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij},$$

где β — *верхняя цена игры* (*минимакс*).

Если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то он гарантирован, что в любом случае проиграет не больше β.

Для матричной игры справедливо неравенство

$$\alpha \leq \beta.$$

Если $\alpha = \beta$, то такая игра называется *игрой с седловой точкой*, а пара оптимальных стратегий $(A_{i\text{опт}}, B_{j\text{опт}})$ — седловой точкой матрицы. В этом случае элемент $a_{ij} = \nu$ называется *ценой игры*, является одновременно минимальным в i-й строке и j-м столбце. Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях.

Найдем решение игры рассмотренного выше примера:

$$\alpha = \max \alpha_i = \max(-2, -1, 0) = 0,$$
$$\alpha = \alpha_3 \text{ — нижняя цена игры;}$$
$$\beta = \min \beta_j = \min(2, 1, 0) = 0,$$
$$\beta = \beta_3 \text{ — верхняя цена игры.}$$

Так как $\alpha = \beta = 0$, матрица игры имеет седловую точку.

Оптимальная стратегия первого игрока — A_3, второго — B_3. Из табл. 28.1 видно, что отклонение первого игрока от оптимальной стратегии уменьшает его выигрыш, а отклонение второго игрока от B_3 увеличивает его проигрыш.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha < \beta$, то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами. Такая сложная стратегия называется *смешанной*.

В игре, матрица которой имеет размерность $m \times n$, стратегии первого игрока задаются наборами вероятностей $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, с которыми игрок применяет свои чистые

стратегии. Эти наборы можно рассматривать как m-мерные векторы, для координат которых

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Аналогично для второго игрока наборы вероятностей определяют n-мерные векторы $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, для координат которых

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Выигрыш второго игрока при использовании смешанных стратегий определяют как математическое ожидание выигрыша, т.е. он равен

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

В основной теореме теории игр утверждается, что каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий.

Применение оптимальной стратегии позволяет получить выигрыш, равный цене игры: $a \leq \nu \leq b$.

Применение первым игроком оптимальной стратегии $x_{i\text{опт}}$ должно обеспечить ему при любых действиях второго игрока выигрыш не меньше цены игры. Поэтому выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{i\text{опт}} \geq \nu.$$

Аналогично второму игроку оптимальная стратегия $y_{j\text{опт}}$ должна обеспечить при любых стратегиях первого игрока проигрыш, не превышающий цену игры, т.е. справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{j\text{опт}} \leq \nu.$$

Если платежная матрица не содержит седловой точки, то задача определения смешанной стратегии тем сложнее, чем

больше размерность матрицы. Поэтому матрицы большой размерности целесообразно упростить, уменьшив их размерность путем вычеркивания дублирующих (одинаковых) и заведомо невыгодных стратегий. Рассмотрим игру, представленную платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 5}.$$

Откуда имеем

$$\alpha = \max(2, 2, 3, 2) = 3,$$
$$\beta = \min(7, 6, 6, 4, 5) = 4,$$
$$\alpha \neq \beta.$$

Все элементы A_2 меньше A_3, т.е. A_2 заведомо невыгодна для первого игрока и A_2 можно исключить. Все элементы A_4 меньше A_3, исключаем A_4.

Для второго игрока: сравнивая B_1 и B_4, исключаем B_1; сравнивая B_2 и B_4, исключаем B_2; сравнивая B_3 и B_4, исключаем B_3. В результате преобразований получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

28.1. Графическое решение игр вида $(2 \times n)$ и $(m \times 2)$

Графический метод применим к играм, в которых хотя бы один игрок имеет только две стратегии.

Рассмотрим игру $(2 \times n)$, см. табл. 28.2.

Предполагаем, что игра не имеет седловой точки.

Обозначим: x_1 — вероятность применения первым игроком 1-й стратегии, x_2 — вероятность применения первым игроком 2-й стратегии, причем $x_2 = 1 - x_1$; y_1 — вероятность применения вторым игроком 1-й стратегии, y_2 — вероятность применения вторым игроком 2-й стратегии и т.д., y_n — вероятность применения вторым игроком n-й стратегии.

Таблица 28.2

		Второй игрок			
		y_1	y_2	$\dots$	y_n
Первый игрок	x_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
	$x_2 = 1 - x_1$	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}

Ожидаемый выигрыш первого игрока при применении вторым 1-й стратегии составит

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1) =$$
$$= a_{11}x_1 + a_{21} - a_{21}x_1 = (a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21}.$$

Аналогично найдем ожидаемые выигрыши первого игрока при применении вторым игроком $2, 3, \dots, n$-й стратегий. Полученные данные поместим в табл. 28.3.

Таблица 28.3

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые выигрыши первого игрока
1	$(a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21}$
2	$(a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22}$
$\dots$	$\dots$
n	$(a_{1n} - a_{2n})x_1 + a_{2n}$

Из таблицы видно, что ожидаемый выигрыш первого игрока линейно зависит от x_1. На оси X_1 построим выражения ожидаемых выигрышей первого игрока.

Первый игрок должен выбирать такие стратегии, чтобы максимизировать свой минимальный ожидаемый выигрыш. Поэтому оптимальная стратегия первого игрока определяется как точка пересечения прямых, максимизирующих его минимальный ожидаемый выигрыш.

Аналогично находим оптимальную стратегию второго игрока. Она определяется как точка пересечения прямых, минимизирующих его максимальные ожидаемые проигрыши.

Пример 1. Рассмотрим представленную выше игру, заданную платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 5}.$$

Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры.

Решение. Обозначим: x_1 — вероятность применения первым игроком 1-й стратегии, x_2, x_3, x_4 — вероятность использования первым игроком 2, 3, 4-й стратегий соответственно, причем $x_1+x_2+x_3+x_4=1$; y_1 — вероятность применения вторым игроком 1-й стратегии, y_2, y_3, y_4, y_5 — вероятность использования вторым игроком 2, 3, 4, 5-й стратегий соответственно, причем $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=1$.

Платежная матрица была упрощена путем вычеркивания дублирующих, заведомо невыгодных стратегий. Поэтому $x_2=x_4=y_1=y_2=y_3=0$ и матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Таблица 28.4

Чистые стратегии второго игрока	**Ожидаемые выигрыши первого игрока**
1	$(4-3)x_1+3=x_1+3$
2	$(2-5)x_1+5=-3x_1+5$

Найдем решение игры (табл. 28.4) графическим методом (рис. 28.1). На оси X_1 разместим точки $x_1=0$ и $x_1=1$, через которые проведем прямые, перпендикулярные оси X_1. Подставляя $x_1=0$ и $x_1=1$ в выражение x_1+3, найдем значения, которые отложим на соответствующих перпендикулярных прямых. Соединив эти точки, получим прямую.

Аналогично рассмотрим выражение $-3x_1+5$.

Оптимальная стратегия первого игрока определится из равенства выражений $x_1 + 3$ и $-3x_1 + 5$:

$$x_1 + 3 = -3x_1 + 5, \quad x_1 = 1/2, \quad x_2 = 1 - x_1 = 1/2.$$

Цена игры $\nu = x_1 + 3 = 1/2 + 3 = 7/2$.

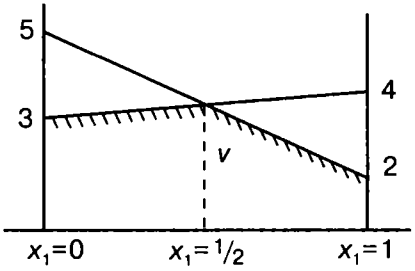


Рис. 28.1

Оптимальная стратегия первого игрока:

$$\bar{x}_{\text{опт}} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right), \text{ при этом цена игры } \nu = \frac{7}{2}.$$

Найдем оптимальную стратегию для второго игрока (табл. 28.5).

Таблица 28.5

Чистые стратегии первого игрока	Ожидаемые проигрыши второго игрока
1	$(4-2)y_4 + 2 = 2y_4 + 2$
2	$(3-5)y_4 + 5 = -2y_4 + 5$

Имеем

$$2y_4 + 2 = -2y_4 + 5, \quad y_4 = \frac{3}{4},$$

$$y_5 = 1 - y_4 = \frac{1}{4},$$

$$\nu = 2y_4 + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}.$$

Оптимальная стратегия второго игрока (рис. 28.2):

$$\bar{y}_{\text{опт}} = \left(0, 0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \text{ при этом цена игры } \nu = \frac{7}{2}.$$

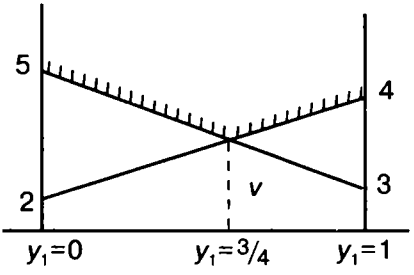


Рис. 28.2

Пример 2. Найдем решение игры вида $(2 \times n)$, заданной платежной матрицей (табл. 28.6)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 4}.$$

Таблица 28.6

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые выигрыши первого игрока
1	$-2x_1 + 4$
2	$-x_1 + 3$
3	$x_1 + 2$
4	$-7x_1 + 6$

Решение. Находим

$$\alpha = \max(-1, 2) = 2, \quad \beta = \min(4, 3, 3, 6) = 3, \quad 2 \le \nu \le 3.$$

Тогда

$$-x_1 + 3 = x_1 + 2, \quad x_1 = 1/2,$$

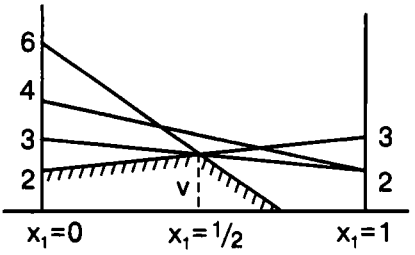


Рис. 28.3

$$x_2 = 1 - x_1 = 1/2,$$
$$\nu = -x_1 + 3 = -1/2 + 3 = 5/2.$$

Оптимальное решение первого игрока:

$\bar{x}_{\text{опт}} = (1/2, 1/2)$, при этом цена игры составляет $\nu = 5/2$.

Найдем оптимальное решение второго игрока (табл. 28.7).

Из рис. 28.3 следует, что оптимальная стратегия первого игрока определяется из равенства выражений $-x_1 + 3$ и $x_1 + 2$, соответствующих 2-й и 3-й чистым стратегиям второго игрока (см. табл. 28.5), поэтому $y_1 = y_4 = 0$, а $y_3 = 1 - y_2$.

Таблица 28.7

Чистые стратегии первого игрока	Ожидаемые проигрыши второго игрока
1	$-y_2 + 3$
2	$y_2 + 2$

Имеем

$$-y_2 + 3 = y_2 + 2, \quad y_2 = 1/2,$$
$$y_3 = 1 - 1/2 = 1/2,$$

откуда

$$\nu = y_2 + 2 = 1/2 + 2 = 5/2.$$

Оптимальное решение второго игрока (рис. 28.4):

$\bar{y}_{\text{опт}} = (0, 1/2, 1/2, 0)$, при этом цена игры $\nu = 5/2$.

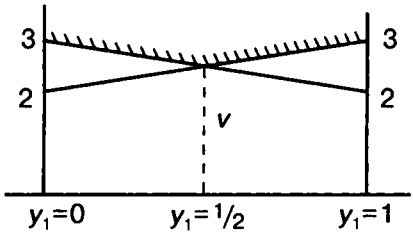


Рис. 28.4

Ответ.

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (1/2, 1/2), \quad \bar{y}_{\text{опт}} = (0, 1/2, 1/2, 0), \quad \nu = 5/2.$$

Пример 3. Найдем решение игры вида $(m \times 2)$, заданной платежной матрицей (табл. 28.8)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}_{4\times 2}.$$

Таблица 28.8

Чистые стратегии первого игрока	Ожидаемые проигрыши второго игрока
1	$-2y_1 + 4$
2	$-y_1 + 3$
3	$y_1 + 2$
4	$-8y_1 + 6$

Решение. Находим $\alpha = \max(2, 2, 2, -2) = 2$, $\beta = \min(3, 6) = 3$, $2 \le \nu \le 3$. Пусть y_1 и y_2 (причем $y_2 = 1 - y_1$) — смешанные стратегии второго игрока; x_1, x_2, x_3, x_4 — смешанные стратегии первого игрока.

Находим

$$-2y_1 + 4 = y_1 + 2, \quad y_1 = 2/3,$$

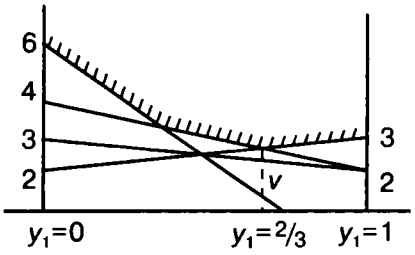


Рис. 28.5

$$y_2 = 1 - y_1 = 1/3,$$
$$\nu = y_1 + 2 = 8/3.$$

Оптимальное решение второго игрока (рис. 28.5):

$$\bar{y}_{\text{опт}} = (2/3, 1/3), \text{ при этом цена игры } \nu = 8/3.$$

Прямые, пересекающиеся в минимаксной точке, соответствуют 1-й и 3-й чистым стратегиям первого игрока. Это означает, что $x_2 = x_4 = 0$. Следовательно, $x_1 = 1 - x_3$. Найдем оптимальную стратегию 1-го игрока (табл. 28.9, рис. 28.6).

Таблица 28.9

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые выигрыши первого игрока
1	$-x_1 + 3$
2	$2x_1 + 2$

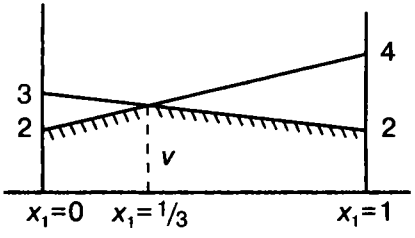


Рис. 28.6

Имеем

$$-x_1 + 3 = 2x_1 + 2, \quad x_1 = 1/3,$$
$$x_2 = 1 - x_1 = 2/3,$$
$$\nu = -x_1 + 3 = 8/3.$$

Оптимальное решение первого игрока:

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (1/3, 0, 2/3, 0), \text{ при этом цена игры } \nu = 8/3.$$

Ответ.

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (1/3, 0, 2/3, 0), \quad \bar{y}_{\text{опт}} = (2/3, 1/3), \quad \nu = 8/3.$$

28.2. Решение игр $(a_{ij})_{m\times n}$ с помощью линейного программирования

Теория игр находится в тесной связи с линейным программированием, так как каждая конечная игра двух лиц с нулевой суммой может быть представлена как задача линейного программирования и решена симплексным методом и, наоборот, задача линейного программирования может быть представлена как игра.

Для первого игрока математическая модель задачи записывается в виде

$$L(\bar{x}) = \nu \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq \nu, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1, \end{cases}$$
$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Математическую модель можно упростить, разделив все $(n+1)$ ограничений на ν. Это возможно при $v \neq 0$. При $\nu = 0$ рекомендуется прибавить любое положительное число ко всем элементам платежной матрицы, что гарантирует положительность значения *модифицированной игры*. Действительное

значение игры получается вычитанием из модифицированного значения этого положительного числа. Если $\nu < 0$, то надо сменить знаки неравенств. Полагая $\nu > 0$, систему ограничений можно записать так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1/\nu + a_{21}x_2/\nu + \cdots + a_{m1}x_m/\nu \geq 1, \\ a_{12}x_1/\nu + a_{22}x_2/\nu + \cdots + a_{m2}x_m/\nu \geq 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1/\nu + a_{2n}x_2/\nu + \cdots + a_{mn}x_m/\nu \geq 1, \\ \quad x_1/\nu + x_2/\nu + \cdots + x_m/\nu = 1/\nu. \end{cases}$$

Положим $X_i = x_i/\nu$. Так как $\nu \to \max$, то $1/\nu \to \min$. Получим задачу линейного программирования вида

$$L(\bar{X}) = X_1 + X_2 + \cdots + X_m \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{m1}X_m \geq 1, \\ a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{m2}X_m \geq 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \cdots + a_{mn}X_m \geq 1, \end{cases}$$

$$X_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Для второго игрока математическая модель записывается в виде

$$S(\bar{Y}) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \cdots + a_{1n}Y_n \leq 1, \\ a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + \cdots + a_{2n}Y_n \leq 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}Y_1 + a_{m2}Y_2 + \cdots + a_{mn}Y_n \leq 1, \end{cases}$$

$$Y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n},$$

где $S(\bar{Y}) = 1/\nu$, $Y_j = y_j/\nu$.

Задача второго игрока является двойственной по отношению к задаче первого игрока. Можно найти решение одного из игроков, а затем по теоремам двойственности — решение другого.

28.3. Применение матричных игр в маркетинговых исследованиях

Торговая фирма разработала несколько вариантов плана продажи товаров на предстоящей ярмарке с учетом меняющейся конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели дохода представлены в табл. 28.10.

Определить оптимальный план продажи товаров.

Таблица 28.10

План продажи	Величина дохода, ден. ед.		
	K_1	K_2	K_3
$П_1$	8	4	2
$П_2$	2	8	4
$П_3$	1	2	8

Решение. Обозначим: вероятность применения торговой фирмой стратегии $П_1$ — x_1, стратегии $П_2$ — x_2, $П_3$ — x_3; вероятность использования стратегии K_1 — y_1, стратегии K_2 — y_2, K_3 — y_3.

Для первого игрока (торговой фирмы) математическая модель задачи имеет вид

$$L(\bar{X}) = X_1 + X_2 + X_3 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{gathered} 8X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 1, \\ 4X_1 + 8X_2 + 2X_3 \geq 1, \\ 2X_1 + 4X_2 + 8X_3 \geq 1, \\ X_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \end{gathered}$$

где $x_i = X_i\nu$.

Для второго игрока (конъюнктуры рынка и спроса покупателей) математическая модель задачи имеет вид

$$S(\bar{Y}) = Y_1 + Y_2 + Y_3 \to \max$$

при ограничениях:

$$8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \le 1,$$
$$2Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 \le 1,$$
$$Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 \le 1,$$
$$Y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Найдем оптимальное решение задачи для второго игрока симплексным методом. При этом последняя таблица имеет вид табл. 28.11.

Таблица 28.11

b_j	БП	1	1	1	0	0	0	c_i
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	
1	Y_1	1	0	0	1/7	−1/14	0	1/14
1	Y_2	0	1	0	−3/98	31/196	−1/14	11/196
1	Y_3	0	0	1	−1/98	−3/98	1/7	5/49
	Δ_i	0	0	0	5/49	11/196	1/14	45/196

Из таблицы следует, что $\bar{Y}_{\text{опт}} = (1/14, 11/196, 5/49)$, $S(\bar{Y})_{\max} = 45/196$.

Цена игры $\nu = 1/S(Y) = 196/45$.

Так как $y_i = Y_i\nu$, то $y_1 = 14/45$, $y_2 = 11/45$, $y_3 = 20/45$.

Оптимальная стратегия второго игрока:

$$\bar{y}_{\text{опт}} = (14/45, 11/45, 20/45).$$

Стратегии первого игрока найдем из последней симплексной таблицы, используя метод соответствия переменных исходной и двойственной задач. Получим

$$\bar{x}_{\text{опт}} = (20/45, 11/45, 14/45).$$

Таким образом, торговая фирма на ярмарке должна придерживаться стратегии $\bar{x}_{\text{опт}} = (20/45, 11/45, 14/45)$, при этом она получит доход не менее $\nu = 196/45$ ден. ед.

28.4. Сведение матричной игры к модели линейного программирования

В рассмотренной выше задаче игра задавалась платежной матрицей, которую сводили к модели линейного программирования. И, наоборот, задача линейного программирования может быть сведена к матричной игре.

Если задача линейного программирования имеет вид

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,$$

$$x_j \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n},$$

то матричная игра определяется платежной матрицей размера $(m+n+1)$ вида

$$\begin{pmatrix} 0 & A & -B \\ -A^t & 0 & C^t \\ B^t & -C & 0 \end{pmatrix},$$

где A — матрица коэффициентов при неизвестных системы ограничений задачи линейного программирования; B — матрица свободных членов; C — матрица коэффициентов при неизвестных целевой функции; A^t, B^t, C^t — транспонированные матрицы A, B, C.

Если задача линейного программирования имеет вид

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,$$

$$x_j \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n},$$

то матричная игра определяется платежной матрицей размера $(m+n+1)$ вида

$$\begin{pmatrix} 0 & A^t & -B^t \\ -A & 0 & C \\ B & -C^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Построить матричную игру, заданную задачей линейного программирования

$$L(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}.$$

Решение. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Транспонированные матрицы:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^t = \begin{pmatrix} 10 & 12 \end{pmatrix}, \quad C^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$
$$m + n + 1 = 2 + 2 + 1 = 5.$$

О т в е т. Игру, определяемую данной задачей линейного программирования, можно записать матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -12 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 10 & 12 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}_{5\times 5}.$$

28.5. Игры с "природой"

В рассмотренных выше матричных играх предполагалось, что в них принимают участие два игрока, интересы которых противоположны. Поэтому действия каждого игрока направлены на увеличение выигрыша (уменьшение проигрыша). Однако в некоторых задачах, приводящихся к игровым, имеется неопределенность, вызванная отсутствием информации об условиях, в которых осуществляется действие (погода, покупательский спрос и т.д.). Эти условия зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективной действительности. Такие игры называются играми с природой. Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, покупательский спрос) действует случайно.

Условия игры задаются матрицей

$$(a_{ij})_{m\times n}.$$

Имеется ряд критериев, которые используются при выборе оптимальной стратегии. Рассмотрим некоторые из них.

1. Критерий Вальде. Рекомендуется применять максиминную стратегию. Она достигается из условия

$$\max \min a_{ij}$$

и совпадает с нижней ценой игры. Критерий является пессимистическим, считается, что природа будет действовать наихудшим для человека образом.

2. Критерий максимума. Он выбирается из условия

$$\max \max a_{ij}.$$

Критерий является оптимистическим, считается, что природа будет наиболее благоприятна для человека.

3. Критерий Гурвица. Критерий рекомендует стратегию, определяемую по формуле

$$\max\{\alpha \min a_{ij} + (1-\alpha) \max a_{ij}\},$$

где α — степень оптимизма — изменяется в диапазоне $[0,1]$.

Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего для человека поведения природы. При $\alpha = 1$ критерий превращается в критерий Вальде, при $\alpha = 0$ — в критерий максимума. На α оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем хуже последствия ошибочных решений, больше желания застраховаться, тем α ближе к единице.

4. Критерий Сэвиджа. Суть критерия состоит в выборе такой стратегии, чтобы не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. Находится матрица рисков, элементы которой показывают, какой убыток понесет человек (фирма), если для каждого состояния природы он не выберет наилучшей стратегии.

Элемент матрицы рисков (r_{ij}) находится по формуле

$$r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij},$$

где $\max a_{ij}$ — максимальный элемент в столбце исходной матрицы.

Оптимальная стратегия находится из выражения

$$\min\{\max(\max a_{ij} - a_{ij})\}.$$

28.6. Определение производственной программы предприятия в условиях риска и неопределенности с использованием матричных игр

Фирма "Фармацевт" — производитель медикаментов и биомедицинских изделий в регионе. Известно, что пик спроса на некоторые лекарственные препараты приходится на летний период (препараты сердечно-сосудистой группы, анальгетики), на другие — на осенний и весенний периоды (антиинфекционные, противокашлевые).

Затраты на 1 усл. ед. продукции за сентябрь–октябрь составили: по первой группе (препараты сердечно-сосудистые и анальгетики) — 20 р.; по второй группе (антиинфекционные, противокашлевые препараты) — 15 р.

По данным наблюдений за несколько последних лет службой маркетинга фирмы установлено, что она может реализовать в течение рассматриваемых двух месяцев в условиях теплой погоды 3050 усл. ед. продукции первой группы и 1100 усл. ед. продукции второй группы; в условиях холодной погоды — 1525 усл. ед. продукции первой группы и 3690 усл. ед. второй группы.

В связи с возможными изменениями погоды ставится задача — определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую максимальный доход от реализации при цене продажи 40 р. за 1 усл. ед. продукции первой группы и 30 р. — второй группы.

Решение. Фирма располагает двумя стратегиями:

A_1 — в этом году будет теплая погода;

A_2 — погода будет холодная.

Если фирма примет стратегию A_1 и в действительности будет теплая погода (стратегия природы B_1), то выпущенная продукция (3050 усл. ед. препаратов первой группы и 1100 усл. ед. второй группы) будет полностью реализована и доход составит

$$3050 \cdot (40 - 20) + 1100 \cdot (30 - 15) = 77\,500 \text{ р.}$$

В условиях прохладной погоды (стратегия природы B_2) препараты второй группы будут проданы полностью, а первой группы только в количестве 1525 усл. ед. и часть препаратов останется нереализованной. Доход составит

$$1525 \cdot (40 - 20) + 1100 \cdot (30 - 15) - \\ -20 \cdot (3050 - 1525) = 16\,500 \text{ р.}$$

Аналогично, если фирма примет стратегию A_2 и в действительности будет холодная погода, то доход составит

$$1525 \cdot (40 - 20) + 3690 \cdot (30 - 15) = 85\,850 \text{ р.}$$

При теплой погоде доход составит

$$1525 \cdot (40 - 20) + 1100 \cdot (30 - 15) - (3690 - 1100) \cdot 15 = 8150 \text{ р.}$$

Рассматривая фирму и погоду в качестве двух игроков, получим платежную матрицу

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 77\,500 & 16\,500 \\ 8\,150 & 85\,850 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$\alpha = \max(16\,500, 8\,150) = 16\,500 \text{ р.},$$

$$\beta = \min(77\,500, 85\,850) = 77\,500 \text{ р.}$$

Цена игры лежит в диапазоне 16 500 р. $\leq \nu \leq$ 77 500 р.

Из платежной матрицы видно, что при всех условиях доход фирмы будет не меньше 16 500 р., но если погодные условия совпадут с выбранной стратегией, то доход фирмы может составить 77 500 р.

Найдем решение игры.

Обозначим вероятность применения фирмой стратегии A_1 через x_1, стратегии A_2 — через x_2, причем $x_1 = 1 - x_2$. Решая игру графическим методом, получим $\bar{x}_{\text{опт}} = (0{,}56; 0{,}44)$, при этом цена игры $\nu = 46\,986$ р.

Оптимальный план производства лекарственных препаратов составит

$$0,56 \cdot (3050; 1100) + 0,44 \cdot (1525; 3690) = (2379; 2239{,}6).$$

Таким образом, фирме целесообразно производить в течение сентября и октября 2379 усл. ед. препаратов первой группы и 2239,6 усл. ед. препаратов второй группы, тогда при любой погоде она получит доход не менее 46 986 р.

В условиях неопределенности, если не представляется возможным фирме использовать смешанную стратегию (договоры с другими организациями), для определения оптимальной стратегии фирмы используем критерии природы.

1. Критерий Вальде:

$$\max(\min a_{ij}) = \max(16\,500, 8150) = 16\,500 \text{ р.},$$

фирме целесообразно использовать стратегию A_1.

2. Критерий максимума:

$$\max(\max a_{ij}) = \max(77\,500, 85\,850) = 85\,850 \text{ р.},$$

целесообразно использовать стратегию A_2.

3. Критерий Гурвица: для определенности примем $\alpha = 0{,}4$, тогда для стратегии фирмы A_1

$$\alpha \min a_{ij} + (1-\alpha) \max a_{ij} =$$
$$= 0,4 \cdot 16\,500 + (1-0,4) \cdot 77\,500 = 53\,100 \text{ р.};$$

для стратегии A_2

$$\alpha \min a_{ij} + (1-\alpha) \max a_{ij} =$$
$$= 0,4 \cdot 8150 + (1-0,4) \cdot 85\,850 = 54\,770 \text{ р.},$$
$$\max(53\,100, 54\,770) = 54\,770 \text{ р.},$$

фирме целесообразно использовать стратегию A_2.

4. Критерий Сэвиджа. Максимальный элемент в первом столбце — 77 500, во втором столбце — 85 850.

Элементы матрицы рисков находятся из выражения

$$r_{ij} = \max(a_{ij} - a_{ij}),$$

откуда $r_{11} = 77\,500 - 77\,500 = 0$, $r_{12} = 85\,850 - 16\,500 = 69\,350$, $r_{21} = 77\,500 - 8150 = 69\,350$, $r_{22} = 85\,850 - 85\,850 = 0$.

Матрица рисков имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 69\,350 \\ 69\,350 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\min\{\max(\max a_{ij} - a_{ij})\} = \min(69\,350, 69\,350) = 69\,350 \text{ р.},$$

целесообразно использовать стратегию A_1 или A_2.

Следовательно, фирме целесообразно применять стратегию A_1 или A_2.

Отметим, что каждый из рассмотренных критериев не может быть признан вполне удовлетворительным для окончательного выбора решений, однако их совместный анализ позволяет более наглядно представить последствия принятия тех или иных управленческих решений.

При известном распределении вероятностей различных состояний природы критерием принятия решения является максимум математического ожидания выигрыша.

Пусть известно для рассматриваемой задачи, что вероятности теплой и холодной погоды равны и составляют 0,5, тогда оптимальная стратегия фирмы определяется так:

$$\max\{(0,5 \cdot 77\,500 + 0,5 \cdot 16\,500); (0,5 \cdot 8150 + 0,5 \cdot 85\,850)\} = \\ = (47\,000; 47\,000) = 47\,000 \text{ р.}$$

Фирме целесообразно использовать стратегию A_1 или A_2.

28.7. "Дерево" решений

Примеры, которые мы рассматривали до сих пор, включали получение единого решения. Однако на практике результат одного решения приводит к необходимости принятия следующего решения и т.д. Эту последовательность принятия решений нельзя выразить таблицей доходов, поэтому приходится использовать другой алгоритм принятия управленческих решений.

Графически подобные процессы могут быть представлены с помощью "дерева" решений. Такое представление облегчает описание многоэтапного процесса принятия управленческого решения в целом.

Рассмотрим "дерево" решений, которое применяют тогда, когда нужно принять несколько взаимосвязанных решений в условиях неопределенности в случае принятия решения, зависящего от исхода предыдущего или исходов испытаний.

Составляя дерево решений, рисуют "ствол" и "ветви", отображающие структуру проблемы. Располагают "дерево" решений слева направо. "Ветви" обозначают возможные альтернативные решения, которые могут быть приняты, и возможные исходы, возникающие в результате этих решений.

Квадратные "узлы" на дереве решений обозначают места, в которых принимаются решения, круглые "узлы" — места исходов. Так как не представляется возможным влиять на появление исходов, то в круглых узлах вычисляют вероятности их

появления. Когда все решения и их исходы указаны на "дереве", оценивается каждый из вариантов и проставляются денежные доходы. Все расходы, вызванные решениями, проставляются на соответствующих "ветвях".

Рассмотрим задачу с применением "дерева" решений.

Выбор оптимальной стратегии развития предприятия в условиях трансформации рынка

Фирма может принять решение о строительстве среднего или малого предприятия. Малое предприятие впоследствии можно расширить. Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую предполагается выпускать на сооружаемом предприятии. Строительство среднего предприятия экономически оправданно при высоком спросе. С другой стороны, можно построить малое предприятие и через два года его расширить.

Фирма рассматривает данную задачу на десятилетний период. Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого и низкого уровней спроса равны 0,7 и 0,3 соответственно. Строительство среднего предприятия обойдется в 4 млн р., малого — в 1 млн р. Затраты на расширение через два года малого предприятия оцениваются в 3,5 млн р.

Ожидаемые ежегодные доходы для каждой из возможных альтернатив:

- среднее предприятие при высоком (низком) спросе дает 0,9 (0,2) млн р.;
- малое предприятие при низком спросе дает 0,1 млн р.;
- малое предприятие при высоком спросе дает 0,2 млн р. в течение 10 лет;
- расширенное предприятие при высоком (низком) спросе дает 0,8 (0,1) млн р.;
- малое предприятие без расширения при высоком спросе в течение первых двух лет и последующем низком спросе дает 0,1 млн р. в год за остальные восемь лет.

Определить оптимальную стратегию фирмы в строительстве предприятий.

Решение. Данная задача является многоэтапной, так как если фирма решит строить малое предприятие, то через два года она может принять решение о его расширении. В этом случае процесс принятия решения состоит из двух этапов: решение в настоящий момент времени о размере предприятия и решение о необходимости его расширения, принимаемое через два года.

На рис. 28.7 задача представлена в виде "дерева" решений. Предполагается, что спрос может оказаться высоким и низким. Дерево имеет два типа вершин: "решающие" вершины, обозначенные квадратными узлами, и "случайные" вершины, обозначенные круглыми узлами.

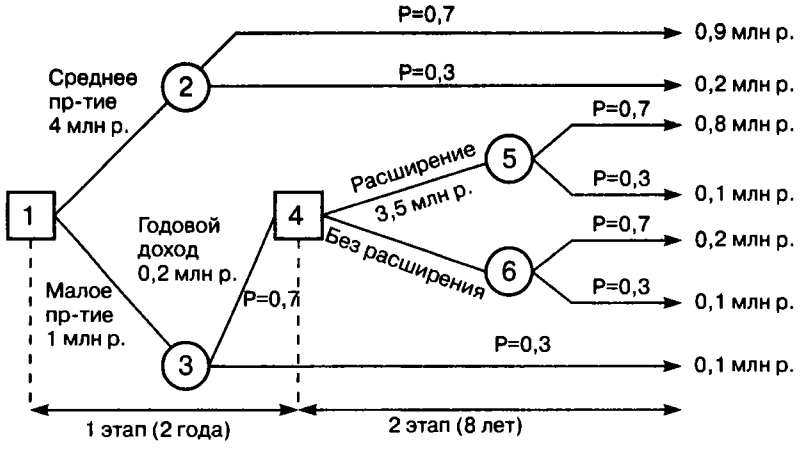


Рис. 28.7

Начиная с вершины 1, являющейся "решающей", необходимо принять решение относительно размера предприятия. Вершины 2 и 3 являются "случайными". Фирма будет рассматривать возможность расширения малого предприятия только в том случае, если спрос по истечении первых двух лет установится на высоком уровне. Поэтому в вершине 4 принимается решение о расширении или нерасширении предприятия.

Вершины 5 и 6 будут "случайными".

Произведем расчеты для каждой из альтернатив. Вычисления начнем со 2-го этапа. Для последних восьми лет альтерна-

тивы, относящиеся к вершине 4, оцениваются так:

$$ДР = (0,8 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,3) \cdot 8 - 3,5 = 1,22 \text{ млн р.},$$
$$ДБР = (0,2 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,3) \cdot 8 = 1,36 \text{ млн р.},$$

где *ДР* — доход с расширением, *ДБР* — доход без расширения предприятия.

Таким образом, в вершине 4 выгоднее не проводить расширение, при этом доход составит 1,36 млн р.

Теперь для дальнейших расчетов оставим одну "ветвь", выходящую из вершины 4, которой соответствует доход 1,36 млн р. за остальные восемь лет. Перейдем к вычислениям 1-го этапа. Для вершины 1

$$ДС = (0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}3) \cdot 10 - 4{,}0 = 2{,}9 \text{ млн р.},$$
$$ДМ = 1{,}36 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 10 - 1{,}0 = 0{,}94 \text{ млн р.},$$

где *ДС* — доход среднего предприятия, *ДМ* — доход малого предприятия.

Сравнивая получаемые в вершине 1 доходы среднего и малого предприятий, видим, что более предпочтительным является вариант строительства среднего предприятия.

Таким образом, фирме целесообразно построить среднее предприятие.

Принятие решения о замене оборудования в условиях неопределенности и риска

Фирма может принять решение о замене старого оборудования на новое того же вида или его ремонте. Отремонтированное оборудование впоследствии можно частично заменить на новое, более современное, или отремонтировать его заново.

Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую производят на этом оборудовании.

Полная замена оборудования экономически оправданна при высоком уровне спроса. С другой стороны, можно отремонтировать старое оборудование и через один год, например, заменить его на новое, более совершенное, или заново его отремонтировать.

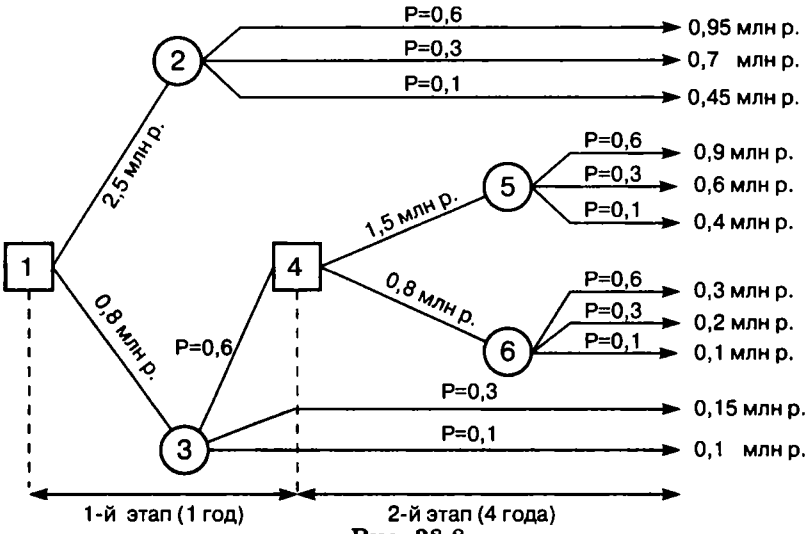


Рис. 28.8

В данной задаче процесс принятия решения состоит из двух этапов: решение в настоящий момент времени о замене или ремонте оборудования и решение, принимаемое через один год, относительно частичной его замены и ремонта.

Пример 5. Рассмотрим конкретную задачу о замене оборудования фирмы, представленную в виде "дерева" решений.

Предполагается, что спрос может оказаться высоким, средним и низким.

Дерево имеет два типа вершин: "решающие" и "случайные".

Начиная с "решающей" вершины 1 необходимо принять решение о полной замене оборудования или его ремонте.

Вершины 2 и 3 являются "случайными". Фирма будет рассматривать возможность установления более совершенного оборудования или повторного ремонта старого в том случае, если спрос по истечении одного года установится на высоком уровне. Поэтому в вершине 4 принимается решение о частичной замене старого оборудования более совершенным или ремонте старого. Вершины 5 и 6 "случайные".

Предположим, что фирма рассматривает эту задачу на пятилетний период. Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого, среднего и низкого уровней спроса со-

ставляют 0,6, 0,3 и 0,1 соответственно. Замена новым оборудованием того же вида, что и старое, обойдется в 2,5 млн р., а ремонт старого — в 0,8 млн р.

Затраты на частичную замену оборудования на более совершенное, чем старое, оцениваются в 1,5 млн р., а повторный ремонт старого — в 0,8 млн р.

Ежегодные доходы для каждой стратегии фирмы следующие.

1. Замена старого оборудования на новое того же вида при высоком, среднем и низком уровнях спроса дает 0,95; 0,7 и 0,45 млн р. соответственно.

2. Ремонт старого оборудования при высоком, среднем и низком уровнях спроса оценивается в 0,3; 0,15 и 0,1 млн р. соответственно.

3. Частичная замена оборудования на более совершенное при высоком, среднем и низком уровнях спроса составит 0,9; 0,6 и 0,4 млн р. соответственно.

4. Повторный ремонт старого оборудования при высоком, среднем и низком уровнях спроса предполагает 0,3; 0,2 и 0,1 млн р. соответственно.

Определить оптимальную стратегию фирмы в замене оборудования.

Решение. Оценим результаты каждой стратегии и определим, какие решения следует принимать в "решающих" вершинах 1 и 4.

Вычисления начнем с этапа 2. Для последних 4 лет альтернативы, относящиеся к вершине 4, оцениваются так:

$$ДЧЗ = (0{,}9 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}1) \cdot 4 - 1{,}5 = 1{,}54 \text{ млн р.},$$
$$ДДР = (0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}1) \cdot 4 - 0{,}8 = 0{,}2 \text{ млн р.},$$

где $ДЧЗ$ — доход от частичной замены оборудования на более совершенное, $ДДР$ — доход от замены оборудования, прошедшего дважды ремонт. Так как $ДЧЗ > ДДР$, то в вершине 4 выгоднее произвести частичную замену оборудования на более совершенное, при этом доход составит 1,54 млн р.

Для дальнейших расчетов в вершине 4 можно оставить одну ветвь, которой соответствует доход в 1,54 млн р. за 4 года.

Вычислим доходы на 1-м этапе для "решающей" вершины 1:

$$ДЗН = (0{,}95 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}45 \cdot 0{,}1) \cdot 5 - 2{,}5 = 1{,}625 \text{ млн р.},$$
$$ДЗО = 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 1 + 0{,}15 \cdot 0{,}3 \cdot 5 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 5 + 1{,}54 - 0{,}8 =$$
$$= 1{,}195 \text{ млн р.},$$

где *ДЗН* — доход от замены старого оборудования на новое того же вида, *ДЗО* — доход от отремонтированного оборудования и дальнейшей замены на более совершенное.

Так как *ДЗН* > *ДЗО*, то оптимальным решением в вершине 1 является полная замена старого оборудования на новое того же вида.

О т в е т. Оптимальной стратегией фирмы в замене оборудования является полная замена старого оборудования на новое того же вида, при этом доход составит 1,625 млн р.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти оптимальные стратегии и цену игры.

28.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. **28.2.** $A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$. **28.3.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

28.4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. **28.5.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

28.6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 1 & 5 & 8 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 20 \end{pmatrix}$. **28.7.** $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Построить игру, заданную задачей линейного программирования.

28.8. $L(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Решить задачу с использованием матричных игр.

28.9. Розничное торговое предприятие разработало несколько вариантов плана продаж товаров на предстоящей ярмарке с учетом конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели прибыли представлены в табл. 28.12.

Таблица 28.12

План продажи	Величина прибыли в зависимости от спроса, млн р.		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	2	1	3
$П_2$	1	2	3
$П_3$	2	3	1

Определить: **а)** оптимальный план продажи товаров и цену игры;

б) какой стратегии следует придерживаться торговому предприятию, если наиболее вероятной является ситуация: C_1 — 30%, C_2 — 30%, C_3 — 40%?

28.10. Предприятие планирует выпуск трех партий новых видов товаров широкого потребления в условиях неясной рыночной конъюнктуры. Известны отдельные возможные состояния P_1, P_2, P_3, P_4, а также возможные объемы выпуска изделий по каждому варианту и их условные вероятности, которые представлены в табл. 28.13.

Определить предпочтительный план выпуска товаров широкого потребления.

28.11. Фирма производит пользующиеся спросом детские платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты фирмы в течение августа–сентября на единицу продукции составили: платья — 7 ден. ед., костюмы — 28 ден. ед. Цена реализации составляет 15 и 50 ден. ед. соответственно.

Таблица 28.13

Изделия	Объем выпуска изделий при различных состояниях рыночной конъюнктуры			
	P_1	P_2	P_3	P_4
$И_1$	0,4 2,2	0,1 3,8	0,2 2,8	0,3 3,2
$И_2$	0,3 2,6	0,2 2,4	0,1 3,1	0,4 3,3
$И_3$	0,2 3,0	0,3 2,0	0,2 1,8	0,3 2,5

По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды 1950 платьев и 610 костюмов, а при прохладной погоде — 630 платьев и 1050 костюмов.

В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции. Задачу решить графическим методом и с использованием критериев "природы", приняв степень оптимизма $\alpha = 0{,}5$.

Решить задачи с использованием "дерева" решений.

28.12. Фирма может принять решение о строительстве среднего или малого предприятия. Малое предприятие впоследствии можно расширить. Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую предполагается выпускать на сооружаемом предприятии. Строительство среднего предприятия экономически оправданно при высоком спросе. С другой стороны, можно построить малое предприятие и через два года его расширить.

Фирма рассматривает данную задачу на десятилетний период. Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого и низкого уровней спроса равны 0,75 и 0,25 соответственно. Строительство среднего предприятия обойдется в 5 млн р., малого — в 1 млн р. Затраты на расширение через

два года малого предприятия оцениваются в 4,2 млн р.

Ожидаемые ежегодные доходы для каждой из возможных альтернатив:

— среднее предприятие при высоком (низком) спросе дает 1 (0,3) млн р.;
— малое предприятие при низком спросе — 0,2 млн р.;
— малое предприятие при высоком спросе — 0,25 млн р. в течение 10 лет;
— расширенное предприятие при высоком (низком) спросе — 0,9 (0,2) млн р.;
— малое предприятие без расширения при высоком спросе в течение первых двух лет и последующем низком спросе — 0,2 млн р. в год за остальные восемь лет.

Определить оптимальную стратегию фирмы в строительстве предприятий.

28.13. Фирма может принять решение о замене старого оборудования новым того же вида или его ремонте. Отремонтированное оборудование впоследствии можно частично заменить на новое, более современное, или отремонтировать его заново.

Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую производят на этом оборудовании.

Полная замена оборудования экономически оправданна при высоком уровне спроса. С другой стороны, можно отремонтировать старое оборудование и через один год его заменить на новое, более совершенное, или заново его отремонтировать. На рис. 28.9 задача представлена в виде дерева решений.

Предполагается, что спрос может оказаться высоким, средним и низким.

Фирма рассматривает эту задачу на пятилетний период. Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого, среднего и низкого уровней спроса составляют 0,6; 0,3 и 0,1 соответственно. Замена новым оборудованием того же вида, что и старое, обойдется в 3 млн р., а ремонт старого — в 1 млн р.

Затраты на частичную замену оборудования на более совершенное, чем старое, оцениваются в 2 млн р., а повторный ремонт старого — в 1 млн р.

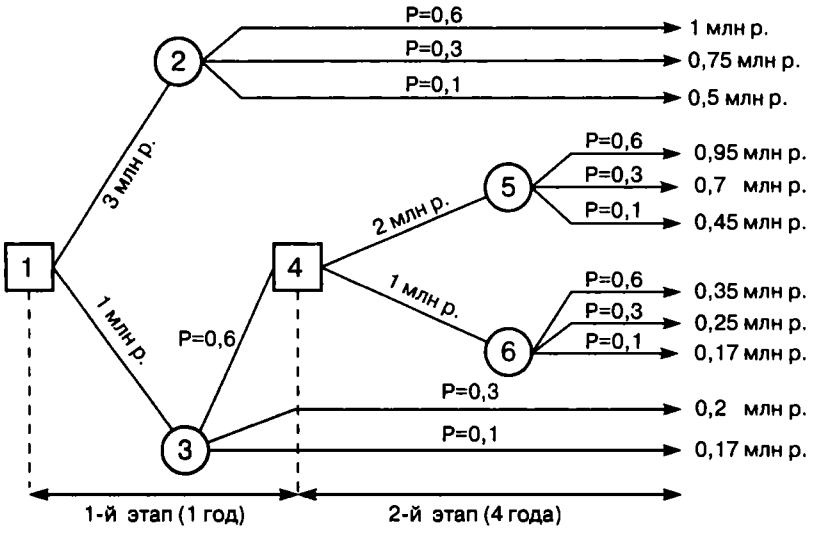


Рис. 28.9

Ежегодные доходы для каждой из альтернатив следующие.

1. Замена старого оборудования на новое того же вида при высоком, среднем и низком уровнях спроса дает 1,0; 0,75 и 0,5 млн р. соответственно.

2. Ремонт старого оборудования при высоком, среднем и низком уровнях спроса оценивается в 0,35; 0,2 и 0,17 млн р. соответственно.

3. Частичная замена оборудования на более совершенное при высоком, среднем и низком уровнях спроса составит 0,95; 0,7 и 0,45 млн р. соответственно.

4. Повторный ремонт старого оборудования при высоком, среднем и низком уровнях спроса предполагает 0,35; 0,25 и 0,17 млн р. соответственно.

Определить оптимальную стратегию фирмы в замене оборудования.

Глава 29
ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ (СМО)

29.1. Формулировка задачи и характеристики СМО

Часто приходится сталкиваться с такими ситуациями: очередь покупателей в кассах магазинов; колонна автомобилей, движение которых остановлено светофором; ряд станков, вышедших из строя и ожидающих ремонта, и т.д. Все эти ситуации объединяет то обстоятельство, что системам необходимо пребывать в состоянии ожидания. Ожидание является следствием вероятностного характера возникновения потребностей в обслуживании и разброса показателей обслуживающих систем, которые называют *системами массового обслуживания* (*СМО*).

Цель изучения СМО состоит в том, чтобы взять под контроль некоторые характеристики системы, установить зависимость между числом обслуживаемых единиц и качеством обслуживания. Качество обслуживания тем выше, чем больше число обслуживающих единиц. Но экономически невыгодно иметь лишние обслуживающие единицы.

В промышленности СМО применяются при поступлении сырья, материалов, комплектующих изделий на склад и выдаче их со склада; обработке широкой номенклатуры деталей на одном и том же оборудовании; организации наладки и ремонта оборудования; определении оптимальной численности обслуживающих отделов и служб предприятий и т.д.

Основными элементами СМО являются *источники заявок*, их *входящий поток, каналы обслуживания* и *выходящий поток*. Схематически это изображено на рис. 29.1.

В зависимости от характера формирования очереди СМО различают:

1) системы с отказами, в которых при занятости всех каналов обслуживания заявка не встает в очередь и покидает систему необслуженной;

Рис. 29.1

2) системы с неограниченными ожиданиями, в которых заявка встает в очередь, если в момент ее поступления все каналы были заняты.

Существуют и системы смешанного типа с ожиданием и ограниченной длиной очереди: заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все места в очереди заняты. Заявка, попавшая в очередь, обслуживается обязательно.

По числу каналов обслуживания СМО делятся на одноканальные и многоканальные.

В зависимости от расположения источника требований системы могут быть разомкнутыми (источник заявок находится вне системы) и замкнутыми (источник находится в самой системе).

Рассмотрим в отдельности элементы СМО.

Входящий поток: на практике наиболее распространенным является простейший поток заявок, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия.

Стационарность характеризуется тем, что вероятность поступления определенного количества требований (заявок) в течение некоторого промежутка времени зависит только от длины этого промежутка.

Ординарность потока определяется невозможностью одновременного появления двух или более заявок.

Отсутствие последействия характеризуется тем, что поступление заявки не зависит от того, когда и сколько заявок поступило до этого момента. В этом случае вероятность того, что число заявок, поступивших на обслуживание за промежуток времени t, равно k, определяется по закону Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

где λ — *интенсивность потока заявок*, т.е. среднее число заявок в единицу времени:

$$\lambda = 1/\bar{\tau} \text{ (чел./мин, р./ч, автом./дн., квт/ч)},$$

где $\bar{\tau}$ — среднее значение интервала времени между двумя соседними заявками.

Для такого потока заявок время между двумя соседними заявками распределено экспоненциально с плотностью вероятности

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Случайное время ожидания в очереди начала обслуживания считают распределенным экспоненциально:

$$f(t) = \nu e^{-\nu t},$$

где ν — *интенсивность движения очереди*, т.е. среднее число заявок, приходящих на обслуживание в единицу времени:

$$\nu = 1/\bar{t}_{\text{оч}},$$

где $\bar{t}_{\text{оч}}$ — среднее значение времени ожидания в очереди.

Выходящий поток заявок связан с потоком обслуживания в канале, где длительность обслуживания $\bar{t}_{\text{обс}}$ является случайной величиной и часто подчиняется показательному закону распределения с плотностью

$$f(t_{\text{обс}}) = \mu e^{-\mu t},$$

где μ — *интенсивность потока обслуживания*, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени:

$$\mu = 1/\bar{t}_{\text{обс}} \text{ (чел./мин, р./дн., кг/ч, докум./дн.)},$$

где $\bar{t}_{\text{обс}}$ — среднее время обслуживания.

Важной характеристикой СМО, объединяющей λ и μ, является *интенсивность нагрузки*

$$\rho = \lambda/\mu.$$

Рассмотрим n-канальные разомкнутые СМО.

29.2. СМО с отказами

Основные понятия

Заявка, поступившая в систему с отказами и нашедшая все каналы занятыми, получает отказ и покидает систему необслуженной. Показателем качества обслуживания выступает вероятность получения отказа. Предполагается, что все каналы доступны в равной степени всем заявкам, входящий поток является простейшим, длительность (время) обслуживания одной заявки ($t_{\text{обс}}$) распределена по показательному закону.

Формулы для расчета установившегося режима

1. Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок ($k = 0$):

$$P_0 = 1/\sum_{k=0}^{n} \rho^k/k!$$

2. Вероятность отказа в обслуживании, когда поступившая на обслуживание заявка найдет все каналы занятыми ($k = n$):

$$P_{\text{отк}} = P_n = P_0\rho^n/n!$$

3. Вероятность обслуживания:

$$P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}}.$$

4. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{n}_{\text{з}} = \rho P_{\text{обс}}.$$

5. Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$k_{\text{з}} = \bar{n}_{\text{з}}/n.$$

6. Абсолютная пропускная способность СМО:

$$A = \lambda P_{\text{обс}}.$$

29.3. СМО с неограниченным ожиданием

Основные понятия

Заявка, поступившая в систему с неограниченным ожиданием и нашедшая все каналы занятыми, становится в очередь, ожидая освобождения одного из каналов.

Основной характеристикой качества обслуживания является время ожидания (время пребывания заявки в очереди).

Для таких систем характерно отсутствие отказа в обслуживании, т.е. $P_{\text{отк}} = 0$ и $P_{\text{обс}} = 1$.

Для систем с ожиданием существует *дисциплина очереди*:

1) обслуживание в порядке очереди по принципу "первым пришел — первым обслужен";
2) случайное неорганизованное обслуживание по принципу "последний пришел — первым обслужен";
3) обслуживание с приоритетами по принципу "генералы и полковники вне очереди".

Формулы для установившегося режима

1. Вероятность простоя каналов, когда нет заявок ($k = 0$):

$$P_0 = 1 \Big/ \sum_{k=0}^{n} (\rho^k/k!) + \rho^{n+1}/n!(n-\rho).$$

Предполагается, что $\rho/n < 1$.

2. Вероятность занятости обслуживанием k заявок:

$$P_k = \rho^k P_0/k!, \quad 1 \le k \le n.$$

3. Вероятность занятости обслуживанием всех каналов:

$$P_n = \rho^n P_0/n!$$

4. Вероятность того, что заявка окажется в очереди:

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_0.$$

5. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} P_0.$$

6. Среднее время ожидания заявки в очереди:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \bar{L}_{\text{оч}}/\lambda.$$

7. Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$\bar{t}_{\text{смо}} = \bar{t}_{\text{оч}} + \bar{t}_{\text{обс}}.$$

8. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{n}_{\text{з}} = \rho.$$

9. Среднее число свободных каналов:

$$\bar{n}_{\text{св}} = n - \bar{n}_{\text{з}}.$$

10. Коэффициент занятости каналов обслуживания:

$$k_{\text{з}} = \bar{n}_{\text{з}}/n.$$

11. Среднее число заявок в СМО:

$$\bar{z} = \bar{L}_{\text{оч}} + \bar{n}_{\text{з}}.$$

29.4. СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди

Основные понятия

Заявка, поступившая в систему с ожиданием с ограниченной длиной очереди и нашедшая все каналы и ограниченную очередь занятыми, покидает систему необслуженной.

Основной характеристикой качества системы является отказ заявке в обслуживании.

Ограничения на длину очереди могут быть из-за:

1) ограничения сверху времени пребывания заявки в очереди;
2) ограничения сверху длины очереди;
3) ограничения общего времени пребывания заявки в системе.

Формулы для установившегося режима

1. Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок ($k = 0$):

$$P_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \left[1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right] \right\}^{-1}$$

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^{n+m}}{n! n^m} \cdot P_0.$$

3. Вероятность обслуживания:

$$P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{отк}}.$$

4. Абсолютная пропускная способность:

$$A = P_{\text{обс}} \cdot \lambda.$$

5. Среднее число занятых каналов:

$$\bar{n}_{\text{з}} = \frac{A}{\mu}.$$

6. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1 - (\rho/n)^m (m + 1 - m\rho/n)}{(1 - \rho/n)^2} P_0.$$

7. Среднее время ожидания обслуживания:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{L}_{\text{оч}}}{\lambda}.$$

8. Среднее число заявок в системе:

$$\bar{z} = \bar{L}_{\text{оч}} + \bar{n}_{\text{з}}.$$

9. Среднее время пребывания в системе:

$$\bar{t}_{\text{смо}} = \frac{\bar{z}}{\lambda}.$$

29.5. Определение эффективности использования трудовых и производственных ресурсов в системах массового обслуживания

Рассмотрим задачу с использованием СМО с отказами.

Пример 1. В ОТК цеха работают три контролера. Если деталь поступает в ОТК, когда все контролеры заняты обслуживанием ранее поступивших деталей, то она проходит непроверенной. Среднее число деталей, поступающих в ОТК в течение часа, равно 24, среднее время, которое затрачивает один контролер на обслуживание одной детали, равно 5 мин. Определить вероятность того, что деталь пройдет ОТК необслуженной, насколько загружены контролеры и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{\text{обс}} \geq 0{,}95$ ($*$ — заданное значение $P_{\text{обс}}$).

Решение. По условию задачи $\lambda = 24$ дет./ч $= 0,4$ дет./мин, $\bar{t}_{\text{обс}} = 5$ мин, тогда $\mu = 0,2$, $\rho = \lambda/\mu = 2$.

1. Вероятность простоя каналов обслуживания:

$$P_0 = \frac{1}{2^0/0! + 2^1/1! + 2^2/2! + 2^3/3!} = \frac{1}{1+2+2+1,3} = 0{,}1587,$$

где $0! = 1$.

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{\text{отк}} = 2^3 \cdot 0{,}1587/3! = 0{,}21.$$

3. Вероятность обслуживания:

$$P_{\text{обс}} = 1 - 0{,}21 = 0{,}79.$$

4. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{n}_{\text{з}} = 2 \cdot 0,79 = 1{,}58.$$

5. Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$k_{\text{з}} = 1{,}58/3 = 0{,}526.$$

6. Абсолютная пропускная способность:

$$A = 0{,}4 \cdot 0{,}79 = 0{,}316.$$

При $n = 3$ $P_{\text{обс}} = 0{,}79 \leq P^*_{\text{обс}} = 0{,}95$. Произведя аналогичные расчеты для $n = 4$, получим

$$P_0 = 0{,}14, \quad P_{\text{отк}} = 0{,}093, \quad P_{\text{обс}} = 0{,}907.$$

Так как $P_{\text{обс}} = 0{,}907 \leq P^*_{\text{обс}} = 0{,}95$, то, произведя расчеты для $n = 5$, получим

$$P_0 = 0{,}137, \quad P_{\text{отк}} = 0{,}035, \quad P_{\text{обс}} = 0{,}965 \geq P^*_{\text{обс}} = 0{,}95.$$

О т в е т. Вероятность того, что при $n = 3$ деталь пройдет ОТК необслуженной, составляет 21%, и контролеры будут заняты обслуживанием на 53%.

Чтобы обеспечить вероятность обслуживания более 95%, необходимо не менее пяти контролеров.

Рассмотрим задачу с использованием СМО с неограниченным ожиданием.

Пример 2. Сберкасса имеет трех контролеров-кассиров ($n = 3$) для обслуживания вкладчиков. Поток вкладчиков поступает в сберкассу с интенсивностью $\lambda = 30$ чел./ч. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного вкладчика $\bar{t}_{\text{обс}} = 3$ мин.

Определить характеристики сберкассы как объекта СМО.

Решение. Интенсивность потока обслуживания $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обс}} = 1/3 = 0{,}333$, интенсивность нагрузки $\rho = 1{,}5$.

1. Вероятность простоя контролеров-кассиров в течение рабочего дня:

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1{,}5^0}{0!} + \frac{1{,}5^1}{1!} + \frac{1{,}5^2}{2!} + \frac{1{,}5^3}{3!} + \frac{1{,}5^4}{3!(3-1{,}5)}} = 0{,}210.$$

2. Вероятность застать всех контролеров-кассиров занятыми:

$$P_n = \frac{1{,}5^3}{3!}\,0{,}21 = 0{,}118.$$

3. Вероятность очереди:

$$P_{\text{оч}} = \frac{1{,}5^4}{3!(3-1{,}5)}0{,}21 = 0{,}118.$$

4. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{\text{оч}} = \frac{1{,}5^4}{(3-1)!(3-1{,}5)^2}0{,}21 = 0{,}236.$$

5. Среднее время ожидания заявки в очереди:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{0{,}236}{0{,}5} = 0{,}472 \text{ мин.}$$

6. Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$\bar{t}_{\text{смо}} = 0{,}472 + 3 = 3{,}472 \text{ мин.}$$

7. Среднее число свободных каналов:

$$\bar{n}_{\text{св}} = 3 - 1{,}5 = 1{,}5.$$

8. Коэффициент занятости каналов обслуживания:

$$k_{\text{з}} = \frac{1{,}5}{3} = 0,5.$$

9. Среднее число посетителей в сберкассе:

$$\bar{z} = 0{,}236 + 1{,}5 = 1{,}736 \text{ чел.}$$

О т в е т. Вероятность простоя контролеров-кассиров равна 21% рабочего времени, вероятность посетителю оказаться в очереди составляет 11,8%, среднее число посетителей в очереди 0,236 чел., среднее время ожидания посетителями обслуживания 0,472 мин.

Рассмотрим задачу с применением СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди.

Пример 3. Магазин получает ранние овощи из пригородных теплиц. Автомобили с грузом прибывают в разное время с интенсивностью $\lambda = 6$ машин в день. Подсобные помещения и оборудование для подготовки овощей к продаже позволяют обрабатывать и хранить товар, привезенный двумя автомашинами ($m = 2$). В магазине работают три фасовщика ($n = 3$), каждый из которых в среднем может обрабатывать товар с одной машины в течение $\bar{t}_{\text{обс}} = 4$ ч. Продолжительность рабочего дня при сменной работе составляет 12 ч.

Определить, какова должна быть емкость подсобных помещений, чтобы вероятность полной обработки товаров была $P^*_{\text{обс}} \geq 0{,}97$.

Решение. Определим интенсивность загрузки фасовщиков:

$$\rho = \lambda/\mu = 6/3 = 2, \quad \mu = 1/\bar{t}_{\text{обс}} = 1 \cdot 12/4 = 3 \text{ авт./дн.}$$

1. Найдем вероятность простоя фасовщиков при отсутствии машин (заявок):

$$P_0 = 1 : \left\{ \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^{3+1}}{3!(3-2)} \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] \right\} = 0{,}1$$

причем $0! = 1{,}0$.

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{\text{отк}} = P_{n+m} = 0{,}128 \frac{2^{3+2}}{3!3^2} = 0{,}075.$$

3. Вероятность обслуживания:

$$P_{\text{обс}} = 1 - 0{,}075 = 0{,}925.$$

Так как $P_{\text{обс}} = 0{,}925 < P^*_{\text{обс}} = 0{,}97$, произведем аналогичные вычисления для $m = 3$, получим

$$P_0 = 0{,}122, \quad P_{\text{отк}} = 0{,}048, \quad P_{\text{обс}} = 0{,}952.$$

Так как $P_{\text{обс}} = 0{,}952 < P^*_{\text{обс}} = 0{,}97$, примем $m = 4$.

Для этого случая

$$P_0 = 0{,}12, \quad P_{\text{отк}} = 0{,}028, \quad P_{\text{обс}} = 0{,}972,$$

$0{,}972 > 0{,}97$, емкость подсобных помещений необходимо увеличить до $m = 4$.

Для достижения заданной вероятности обслуживания можно увеличивать число фасовщиков, проводя последовательно вычисления СМО для $n = 4$, 5 и т.д. Задачу можно решить, увеличивая емкость подсобных помещений, число фасовщиков, уменьшая время обработки товаров.

Найдем остальные параметры СМО для рассчитанного случая при $P_0 = 0{,}12$, $P_{\text{отк}} = 0{,}028$, $P_{\text{обс}} = 0{,}972$.

4. Абсолютная пропускная способность:

$$A = 0{,}972 \cdot 6 = 5{,}832 \text{ авт./дн.}$$

5. Среднее число занятых обслуживанием каналов (фасовщиков):

$$\bar{n}_{\text{зан}} = 5{,}832/3 = 1{,}944.$$

6. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{\text{оч}} = \frac{2^4}{3 \cdot 3!} \frac{1 - (2/3)^4(4 + 1 - 4 \cdot 2/3)}{(1 - 2/3)^2} \cdot 0{,}12 = 0{,}548.$$

7. Среднее время ожидания обслуживания:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{0{,}548}{6} = 0{,}09 \text{ дн.}$$

8. Среднее число машин в магазине:

$$\bar{z} = 0{,}548 + 1{,}944 = 2{,}492 \text{ авт.}$$

9. Среднее время пребывания машины в магазине:

$$\bar{t}_{\text{смо}} = \frac{2{,}492}{6} = 0{,}415 \text{ дн.}$$

О т в е т. Емкость подсобных помещений магазина должна вмещать товар, привезенный 4 автомашинами ($m = 4$), при этом вероятность полной обработки товара будет $P_{обс} = 0{,}972$.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить следующие задачи в предположении, что поток поступающих заявок является простейшим и длительность обслуживания одной заявки распределена по показательному закону.

29.1. Дежурный по администрации города имеет пять телефонов. Телефонные звонки поступают с интенсивностью 90 заявок в час, средняя продолжительность разговора составляет 2 мин.

Определить показатели дежурного администратора как объекта СМО.

29.2. На стоянке автомобилей возле магазина имеются 3 места, каждое из которых отводится под один автомобиль. Автомобили прибывают на стоянку с интенсивностью 20 автомобилей в час. Продолжительность пребывания автомобилей на стоянке составляет в среднем 15 мин. Стоянка на проезжей части не разрешается.

Определить среднее количество мест, не занятых автомобилями, и вероятность того, что прибывший автомобиль не найдет на стоянке свободного места.

29.3. АТС предприятия обеспечивает не более 5 переговоров одновременно. Средняя продолжительность разговоров составляет 1 мин. На станцию поступает в среднем 10 вызовов в с.

Определить характеристики АТС как объекта СМО.

29.4. В грузовой речной порт поступает в среднем 6 сухогрузов в сутки. В порту имеются 3 крана, каждый из которых обслуживает 1 сухогруз в среднем за 8 ч. Краны работают круглосуточно.

Определить характеристики работы порта как объекта СМО и в случае необходимости дать рекомендации по улучшению его работы.

29.5. В службе “Скорой помощи” поселка круглосуточно дежурят 3 диспетчера, обслуживающие 3 телефонных аппарата. Если заявка на вызов врача к больному поступает, когда диспетчеры заняты, то абонент получает отказ. Поток заявок составляет 4 вызова в минуту. Оформление заявки длится в среднем 1,5 мин.

Определить основные показатели работы службы “Скорой помощи” как объекта СМО и рассчитать, сколько потребуется телефонных аппаратов, чтобы удовлетворить не менее 90% поступающих вызовов врачей.

29.6. Салон-парикмахерская имеет 4 мастера. Входящий поток посетителей имеет интенсивность 5 человек в час. Среднее время обслуживания одного клиента составляет 40 мин.

Определить среднюю длину очереди на обслуживание, считая ее неограниченной.

29.7. На автозаправочной станции установлены 2 колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на 2 автомашины для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем одна машина в 3 мин. Среднее время обслуживания одной машины составляет 2 мин.

Определить характеристики работы автозаправочной станции как объекта СМО.

29.8. На вокзале в мастерской бытового обслуживания работают три мастера. Если клиент заходит в мастерскую, когда все мастера заняты, то он уходит из мастерской, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в мастерскую за 1 ч, равно 20. Среднее время, которое затрачивает мастер на обслуживание одного клиента, равно 6 мин.

Определить вероятность того, что клиент получит отказ, будет обслужен, а также среднее число клиентов, обслуживаемых мастерской в течение 1 ч, и среднее число занятых мастеров.

29.9. АТС поселка обеспечивает не более 5 переговоров одновременно. Время переговоров в среднем составляет около 3 мин. Вызовы на станцию поступают в среднем через 2 мин.

Определить вероятность того, что заявка получит отказ, среднее число занятых каналов, абсолютную пропускную способность АТС.

29.10. На автозаправочной станции (АЗС) имеются 3 колонки. Площадка при станции, на которой машины ожидают заправку, может вместить не более одной машины, и если она занята, то очередная машина, прибывшая к станции, в очередь не становится, а проезжает на соседнюю станцию. В среднем машины прибывают на станцию каждые 2 мин. Процесс заправки одной машины продолжается в среднем 2,5 мин.

Определить вероятность отказа, абсолютную пропускную способность АЗС, среднее число машин, ожидающих заправку, среднее время ожидания машины в очереди, среднее время пребывания машины на АЗС (включая обслуживание).

29.11. В небольшом магазине покупателей обслуживают два продавца. Среднее время обслуживания одного покупателя — 4 мин. Интенсивность потока покупателей — 3 человека в минуту. Вместимость магазина такова, что одновременно в нем в очереди могут находиться не более 5 человек. Покупатель, пришедший в переполненный магазин, когда в очереди уже стоят 5 человек, не ждет снаружи и уходит.

Определить вероятность того, что пришедший в магазин покупатель покинет магазин необслуженным.

29.12. Железнодорожную станцию дачного поселка обслуживает касса с двумя окнами. В выходные дни, когда население активно пользуется железной дорогой, интенсивность потока пассажиров составляет 0,9 чел./мин. Кассир затрачивает на обслуживание пассажира в среднем 2 мин.

Определить среднее число пассажиров у кассы и среднее время, затрачиваемое пассажиром на приобретение билета.

Часть 7
ОСНОВЫ ЭКОНОМЕТРИКИ

Глава 30
НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ

30.1. Нелинейная регрессия

Между экономическими явлениями существуют нелинейные соотношения, они выражаются с помощью нелинейных функций.

Различают два *класса нелинейных регрессий:* регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам, и регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.

Примерами нелинейной регрессии по включаемым в нее объясняющим переменным являются функции:

— полиномы разных степеней: $y = a + b + c^2 + \varepsilon$, $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \varepsilon$;

— равносторонняя гипербола: $y = a + b/x + \varepsilon$.

К нелинейным регрессиям по оцениваемым параметрам относятся функции:

— степенная: $y = ax^b\varepsilon$;

— показательная $y = ab^x\varepsilon$;

— экспоненциальная $y = e^{a+bx}\varepsilon$.

Нелинейные регрессии первого класса

Нелинейная регрессия по включенным переменным (первого класса) определяется, как и в линейной регрессии, методом

наименьших квадратов (МНК), так как эти функции линейны по параметрам. Например, в параболе второй степени, которую запишем в виде

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2 + \varepsilon, \tag{30.1}$$

заменяя переменные $x = x_1$, $x^2 = x_2$, получим двухфакторное уравнение линейной регрессии:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \varepsilon, \tag{30.2}$$

для оценки параметров которого используется МНК.

Соответственно для полинома третьего порядка

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \varepsilon, \tag{30.3}$$

при замене $x = x_1$, $x^2 = x_2$, $x^3 = x_3$ получим трехфакторную модель линейной регрессии вида:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \varepsilon \tag{30.4}$$

и т. д.

Таким образом, полином любого порядка сводится к линейной регрессии с ее методами оценивания параметров и проверки гипотез. В экономических исследованиях чаще всего используется парабола второй степени, в отдельных случаях — полином третьего порядка.

Применение МНК для оценки параметров параболы второй степени приводит к следующей системе нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 = \sum y, \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 = \sum xy, \\ a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 = \sum x^2 y. \end{cases} \tag{30.5}$$

Система содержит 3 уравнения с 3 неизвестными коэффициентами a_0, a_1, a_2, и ее решение может быть произведено по формулам Крамера.

Пример 1. Данные результатов наблюдений представлены в табл. 30.1.

Таблица 30.1

x	-2	-1	0	1	2
y	4,8	0,4	$-3,3$	$-0,8$	3,2

Определить методом наименьших квадратов параметры a_0, a_1, a_2 зависимости вида $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Решение. Составим вспомогательную таблицу и произведем расчеты, необходимые для составления системы нормальных уравнений.

Таблица 30.2

№	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1	-2	4,8	4	-8	16	$-9,6$	19,2
2	-1	0,4	1	-1	1	$-0,4$	0,4
3	0	$-3,3$	0	0	0	0	0
4	1	$-0,8$	1	1	1	$-0,8$	$-0,8$
5	2	3,2	4	8	16	6,4	12,8
$\sum$	0	4,3	10	0	34	$-4,4$	31,6

На основании полученных результатов расчета система нормальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 5a_0 + 0a_1 + 10a_2 = 4,3, \\ 0a_0 + 10a_1 + 0a_2 = -4,4, \\ 10a_0 + 0a_1 + 34a_2 = 31,6. \end{cases}$$

Решая систему по формулам Крамера, получим: $a_0 = -2,42$, $a_1 = -0,44$, $a_2 = 1,64$. Таким образом, уравнение примет вид:

$$Y = -2,42 - 0,44x + 1,64x^2.$$

Парабола второй степени при $b > 0$ и $c < 0$ симметрична относительно высшей точки, т. е. точки максимума, изменяющей направление связи, а именно рост на падение. Такого рода

функцию можно наблюдать в экономике труда при изучении зависимости заработной платы работников физического труда от возраста, с увеличением возраста повышается заработная плата ввиду одновременного увеличения опыта и повышения квалификации работника. Однако с определенного возраста ввиду старения организма и снижения производительности труда дальнейшее повышение возраста может приводить к снижению заработной платы работника.

При $b < 0$ и $c > 0$ парабола второго порядка симметрична относительно своей низшей точки, что позволяет определять минимум функции в точке, меняющей направление связи, т. е. снижение на рост.

Ввиду симметричности кривой парабола второй степени далеко не всегда пригодна в конкретных исследованиях, чаще имеют дело лишь с отдельными сегментами параболы.

К классу нелинейных функций, параметры которых оцениваются МНК, следует отнести равностороннюю гиперболу:

$$y = a + b/x + \varepsilon. \tag{30.6}$$

Она может быть использована на микро- и макроуровне — например, для характеристики связи удельных расходов сырья, материалов, топлива с объемом выпускаемой продукции, времени обращения товаров от величины товарооборота. Классическим ее примером является *кривая Филлипса*, характеризующая соотношение между нормой безработицы и процентом прироста заработной платы.

Для равносторонней гиперболы (30.6) обозначим $z = 1/x$, получим линейное уравнение регрессии

$$Y = a + bz + \varepsilon,$$

оценка параметров которого может быть определена МНК. Система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} \sum y = na + b\sum 1/x, \\ \sum y/x = a\sum 1/x + b\sum 1/x^2. \end{cases} \tag{30.7}$$

При $b > 0$ имеем обратную зависимость, которая при $x \to \infty$ характеризуется нижней асимптотой.

При $b < 0$ имеем медленно повышающуюся функцию с верхней асимптотой при $x \to \infty$.

Примером такой зависимости может служить взаимосвязь доли расходов на товары длительного пользования и общих сумм расходов (доходов). Математическое описание подобного рода взаимосвязей получило название *кривых Энгеля*. В 1857 г. немецкий статистик Э. Энгель на основе исследования семейных расходов сформулировал закономерность: с ростом дохода доля расходов на продовольствие уменьшается. Соответственно с увеличением дохода доля расходов на непродовольственные товары будет возрастать. Однако это увеличение небеспредельно, ибо на все товары сумма долей не может быть больше единицы.

Нелинейные регрессии второго класса

Рассмотрим регрессию, нелинейную по оцениваемым параметрам (второго класса). Данный класс нелинейных моделей подразделяется на два типа: *нелинейные модели внутренне линейные* и *нелинейные модели внутренне нелинейные*. Если нелинейная модель внутренне линейна, то она с помощью соответствующих преобразований может быть приведена к линейному виду. Если же нелинейная модель внутренне нелинейна, то она не может быть сведена к линейной функции. Например, в эконометрических исследованиях при изучении эластичности спроса от цен широко используется степенная функция:

$$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon, \tag{30.8}$$

где y — объем спроса; x — цена; ε — случайная ошибка.

Модель нелинейна относительно оцениваемых параметров, ибо включает параметры a и b неаддитивно. Однако ее можно считать внутренне линейной, так как логарифмирование данного уравнения приводит его к линейному виду:

$$\ln y = \ln a + b \cdot \ln x + \ln \varepsilon. \tag{30.9}$$

Оценки параметров a и b уравнения (30.9) могут быть най-

дены МНК. Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \sum \ln y = n \ln a + b \sum \ln x, \\ \sum \ln y \cdot \ln x = \ln a \sum \ln x + b \sum (\ln x)^2. \end{cases}$$

Параметр b определяется из системы, а параметр a — потенцированием выражения $\ln a$.

При этом предполагается, что случайная ошибка ε функции (30.9) *мультипликативно* связана с объясняющей переменной x. Если же модель представить в виде

$$Y = a \cdot x^b + \varepsilon,$$

то она становится внутренне нелинейной, так как ее невозможно превратить в линейный вид.

К внутренне нелинейным относятся модели вида

$$Y = a + bx^c + \varepsilon, \tag{30.10}$$

$$y = a \cdot [1 - 1/(1 - x^b)] + \varepsilon. \tag{30.11}$$

Эти уравнения не могут быть преобразованы в уравнения, линейные по коэффициентам.

Если модель внутренне нелинейна по параметрам, то для оценки параметров используются итеративные процедуры, успешность которых зависит от вида уравнений и особенностей применяемого итеративного подхода. Модели, внутренне нелинейные по параметрам, могут иметь место в эконометрических исследованиях. Однако гораздо большее распространение получили модели, приводимые к линейному виду. Решение такого типа моделей реализовано в стандартных пакетах прикладных программ.

Из нелинейных функций, которые могут быть приведены к линейному виду, широко используется степенная функция $y_x = ax^b$. Это объясняется тем, что параметр b в ней является *коэффициентом эластичности,* показывающим, на сколько процентов изменится в среднем результат, если фактор изменится на 1%. Коэффициент эластичности вычисляется по формуле:

$$Э = f'(x)x/y, \tag{30.12}$$

где $Э$ — коэффициент эластичности; $f'(x)$ — первая производная функции.

Коэффициент эластичности можно определять и при наличии других форм связи, но только для степенной функции он представляет собой постоянную величину, равную параметру b. В других функциях коэффициент эластичности зависит от значений фактора x. Например, для линейной регрессии $y = a+b\cdot x$ имеем:

$$f'(x) = b, Э = bx/(a + bx).$$

В силу того что коэффициент эластичности для линейной функции не является величиной постоянной, а зависит от соответствующего значения x, то обычно рассчитывается *средний показатель эластичности*

$$\bar{Э} = \bar{b}\,\bar{x}/y.$$

Несмотря на широкое использование в эконометрике коэффициентов эластичности, возможны случаи, когда их расчет экономического смысла не имеет. Это происходит тогда, когда для рассматриваемых признаков бессмысленно определение изменения значений в процентах. Например, вряд ли кто будет определять, на сколько процентов изменится урожайность пшеницы, если качество почвы, измеряемое в баллах, изменится на 1%. В такой ситуации степенная функция, даже если она оказывается наилучшей по формальным соображениям (исходя из наименьшего значения остаточной вариации), не может быть экономически интерпретирована.

В моделях, нелинейных по оцениваемым параметрам, но приводимых к линейному виду, МНК применяется к преобразованным уравнениям, Если в линейной модели и моделях, нелинейных по переменным, при оценке параметров исходят из критерия $\sum(y - y_x) \to \min$, то в моделях, нелинейных по оцениваемым параметрам, требование МНК применяется не к исходным данным результативного признака, а к их преобразованным величинам $\ln y$, $1/x$. Это значит, что оценка параметров основывается на минимизации суммы квадратов отклонений в логарифмах.

Вследствие этого оценка параметров для линеаризуемых функций МНК оказывается несколько смещенной.

Практическое применение экспоненты возможно, если результативный признак не имеет отрицательных значений. Поэтому если исследуется, например, финансовый результат деятельности предприятий, среди которых наряду с прибыльными есть и убыточные, то данная функция не может быть использована.

30.2. Нелинейная корреляция

Уравнение нелинейной регрессии, так же как и в линейной зависимости, дополняется показателем корреляции, а именно *индексом корреляции* (R):

$$R = \sqrt{1 - (\sigma^2_{\text{ост}}/\sigma^2_y)}\,, \qquad (30.13)$$

где σ^2_y — общая дисперсия результативного признака y; $\sigma^2_{\text{ост}}$ — остаточная дисперсия, определяемая из уравнения регрессии $y_x = f(x)$.

Так как $\sigma^2_y = \left[\sum (y - \bar{y})^2\right] \Big/ n$, а $\sigma^2_{\text{ост}} = \left[\sum (y - y_x)^2\right] \Big/ n$, то

$$R = \sqrt{1 - \left(\sum (y - y_x)^2 \Big/ \sum (y - \bar{y})^2\right)}. \qquad (30.14)$$

Индекс корреляции находится в границах: $0 \le R \le 1$ и чем ближе к единице, тем теснее связь рассматриваемых признаков, более надежно найденное уравнение регрессии.

Пример 2. Вычислить индекс корреляции на основании данных примера 1. Результаты вычислений приведены в табл. 30.3.

Значения y_x определим путем подстановки в полученное в примере 1 выражение

$$y_x = -2{,}42 - 0{,}44x + 1{,}64x^2$$

соответственно значений x, равных -2, -1, 0, 1, 2. Получим:

$$y_1 = -2{,}42 - 0{,}44 \cdot (-2) + 1{,}64 \cdot (-2)^2 = 5{,}02.$$

Аналогично находим y_2, y_3, y_4, y_5.

Таблица 30.3

№	x	y	y_x	$y - y_x$	$(y - y_x)^2$	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$
1	−2	4,8	5,02	−0,22	0,0484	3,94	15,5236
2	−1	0,4	−0,34	0,74	0,5476	−0,46	0,2116
3	0	−3,3	−2,42	−0,88	0,7744	−4,16	17,3056
4	1	−0,8	−1,22	0,42	0,1764	−1,66	2,7556
5	2	3,2	3,26	−0,06	0,0036	2,34	5,4756
$\sum$	0	4,3			1,5504		41,272

Вычислим индекс корреляции по формуле (30.14)

$$R = \sqrt{1 - (1{,}5504/41{,}272)} = 0{,}981.$$

Индекс корреляции близок к единице, поэтому можно сделать вывод о достаточно тесной связи между заданными величинами.

Парабола второй степени, как и полином более высокого порядка, при линеаризации принимает вид уравнения множественной регрессии. Если же нелинейное относительно объясняемой переменной уравнение регрессии при линеаризации принимает форму линейного уравнения парной регрессии, то для оценки тесноты связи может быть использован линейный коэффициент корреляции, величина которого в этом случае совпадет с индексом корреляции $R_{yx} = r_{yz}$, где z — преобразованная величина признака-фактора, например, $z = 1/x$ или $z = \ln x$.

Иначе обстоит дело, когда преобразования уравнения в линейную форму связаны с зависимой переменной. В этом случае линейный коэффициент корреляции по преобразованным значениям признаков дает приближенную оценку тесноты связи и не совпадает с индексом корреляции. Например, для степенной функции $y_x = ax^b$ после перехода к линейному уравнению $\ln y = \ln a + b \ln x$ может быть вычислен линейный коэффициент корреляции не для фактических переменных x и y, а для их логарифмов.

Не совпадают данные показатели и для уравнения регрессии в виде экспоненты, так как при преобразовании в линей-

ную форму рассчитывается линейный коэффициент корреляции между x и $\ln$. При использовании в преобразовании нелинейных соотношений в линейную форму обратных значений результативного признака, т. е. $1/y$, индекс корреляции R_{yx} также не будет совпадать с линейным коэффициентом корреляции.

Следует иметь ввиду, что если при линейной зависимости признаков один и тот же коэффициент корреляции характеризует регрессию как $y_x = a + b \cdot x$, так и $X_y = A + B \cdot y$, так как $r_{yx} = r_{xy}$, то при криволинейной зависимости R_{yx} для функции $y = f(x)$ не равен R_{xy} для регрессии $x = f(y)$.

Поскольку в расчете индекса корреляции используется соотношение факторной и общей суммы квадратов отклонений, то R^2 имеет тот же смысл, что и коэффициент детерминации.

Оценка существенности индекса корреляции проводится так же, как и оценка надежности линейного коэффициента корреляции.

Индекс детерминации используется для проверки существенности в целом уравнения нелинейной регрессии по F-критерию Фишера:

$$F = [R^2/(1 - R^2)] \cdot [(n - m - 1)/m], \qquad (30.15)$$

где R^2 — индекс детерминации; n — число наблюдений; m — число параметров при переменных x.

Величина m характеризует число степеней свободы для факторной суммы квадратов, а $(n - m - 1)$ — число степеней свободы для остаточной суммы квадратов.

Для степенной функции $y_x = ax^b$ $m = 1$ и формула для определения F-критерия примет тот же вид, что и при линейной зависимости:

$$F = R^2(n - 2)/(1 - R^2). \qquad (30.16)$$

Для параболы второй степени $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$ и $m = 2$

$$F = R^2(n - 3)/2(1 - R^2). \qquad (30.17)$$

Пример 3. Зависимость потребления продукта A от среднедушевого дохода по данным 20 семей характеризуется следующими данными:

уравнение регрессии $y_x = 2x^{0,3}$;
индекс корреляции $\rho_{xy} = 0,9$;
остаточная дисперсия $\sigma^2_{\text{ост}} = 0,06$.
Провести дисперсионный анализ полученных результатов.

Решение. Результаты расчета приведены в табл. 30.4

Таблица 30.4

Вариация результата y	Число степеней свободы	Сумма квадратов отклонений	Дисперсия на одну степень свободы	$F_{\text{факт}}$	$F_{\text{табл}}$ $\alpha = 0,05$, $k_1 = 1$, $k_2 = 18$
Общая	$n - 1 = 19$	6,316	—	—	—
Факторная	$k_1 = m = 1$	5,116	5,116	76,7	4,41
Остаточная	$k_2 = n - m - 1 = 18$	1,2	0,0667	—	—

$S_{\text{ост}} = \sigma^2_{\text{ост}} \cdot n = 0,06 \cdot 20 = 1,2$;
$S_{\text{общ}} = S_{\text{ост}}/(1 - \rho^2_{xy}) = 1,2/(1 - 0,81) = 6,316$;
$S_{\text{факт}} = 6,316 - 1,2 = 5,116$;
$F_{\text{факт}} = 0,9^2 \cdot 18/(1 - 0,9^2) = 76,7$.

Ответ. В силу того, что $F_{\text{факт}} = 76,7 > F_{\text{табл}} = 4,4$, гипотеза о случайности различий факторной и остаточной дисперсий отклоняется. Эти различия существенны, статистически значимы, уравнение надежно, значимо, показатель тесноты связи надежен и отражает устойчивую зависимость потребления продукта A от среднедушевого дохода.

УПРАЖНЕНИЯ

30.1. Данные результатов наблюдений представлены в таблице.

x	−2	−1	0	1	2
y	7,5	4,0	3,0	5,2	10,0

Определить методом наименьших квадратов параметры a_0, a_1, a_2 зависимости вида $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

30.2. Данные результатов наблюдений представлены в таблице.

x	−2	−1	0,5	1	2
y	7,0	9,0	5,0	1,5	3,5

Определить методом наименьших квадратов параметры a и b зависимости вида $y = a + b/x$.

30.3. Данные результатов наблюдений представлены в таблице.

x	1	2	3	4	5
y	1	2	4	6	17,0

Определить методом наименьших квадратов параметры a и b зависимости вида $y = ax^b$.

30.4. По данным упражнения 30.1 вычислить индекс корреляции и сделать вывод о тесноте связи между заданными величинами x, y.

30.5. По данным упражнения 30.2 вычислить индекс корреляции и сделать вывод о тесноте связи между заданными величинами x, y.

30.6. По данным упражнения 30.3 вычислить индекс корреляции и сделать вывод о тесноте связи между заданными величинами x, y.

Глава 31

МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ

31.1. Нормальная линейная модель множественной регрессии

Обобщением линейной регрессии с двумя переменными является модель множественной регрессии, которую можно представить в виде

$$y_i = b_0 + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + \ldots + b_jx_{ji} + \ldots + b_kx_{ki} + \varepsilon_i, \qquad (31.1)$$

где y_i — значение зависимой переменной для i-го наблюдения $\left(i = \overline{1,n}\right)$; b_0 — свободный член; b_j — коэффициент при j-м факторе $\left(j = \overline{1,k}\right)$; x_{ji} — значение j-го фактора независимой или объясняющей переменной для i-го наблюдения; ε_i — случайная составляющая зависимой переменной i-го наблюдения.

Для многомерной регрессионной модели имеет место следующие предпосылки.

Переменные $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ji}, \ldots, x_{ki}$ — величины неслучайные.

Математическое ожидание случайной составляющей в любом наблюдении равно нулю:

$$M(\varepsilon_i) = 0.$$

Дисперсия случайной составляющей постоянна для всех наблюдений:

$$D(\varepsilon_i) = \delta^2 = \text{const}.$$

Отсутствие систематической связи между значениями случайной составляющей в любых двух наблюдениях:

$$M(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad (i \neq j).$$

Случайная составляющая ε_i — нормально распределенная случайная величина.

Модель линейной множественной регрессии (31.1), для которой выполняются вышеуказанные предпосылки, называется *нормальной* (классической) линейной регрессионной моделью.

Факторы, включаемые во множественную регрессию, должны быть количественно измеримы и не должны сильно коррелировать друг с другом. Кроме того, каждый фактор должен быть тесно связан с результатом. Коэффициент парной линейной корреляции фактора и результата должен существенно отличаться от нуля.

В матричной форме нормальная регрессионная модель (31.1) записывается в виде:

$$y = x \cdot b + \varepsilon,$$

где y — матрица-столбец или вектор значений зависимой переменной размерности $(n \times 1)$; x — матрица значений независимых переменных размерности $\{n \times (k+1)\}$. Добавление 1 к

общему числу факторов k учитывает свободный член b_0 в уравнении регрессии; b — матрица-столбец или вектор размерности $\{(k+1)\times 1\}$ неизвестных, подлежащих оценке параметров модели; ε — случайный вектор-столбец $(n \times 1)$ ошибок наблюдений.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}_{n\times 1}; \quad x = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ & & \dots & \\ 1 & x_{1i} & \dots & x_{ki} \\ & & \dots & \\ 1 & x_{1n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}_{n\times(k+1)};$$

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_j \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}_{(k+1)\times 1}; \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_i \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}_{n\times 1}.$$

Оценка параметров нормальной модели множественной регрессии

Основная задача регрессионного анализа заключается в нахождении по выборке объемов и оценки неизвестных коэффициентов регрессии b_0, b_1, $\dots b_k$ модели.

Оценка параметров многомерной модели, аналогично парной регрессии, осуществляется методом наименьших квадратов (МНК). В качестве оценки вектора $\bar{b}$ принимают вектор b, минимизирующий сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений y_i от рассчитанных по модели $\hat{y}_i$.

Функционал S имеет вид:

$$S = (y - xb)^T(y - xb) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \to \min \dots \qquad (31.2)$$

оценки находятся по формулам:

$$b = (x^T x)^{-1} x^T y. \qquad (31.3)$$

Так, для двухфакторной линейной модели

$$y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - (b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i}))^2 \to \min \ldots \quad (31.4)$$

Из выражения (31.4) следует, что функционал S является функцией переменных b_0, b_1, b_2.

Для нахождения экстремума функционала S найдем частные производные по этим переменным и приравняем их к нулю.

$$\frac{\partial S}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_2} = 0.$$

Получим систему нормальных линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = b_0 \cdot n + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} + b_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{2i}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_{1i} = b_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + b_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{2i} \cdot x_{1i}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_{2i} = b_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{2i} + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} \cdot x_{2i} + b_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_{2i}^2. \end{cases}$$

Теорема Гаусса, сформулированная для парной регрессионной модели, является верной и для модели множественной регрессии (31.1).

Пример 1. Имеются данные по трем показателям, приведенным в таблице. Оценить параметры линейной множественной регрессии.

Решение. Предположим, что между переменными y, x_1 и x_2 существует линейная регрессионная зависимость. Найдем уравнение регрессии y по x_1 и x_2. Оценки параметров линейного двухфакторного уравнения регрессии определим матричным способом (табл. 31.1).

Обозначим

$$y = \begin{pmatrix} 330 \\ 360 \\ \ldots \\ 220 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 & 25 & 14 \\ 1 & 32 & 16 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 21 & 4 \end{pmatrix}.$$

Таблица 31.1

i	y	x_1	x_2	yx_1	yx_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	y^2
1	330	25	14	8250	4620	625	196	350	108900
2	360	32	16	11520	5760	1024	256	512	129600
3	320	30	13	960	4160	900	169	390	102400
4	280	28	8	7840	2240	784	64	224	78400
5	240	23	6	5520	1440	529	36	138	57600
6	380	35	17	13300	6460	1225	289	595	144400
7	400	38	19	15200	7600	1444	361	722	160000
8	360	36	16	12960	5760	1296	256	576	129600
9	320	31	14	9920	4480	961	196	434	102400
10	400	39	20	15600	8000	1521	400	780	160000
11	280	27	9	7560	2520	729	81	243	78400
12	420	40	21	16800	8820	1600	441	840	176400
13	220	24	5	5280	1100	576	25	120	48400
14	380	37	18	14060	6840	1369	324	666	144400
15	200	22	4	4400	800	484	16	88	40000
16	300	29	13	8700	3900	841	169	377	90000
17	360	34	15	12240	5400	1156	225	510	129600
18	320	33	12	10560	3840	1089	144	396	102400
19	260	26	7	6760	1840	676	49	182	67600
20	220	21	4	4620	880	441	16	84	48400
$\sum$	6350	610	251	192050	86460	19270	3713	8227	2098900

Для удобства вычислений составляем вспомогательную таблицу.

По правилу умножения матриц вычислим

$$x^T x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ 25 & 32 & \dots & 21 \\ 14 & 16 & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 25 & 14 \\ 1 & 32 & 16 \\ & \dots & \\ 1 & 21 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 610 & 251 \\ 610 & 19\,270 & 8227 \\ 251 & 8227 & 3713 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу, которую обозначим $\left(x^T x\right)^{-1}$. По определению, матрицей, обратной к матрице A, называется матрица A^{-1}, такая, что $AA^{-1} = Y$, где Y — единичная матрица. Обозначим a_{ij} элементами матрицы A^{-1}. Тогда $a_{ij} = \dfrac{(-1)^{i+j} M_{ij}}{|A|}$, где M_{ij} — матрица, получаемая из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца $|A|$ — определитель матрицы $x^T x$.

Для рассматриваемого примера

$$|A| = \begin{vmatrix} 20 & 610 & 251 \\ 610 & 19\,270 & 8227 \\ 251 & 8227 & 3713 \end{vmatrix} = 955\,000.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 19\,270 & 8227 \\ 8227 & 3713 \end{vmatrix} = 3\,865\,981,$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 610 & 8227 \\ 251 & 3713 \end{vmatrix} = 199\,953, \quad \text{и т.д.}$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 20 & 610 \\ 610 & 19\,270 \end{vmatrix} = 13\,300.$$

$$a_{11} = (-1)^2 \frac{M_{11}}{|A|} = \frac{3\,865\,981}{955\,000} = 4{,}048,$$

$$a_{12} = (-1)^3 \frac{M_{12}}{|A|} = \frac{199\,953}{955\,000} = -0{,}209, \quad \text{и т.д.}$$

$$a_{33} = (-1)^6 \frac{M_{33}}{|A|} = \frac{13\,300}{955\,000} = 0{,}014.$$

В результате получим обратную матрицу.

$$\left(x^T x\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 610 & 251 \\ 610 & 19\,270 & 8227 \\ 251 & 8227 & 3713 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4,0482 & -0,2094 & 0,1903 \\ -0,2094 & 0,0118 & -0,0120 \\ 0,1903 & -0,0120 & 0,0139 \end{pmatrix}.$$

По правилу умножения матриц вычислим $x^T y$.

$$x^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ 25 & 32 & \dots & 21 \\ 14 & 16 & & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 330 \\ 360 \\ \dots \\ 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,350 \\ 192\,050 \\ 86\,460 \end{pmatrix}.$$

Вектор оценок коэффициентов регрессии равен:

$$\bar{b} = (x^T x)^{-1} x^T y = \begin{pmatrix} 4,0482 & -0,2094 & 0,1903 \\ -0,2094 & 0,0118 & -0,0120 \\ 0,1903 & -0,0120 & 0,0139 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 6350 \\ 192\,050 \\ 86\,460 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1994,14 \\ -101,02 \\ 105,60 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $b_0 = 1994{,}14$; $b_1 = -101{,}02$; $b_2 = 105{,}60$. Уравнение множественной регрессии примет вид:

$$\hat{y} = 1994{,}14 - 101{,}02x_1 + 105{,}60x_2.$$

31.2. Некоторые особенности множественной регрессии и корреляции

Множественная регрессия представляет регрессию результативного признака с двумя или большим числом независимых переменных вида

$$y = f(x_1, \quad x_2, \dots, x_k).$$

В уравнении регрессии случайная величина y зависит не только от значений независимых переменных x_1, x_2,..., x_k, но и от ряда других факторов, влияющих на y, которые не могут быть проконтролированы. В связи с этим

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k) + e,$$

где e — случайная величина, характеризующая отклонения результативного признака от теоретического, найденного по уравнению регрессии.

При исследовании зависимости результативного признака y от ряда факторов x_1, x_2,...,x_k необходимо решать такие же задачи, что и при парной связи двух переменных x и y:

— определение вида регрессии;

— оценка параметров;

— определение тесноты связи, если переменные x и y случайные величины.

Однако наряду с этими задачами необходимо рассматривать и ряд задач, характерных лишь для множественной регрессии и корреляции.

К таким задачам относится отбор факторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$, существенно влияющих на фактор , при наличии возможностей внутренней взаимосвязи между переменными $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Такой отбор требует прежде всего глубокого теоретического и практического знания качественной стороны рассматриваемых экономических явлений.

Отбор факторов осуществляется обычно в несколько этапов. Сначала отбираются факторы, связанные с изучаемым явлением, на основе данных теоретического исследования (экономическая теория, заключения специалиста и т. д.). При этом для построения множественной регрессии и корреляции отбираются факторы, которые могут быть количественно измерены.

Далее отобранные факторы подвергаются математико-статистической проверке существенности их влияния на изучаемый показатель. Такая проверка, как правило, включает анализ матрицы парных корреляций, частных корреляций, проверку существенности (значимости) коэффициентов регрессии на основе t-критерия, анализ остатков (отклонений) и т. д.

Особенностью множественной регрессии и корреляции является необходимость различать случаи корреляционной множественной связи, когда переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — случайные величины; регрессионной, если переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — неслучайные величины, а также смешанный случай, когда некоторые из переменных — случайные величины, другие — неслучайные. В случае корреляционной зависимости следует вычислять и интерпретировать коэффициенты корреляции,

при регрессионной зависимости — это не имеет смысла, а при наличии как случайных, так и неслучайных переменных коэффициенты корреляции следует вычислять только между случайными переменными.

31.3. Отбор факторов и методы построения множественной линейной корреляционной и регрессионной зависимости

Множественная линейная корреляционная зависимость

Рассмотрим отбор факторов для построения множественной линейной зависимости, когда переменные $y, x_1, x_2, \ldots, x_p$ являются случайными величинами (обычно предполагается, что их совместное распределение нормальное).

Наиболее простой формой зависимости и достаточно строго обоснованной для случая совместного нормального распределения является линейная, т.е. зависимость вида

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p. \qquad (31.5)$$

Такая зависимость во многих случаях достаточно хорошо отражает сложившиеся экономические взаимосвязи. Исходная информация для построения зависимости (31.5) обычно задается в виде некоторой таблицы следующего вида (табл. 31.2).

Таблица 31.2

№	Факторы, для которых получены данные					
	x_1	x_2	x_3	...	x_k	y
1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	...	x_{k1}	y_1
2	x_{12}	x_{22}	x_{32}	...	x_{k2}	y_2
3	x_{13}	x_{23}	x_{33}	...	x_{k3}	y_3
...	...	...	...	...	...	...
n	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}	...	x_{kn}	y_n

Следует определить, все ли переменные необходимо включать в уравнение (31.5) или есть переменные, которые существенно не влияют на величину y, и их нецелесообразно включать в (31.5). В первом случае $p = k$, во втором $p < k$.

Для решения этого часто используется таблица, составленная из коэффициентов парной корреляции. Элементами такой таблицы являются коэффициенты парной корреляции для всех k факторов (табл. 31.3).

Таблица 31.3

	y	x_1	x_2	x_3	...	x_k
y	1	r_{yx_1}	r_{yx_2}	r_{yx_3}	...	r_{yx_k}
x_1	r_{x_1y}	1	$r_{x_1x_2}$	$r_{x_1x_3}$	...	$r_{x_1x_k}$
x_2	r_{x_2y}	$r_{x_2x_1}$	1	$r_{x_2x_3}$	...	$r_{x_2x_k}$
x_3	r_{x_3y}	$r_{x_3x_1}$	$r_{x_3x_2}$	1	...	$r_{x_3x_k}$
...	...	...	...	...	...	...
x_k	r_{x_ky}	$r_{x_kx_1}$	$r_{x_kx_2}$	$r_{x_kx_3}$	...	1

В клетках таблицы записаны парные коэффициенты корреляции, например, r_{31} — парный коэффициент корреляции между переменными x_3 и x_1 и др. Коэффициенты r_{ij} и r_{ji}, а также r_{x_iy} и r_{yx_i} совпадают, так как теснота связи между переменными y и x_i такая же, как между x_i и y, аналогично — для x_i и x_j. Поэтому таблицу записывают в упрощенной симметричной форме (треугольная форма) (табл. 31.4).

Таблица 31.4

	y	x_1	x_2	x_3	...	x_k
y	1	r_{yx_1}	r_{yx_2}	r_{yx_3}	...	r_{yx_k}
x_1	—	1	r_{yx_2}	$r_{x_1x_3}$	...	$r_{x_1x_k}$
x_2	—	—	1	$r_{x_2x_3}$	...	$r_{x_2x_k}$
x_3	—	—	—	1	...	$r_{x_3x_k}$
...	...	...	...	...	...	...
x_k	—	—	—	—	—	1

По данным такой таблицы можно примерно оценить, какие факторы существенно влияют на переменную y, а какие — неущественно, а также выявить взаимосвязь между факторами.

Пример 2. Пусть получена таблица (табл. 31.5).

Таблица 31.5

	y	x_1	x_2	x_3
y	1	0,6	0,5	0,7
x_1		1	0,04	0,03
x_2			1	0,1
x_3				1

На основании указанных в таблице парных коэффициентов корреляции можно сделать вывод, что связь факторов x_1, x_2, x_3 с фактором y существенная (коэффициенты корреляции соответственно 0,6; 0,5; 0,7). Теснота связи между факторами x_1, x_2, x_3 незначительная (коэффициенты корреляции 0,04, 0,03, 0,1).

Такая информация наиболее благоприятна для построения уравнения (31.5).

Пример 3. Рассмотрим табл. 31.6.

Таблица 31.6

	y	x_1	x_2	x_3	x_4
y	1	0,65	0,6	0,5	0,03
x_1		1	0,5	0,9	0,3
x_2			1	0,3	0,2
x_3				1	0,2
x_4					1

Согласно данной таблице величина коэффициента парной корреляции между y и x_4 мала, в связи с этим нецелесообразно включать фактор x_4 в уравнение (31.5). Высок коэффициент парной корреляции между переменными x_1 и x_3 (коэффициент корреляции 0,9), что показывает их тесную корреляционную взаимосвязь. В этом случае не включают одновременно

в уравнение (31.5) x_1 и x_3, а вводят один из них в зависимости от их смысла и мнения исследователя. Нецелесообразно включать в уравнение одновременно показатели, представляющие сумму некоторых факторов или их составных частей, а также характеризующие один и тот же фактор, выраженный в различных единицах измерения, например, в абсолютных и относительных.

Обычно кроме анализа таблицы парных коэффициентов корреляции для отбора существенных факторов вычисляют частные коэффициенты корреляции, определяют надежность полученных коэффициентов регрессии по t-критерию и по другим методам.

При анализе парных коэффициентов корреляции связи в табл. 31.6 можно обратить внимание, что связи между изучаемыми переменными довольно сложным образом переплетены. Поэтому целесообразно рассмотреть вопрос о взаимосвязи между факторами при условии, что некоторые или все остальные факторы остаются неизменными.

Для выявления такой взаимосвязи используются коэффициенты *частной корреляции.*

Вычислим коэффициент частной корреляции между факторами y и x_1 при условии, что фактор x_2 закреплен на постоянном уровне (остается неизменным). Тогда он равен:

$$r_{yx_1(x_2)} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{\sqrt{1 - r^2_{yx_2}}\,\sqrt{1 - r^2_{x_1x_2}}}. \qquad (31.6)$$

Если закреплен лишь один фактор, то такой коэффициент называется коэффициентом частной корреляции первого порядка. Если закреплены два фактора, то — второго порядка и т.д. Тогда обычный коэффициент парной корреляции можно назвать частным коэффициентом корреляции нулевого порядка.

В выражении (31.6) коэффициент первого порядка (закреплен один фактор x_2 в скобках) выражается через коэффициенты нулевого порядка.

Коэффициенты частной корреляции второго порядка можно выразить через коэффициенты первого порядка при помощи

соотношения

$$r_{yx_1(x_2x_3)} = \frac{r_{yx_1(x_2)} - r_{yx_3(x_2)}r_{x_1x_3(x_2)}}{\sqrt{1 - r^2_{yx_3(x_2)}}\sqrt{1 - r^2_{x_1x_3(x_2)}}}. \qquad (31.7)$$

Аналогично можно записать соотношения, выражающие коэффициент частной корреляции k-го порядка через коэффициенты $(k-1)$-го порядка.

Следует отметить, что малость коэффициентов частной корреляции низших порядков не гарантирует малости коэффициентов более высокого порядка. Например, r_{yx_1} и $r_{x_1x_2}$ могут быть оба малыми, а $r_{yx_1(x_2)}$ может быть велик.

Предположим, $r_{yx_2} = 0$, тогда (31.6) запишется в виде

$$r_{yx_1(x_2)} = \frac{r_{yx_1}}{\sqrt{1 - r^2_{x_1x_2}}}, \qquad (31.8)$$

если r_{yx_1} мал, а $r_{x_1x_2}$ велик, то $r_{yx_1(x_2)}$ может быть также большим.

Пример 4. Дано $r_{yx_1} = 0{,}095$, $r_{x_1x_2} = 0{,}994$. Вычислить $r_{yx_1(x_2)}$.

Решение.

$$r_{yx_1(x_2)} = 0{,}095/\sqrt{1 - 0{,}99} = 0{,}95.$$

Коэффициенты частной корреляции изменяются по абсолютной величине от 0 до 1.

После предварительного отбора факторов на основе парных и частных коэффициентов корреляции производятся оценки параметров $a_0, a_1, \ldots, a_p$, обычно они осуществляются по методу наименьших квадратов (МНК). Система нормальных уравнений в случае линейной зависимости (31.5) имеет вид

$$\begin{cases} a_0 n + a_1\sum x_{1i} + a_2\sum x_{2i} + \ldots + a_p\sum x_{pi} = \sum y_i, \\ a_0\sum x_{1i} + a_1\sum x_{1i}^2 + a_2\sum x_{1i}x_{2i} + \ldots + a_p\sum x_{1i}x_{pi} = \sum x_{1i}y_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\sum x_{pi} + a_1\sum x_{1i}x_{pi} + a_2\sum x_{pi}x_{2i} + \ldots + a_p\sum x_{pi}^2 = \sum x_{pi}y_i. \end{cases}$$

Решение такой системы может осуществляться по теореме Крамера (с использованием определителей), методом Гаусса (последовательным исключением неизвестных) и другими методами.

Для определения тесноты связи между фактором y и совокупностью факторов $x_1, x_2, \ldots, x_p$ в случае линейной зависимости применяется *коэффициент множественной корреляции* R. Коэффициент изменяется в интервале от 0 до 1, причем в отличие от коэффициентов парной корреляции он берется всегда по абсолютной величине. Если $R = 0$, то нет линейной корреляционной связи между y и $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Если $R = 1$, то связь функциональная. Выражение, по которому вычисляют коэффициент корреляции, имеет вид

$$R = \sqrt{\frac{a_1 r_{yx_1}\sigma_{x_1} + a_2 r_{yx_2}\sigma_{x_2} + \ldots + a_p r_{yx_p}\sigma_{xp}}{\sigma_y}}, \qquad (31.9)$$

где a_i — коэффициенты регрессии уравнения (31.6); r_{yx_i} — парные коэффициенты корреляции; σ_{x_i} — среднее квадратическое отклонение фактора x_i; σ_y — среднее квадратическое отклонение y.

Обычно интерпретируется не сам коэффициент корреляции R, а его квадрат R^2, который называется *коэффициентом множественной (общей) детерминации.* Последний показывает, какая часть общей дисперсии объясняется за счет вариации, линейной комбинации аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_p$ при данных значениях коэффициентов регрессии. Например, если коэффициент множественной корреляции $R = 0{,}7$, то коэффициент множественной детерминации $R^2 = 0{,}49$, т.е. 49% вариации объясняется факторами, включенными в уравнение регрессии, а 51% — прочими факторами.

Существенность отличия от нуля выборочного коэффициента множественной корреляции проверяется на основе F-критерия (критерия Фишера). Вычисляется величина

$$F = R^2(n - p - 1)/(1 - R^2)p, \qquad (31.10)$$

где R — множественный коэффициент корреляции; p — число факторов $x_1, x_2, \ldots, x_p$; n — число наблюдений.

Найденное значение критерия F сравнивается с $F_{\text{табл}}$ (Приложение, табл. 4) при числе степеней свободы $v_1 = p$, $v_2 = n - p - 1$ и заданном уровне значимости α. Если расчетное значение $F > F_{\text{табл}}$ превышает табличное, то гипотеза о равенстве коэффициента множественной корреляции нулю отвергается и связь считается существенной.

Пример 5. Дано: $R = 0{,}75$, $p = 4$, $n = 16$. Определить существенность связи.

Решение. Вычислим критерий F по формуле (31.10):

$$F = 0{,}5625 \cdot (16 - 4 - 1)/4 \cdot (1 - 0{,}5625) = 3{,}53.$$

$F_{\text{табл}} = 3{,}36$ при $v_1 = 4$, $v_2 = 16-4-1 = 11$ и уровне значимости 0,05.

Расчетное значение F-критерия превышает табличное, поэтому можно сделать вывод о существенности связи.

31.4. Множественная линейная регрессионная зависимость

Если факторы-аргументы не являются случайными величинами, то коэффициенты корреляции не могут быть использованы при построении уравнения регрессии, так как не могут быть интерпретированы как показатели тесноты связи.

Существенность вводимых факторов в случае линейной множественной регрессии может быть проверена одновременно с существенностью коэффициентов регрессии.

Для проверки существенности вычисляется отношение

$$t_i = a_i/\sigma_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{31.11}$$

где a_i — коэффициент множественной регрессии; σ_i — среднее квадратическое отклонение этого коэффициента.

Если $t_i < t_{\text{табл}}$, взятого по таблицам t-распределения Стьюдента, то с заданной вероятностью не отвергается гипотеза, что соответствующий коэффициент регрессии a_i в генеральной совокупности (который не известен и который нужно оценить по данным выборки) равняется нулю. При этом i-й фактор

в таком случае признается несущественным для построенного уравнения регрессии.

При проведении исследования может оказаться, что вычисленные значения t для нескольких факторов не превышают $t_{\text{табл}}$. В этом случае несущественные факторы из уравнения регрессии исключаются поочередно, начиная с наименьшего по абсолютной величине t. Фактор, соответствующий минимальному значению t, из уравнения регрессии исключается, и заново решается система нормальных уравнений. Затем вновь вычисляются значения t для всех оставшихся в уравнении коэффициентов, определяется минимальное значение t, которое сопоставляется с $t_{\text{табл}}$. Если окажется, что $t_{\min} < t_{\text{табл}}$, то фактор, имеющий $t_{\min}$, исключается.

Процесс исключения коэффициентов повторяется до тех пор, пока не будет выполняться соотношение $t_{\min} \geq t_{\text{табл}}$. В этом случае все оставшиеся в уравнении факторы существенны.

Проводить исключение из уравнения регрессии одновременно нескольких факторов, имеющих $t < t_{\text{табл}}$, нецелесообразно, так как после исключения одного несущественного фактора меняются коэффициенты регрессии других факторов, значения t и несущественные факторы после пересчета могут оказаться существенными.

Аналогичный подход осуществляется и при наличии корреляционной зависимости, но на последней стадии отбора существенных факторов. Проверка значимости уравнения регрессии осуществляется по критерию Фишера:

$$F = \sigma_y^2 / \sigma_{\text{ост}}^2 \tag{31.12}$$

с числом степеней свободы $v_1 = n - 1$ и $v_2 = n - p - 1$. Здесь

$$\sigma_y^2 = \sum (y_i - y)^2 / (n - 1); \tag{31.13}$$

$$\sigma_{\text{ост}}^2 = \sum (y_i - y_p)^2 / (n - p - 1), \tag{31.14}$$

где y_i — значения y, полученные по данным наблюдений; y_p — расчетные значения y, полученные для соответствующих значений $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Полученное значение F сравнивается с табличным $F_{\text{табл}}$ при выбранном уровне значимости. Если окажется $F > F_{\text{табл}}$, то гипотеза о том, что $x_1, x_2, \ldots, x_p$ не имеют существенного влияния на y, отвергается.

Если $F > F_{\text{табл}}$, то следует ввести некоторые другие факторы, влияющие на показатель y, или перейти к построению нелинейной множественной регрессии.

При построении регрессионного уравнения весьма существенную информацию о модели может дать рассмотрение остатков e.

Обычно точное распределение остатков неизвестно, можно оценить эту величину по отклонениям фактических значений y_i от расчетных y_i':

$$y_1 - y_1' = e_1, \quad y_2 - y_2' = e_2, \quad \ldots, \quad y_n - y_n' = e_n.$$

При построении регрессионного уравнения следует проверять автокорреляцию отклонений. Под *автокорреляцией* последовательности значений какого-либо фактора понимается корреляция между членами этой последовательности, передвинутой на несколько единиц. Например, корреляция между рядами

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \quad \text{и} \quad e_{L+1}, e_{L+2}, \ldots, e_{L+n},$$

где L — положительное число, которое называют *лагом*.

В экономике часто исследуется случай, когда $L = 1$, т.е. рассматривается корреляция между рядами

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \quad \text{и} \quad e_2, e_3, \ldots, e_{n+1}.$$

Автокорреляция обычно вычисляется на основе некоторого объема исходных данных n, в которых наблюдения $(n+1)$, $(n+2), \ldots, (n+L)$ отсутствуют, и их заменяют первыми результатами наблюдений, т.е. за последним членом x_n снова следуют члены $x_1, x_2, \ldots$.

Например, для лага $L = 1$ циклическим коэффициентом автокорреляции будет коэффициент корреляции между рядами:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \quad \text{и} \quad x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1.$$

Наиболее распространенным методом проверки наличия автокорреляции рядов является критерий Дарбина–Уотсона.

Для проверки автокорреляции вычисляют величину

$$d = \sum (e_t - e_{t-1})^2 \Big/ \sum e_t^2. \qquad (31.15)$$

Расчетное значение d сравнивается с табличным. Таблица значений критерия с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$ дана в Приложении (табл. 3). В таблице указаны два значения критерия — d_1 и d_2, а также v и n, причем d_1, d_2 — соответственно нижняя и верхняя границы теоретических значений, v — число факторов в модели, n — число уровней временного ряда. При сравнении расчетного значения с табличным возможны случаи:

— если $d < d_1$, то можно сделать вывод о наличии автокорреляции;

— если $d > d_2$, то можно сделать вывод об отсутствии автокорреляции;

— если $d_1 \leq d \leq d_2$, то необходимо дальнейшее исследование автокорреляции.

В таблицах обычно даются критические значения d_1, d_2, для 1%-, 2,5%- и 5%-го уровня значимости.

Чтобы проверить значимость отрицательной автокорреляции, нужно вычислить величину $(4 - d)$. Затем проверка осуществляется аналогично тому, как и в случае положительной автокорреляции.

Стандартизированное уравнение линейной множественной регрессии

Если коэффициенты линейной множественной регрессии рассматривать в качестве показателей влияния факторов, то следует иметь в виду, что коэффициенты регрессии в уравнении (31.1) между собой прямо не сравнимы. Их численные значения зависят от выбранных единиц измерения каждого фактора. Чтобы коэффициенты регрессии стали сравнимы, приведем коэффициенты регрессии к *стандартизованному масштабу.*

Для этого все переменные выражают в безразмерных, так называемых стандартизованных, единицах измерения при помощи следующих соотношений:

$$t_y = (y - \bar{y})/\sigma_y; \qquad t_{x_i} = (x_i - \bar{x}_i)/\sigma_{x_i}, \tag{31.16}$$

где y и x_i — значения соответствующих факторов в исходном (натуральном) масштабе; $\bar{y}$ и $\bar{x}_i$ — среднее значение факторов y и x_i; t_y и t_{x_i} — соответствующие значения фактора в стандартизованном масштабе.

Свободный член a_0 в *стандартизованном* уравнении линейной множественной регрессии отсутствует, т.е. уравнение можно записать в виде:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \ldots + \beta_p t_{x_p}. \tag{31.17}$$

Все переменные уравнения выражены в сравнимых единицах измерения. Коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ называются *коэффициентами регрессии в стандартизованном масштабе.* Для их определения необязательно решать снова систему нормальных уравнений. Переход от коэффициентов a_i к β_i $(i = \overline{1,n})$ и обратно может осуществляться по формуле

$$\beta_i = a_i \sigma_{x_i}/\sigma_y, \tag{31.18}$$

где σ_{x_i}, σ_y — соответственно средние квадратические отклонения.

Пример 6. Дано регрессионное уравнение $y = 2 + 4x_1 + 6x_2 + +14x_3$, $\sigma_{x_1} = 4$, $\sigma_{x_2} = 2$, $\sigma_{x_3} = 6$, $\sigma_y = 4$. Записать его в стандартизованном масштабе. Сравнить влияние рассматриваемых факторов на фактор y.

Решение. Вычислим коэффициенты регрессии уравнения в стандартизованном масштабе по формуле (31.18)

$$\beta_1 = a_1 \sigma_{x_1}/\sigma_y = 4 \cdot 4/4 = 4;$$
$$\beta_2 = a_2 \sigma_{x_2}/\sigma_y = 6 \cdot 2/4 = 3;$$

$$\beta_3 = a_3\sigma_{x_3}/\sigma_y = 14 \cdot 6/4 = 21.$$

Таким образом, уравнение в стандартизованном масштабе имеет вид:

$$t_y = 4t_{x_1} + 3t_{x_2} + 21t_{x_3}.$$

Коэффициенты регрессии 4, 3, 21 показывают влияние изменения каждой переменной на изменение фактора y. Все коэффициенты выражены в сравнимых единицах измерения. Чем больше $|\beta_i|$, тем сильнее влияет соответствующий факторный показатель на результативный. Таким образом, наибольшее влияние на y имеет фактор x_3. Факторы x_1 и x_2 оказывают примерно одинаковое влияние.

На практике часто используют уравнение регрессии в стандартизованном масштабе в виде

$$Y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p + \beta_{p+1} t, \qquad (31.19)$$

где Y, x_i — факторы y и x_i в стандартизованном масштабе.

Пример 7. Имеются данные по комплектующим материалам, трудовым ресурсам и средствам производства фирмы, необходимым для изготовления изделия.

После проведения всестороннего качественного анализа имеющейся исходной информации и матрицы парных коэффициентов корреляции были отобраны следующие факторы, которые необходимо включить в уравнение регрессии: y — реализация изделия, ден. ед.; x_1 — расход комплектующих материалов, ед.; x_2 — производственные издержки, ден. ед.; x_3 — материальные оборотные средства, ден. ед.; x_4 — фондовооруженность труда, ден. ед.

Введем в уравнение фактор времени, при этом уменьшим возможность автокорреляции.

По уравнению регрессии проверить значимость модели.

Решение. Решая задачу с использованием компьютерных программ, получим уравнение регрессии вида:

$$Y = 70{,}6 + 1{,}19x_1 - 0{,}89x_2 + 1{,}43x_3 + 0{,}18x_4 - 2{,}77t. \qquad (31.20)$$

Проверим значимость найденной модели. Выдвигаем гипотезу H_0: модель незначима. Конкурирующая гипотеза H_1: модель значима. Проверим гипотезу с помощью случайной величины.

Случайная величина F имеет распределение Фишера–Снедекора с $v_1 = n - 1$ и $v_2 = n - p - 1$ степенями свободы. Расчетное значение случайной величины $F_{\text{расч}} = 40{,}64$, критическое — $F_{\text{кр}}(\alpha, v_1, v_2) = F_{\text{кр}}(0{,}05; 12; 8) = 3{,}28$ (найдено по таблице критических точек распределения Фишера–Снедекора при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, $v_1 = 12$, $v_2 = 8$).

$F_{\text{расч}} > F_{\text{кр}}$, следовательно, нулевая гипотеза отвергается, справедлива конкурирующая. При 5%-м уровне значимости найденная модель значима.

Дадим экономическую интерпретацию коэффициентов регрессии. Коэффициент $a_1 = 1{,}19$ показывает, что с увеличением на 1 единицу расхода комплектующих материалов, реализация изделия увеличится в среднем на 1,19 ден. ед. Коэффициент $a_2 = -0{,}89$ показывает, что с увеличением производственных издержек на 1 ден. ед. реализация изделия снижается в среднем на 0,89 ден. ед. Аналогично экономически интерпретируются другие коэффициенты.

Многофакторная регрессионная модель в стандартизованном масштабе имеет вид:

$$Y = 0{,}135x_1 - 1{,}276x_2 + 2{,}134x_3 + 0{,}139x_4 - 0{,}693t.$$

Сравнивая коэффициенты по абсолютной величине, следует отметить, что наибольшее влияние на результативный показатель (реализация изделия) оказывают материальные оборотные средства (x_3), затем производственные издержки (x_2), приблизительно одинаковое влияние оказывают такие факторы, как расход комплектующих материалов (x_1) и фондовооруженность (x_4).

При экономическом анализе результатов решения задачи необходимо проанализировать совокупный коэффициент корреляции, составляющий высокую величину, равную 0,981.

Проверим значимость коэффициентов корреляции. Выдвигаем нулевую гипотезу H_0: $R_{\text{ген}} = 0$, конкурирующая гипотеза $R_{\text{ген}} \neq 0$.

Проверим гипотезу с помощью случайной величины

$$t = \left[R_B\sqrt{n-p-1}\right] \Big/ \sqrt{1-R_B^2}, \qquad (31.21)$$

которая имеет распределение Стьюдента с $k = n - p - 1$ степенями свободы.

$$t_{\text{расч}} = 14{,}2; \quad t(\alpha, k) = t_{\text{кр}}(0{,}01; 8) = 3{,}36.$$

Так как $t_{\text{расч}} > t_{\text{кр}}$, нулевая гипотеза отвергается, справедлива конкурирующая гипотеза.

В связи с тем что коэффициент корреляции близок к единице, то связь между рассматриваемыми показателями тесная. Чтобы дать количественную оценку тесноты взаимосвязи, найдем коэффициент детерминации $R^2 \cdot 100\% = 96{,}2\%$, который показывает, на сколько процентов в среднем вариация результативного показателя объясняется за счет вариации всех факторных признаков, включенных в модель. Таким образом, колеблемость реализации изделия в среднем на 96,2% объясняется совокупным влиянием факторов, включенных в модель.

УПРАЖНЕНИЯ

31.1. В табл. 31.7 указаны парные коэффициенты корреляции.

Таблица 31.7

	y	x_1	x_2	x_3	x_4
y	1	0,71	0,58	0,08	0,62
x_1	—	1	0,53	0,2	0,81
x_2	—	—	1	0,13	0,3
x_3	—	—	—	1	0,25
x_4	—	—	—	—	1

Провести анализ целесообразности включения заданных факторов в уравнение множественной регрессии.

31.2. Дано число наблюдений $n = 15$, число факторов $p = 3$, множественный коэффициент корреляции $R = 0{,}71$. С помощью критерия Фишера определить существенность связи при уровне значимости 0,95.

31.3. Дано регрессионное уравнение $y = -3{,}4 + 6{,}4x_1 + 2{,}8x_2 - -8{,}6x_3; \sigma_{x_1} = 10, \sigma_{x_2} = 8, \sigma_{x_3} = 6, \sigma_y = 4$. Записать его в стандартизованном масштабе. Сравнить влияние рассматриваемых факторов на фактор y.

31.4. Имеются исходные данные, представленные в табл. 31.8.

Таблица 31.8

Признак	Среднее значение	Среднее квадратическое отклонение
Среднемесячный душевой доход y, ден. ед.	86,8	11,44
Среднемесячная заработная плата одного работающего x_1, ден. ед.	54,9	5,86
Средний возраст безработного x_2, ден. ед.	33,5	0,58

Необходимо: 1. Построить уравнение множественной регрессии в стандартизованном и натуральном масштабах. Проанализировать влияние полученных коэффициентов на фактор y.

2. Рассчитать линейные коэффициенты частной корреляции и коэффициент множественной корреляции.

3. Проверить значимость найденной регрессионной модели.

31.5. В табл. 31.9 даны статистические данные о расходах на питание, душевом доходе и размере семьи для девяти групп семей.

Провести анализ зависимости расходов на питание от величины душевого дохода и размера семьи.

Таблица 31.9

№ п/п	Расход на питание y, ден. ед.	Душевой доход x_1, ден. ед.	Размер семей x_2
1	426	611	1,4
2	611	1520	2,0
3	860	2590	2,5
4	1050	3605	3,1
5	1290	4590	3,2
6	1348	5840	3,4
7	1525	7080	3,6
8	1820	9160	3,9
9	2342	16 850	3,6

Глава 32
ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

32.1. Элементы временного ряда

Каким бы видом производства или бизнеса ни занималась фирма, ей приходится планировать предпринимательскую деятельность на будущий период. При разработке краткосрочных и долгосрочных планов менеджеры вынуждены прогнозировать будущие значения таких важнейших показателей, как, например, объем продаж, издержки производства, ставки процента и т. д. Широкому внедрению методов прогнозирования способствовало развитие персональных компьютеров и статистических программных пакетов.

Под прогнозом понимается научно обоснованное описание возможных состояний систем в будущем или альтернативных путей и сроков достижения этого состояния, а процесс разработки прогнозов называют прогнозированием.

Классификация экономических прогнозов

В зависимости от объектов прогнозирования различают прогнозы научно-технические, экономические, социальные и т.д.

В зависимости от масштабности объекта прогнозирования экономические прогнозы могут охватывать все уровни: от прогнозов отдельных предприятий, производств (микроуровни) до развития отрасли в масштабе страны (макроуровень) или закономерностей мирового масштаба (глобальный уровень).

Временем упреждения при прогнозировании называют отрезок времени от момента, для которого имеются последние данные об изучаемом объекте, до момента, к которому относится прогноз.

По длительности времени упреждения различают следующие виды прогнозов:

— оперативные с периодом упреждения до 1 месяца;
— краткосрочные до 1 года;
— среднесрочные от 1 года до 5 лет;
— долгосрочные с периодом упреждения более 5 лет.

Наибольший практический интерес представляют оперативные и краткосрочные прогнозы.

Прогнозирование экономических процессов состоит из следующих этапов:

— постановка задачи и сбор необходимой информации для прогнозирования;
— первичная обработка исходной информации;
— определение возможных моделей прогнозирования;
— оценка параметров рассматриваемых моделей;
— проверка адекватности выбранных моделей;
— расчет характеристик моделей.

Виды временных рядов

Происходящие в экономических системах процессы в основном проявляются как ряд расположенных в хронологическом порядке значений определенного показателя, который в своих изменениях отражает развитие изучаемого явления.

Ряд наблюдений за значениями определенного показателя, упорядоченный в зависимости от возрастающих или убываю-

щих значений другого показателя, называют динамическим рядом, временным рядом, рядом динамики. Отдельные наблюдения временного ряда называются уровнями этого ряда.

Временные ряды бывают моментные, интервальные и производные. Моментные ряды характеризуют значения показателя на определенные моменты времени. Пример такого ряда представлен в табл. 32.1.

Таблица 32.1

Численность работников фирмы

Дата	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06
Численность работников, чел.	283	287	295	298	308	312

Интервальные ряды характеризуют значения показателя за определенные интервалы времени (табл. 32.2).

Таблица 32.2

Фонд заработной платы работников фирмы

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Фонд заработной платы, ден. ед.	1520	1590	1650	1710	1780	1890

Производные ряды получаются из средних или относительных величин показателя (табл. 32.3).

Таблица 32.3

Среднемесячная заработная плата работников фирмы

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Средняя заработная плата, ден. ед.	5400	5440	5430	5470	5475	5500

Уровни ряда могут иметь детерминированные или случайные значения. Ряд последовательных данных о количестве дней в месяце, квартале, годе являются примерами рядов с детерминированными значениями.

Прогнозированию подвергаются ряды со случайными значениями уровней. Каждый показатель таких рядов может иметь дискретную или непрерывную величину.

Требования к исходной информации

Важное значение для прогнозирования имеет выбор интервалов между соседними уровнями ряда. При слишком большом интервале времени могут быть упущены некоторые закономерности в динамике показателя. При слишком малом — увеличивается объем вычислений, могут появляться ненужные детали в динамике процесса.

Поэтому выбор интервала времени между уровнями ряда должен осуществляться конкретно для каждого процесса, причем удобнее иметь равноотстоящие друг от друга уровни.

Важным условием правильного отражения временным рядом реального процесса развития является сопоставимость уровней ряда. Несопоставимость чаще всего встречается в стоимостных характеристиках, изменениях цен, территориальных изменениях, укрупнениях предприятий и др. Для несопоставимых величин показателя неправомерно проводить прогнозирование.

Для успешного изучения динамики процесса необходимо, чтобы информация была полной, временной ряд имел достаточную длину, отсутствовали пропущенные наблюдения.

Уровни временных рядов могут иметь аномальные значения. Появление таких значений может быть вызвано ошибками при сборе, записи или передаче информации. Это ошибки технического порядка, или ошибки первого рода. Однако аномальные значения могут отражать реальные процессы, например, скачок курса доллара и др. Такие аномальные значения относят к ошибкам второго рода, они устранению не подлежат.

Для выявления аномальных уровней временных рядов можно использовать метод Ирвина.

Метод предполагает использование следующей формулы:

$$\lambda_t = |y_t - y_{t-1}|/\sigma_y, \quad t = \overline{1, n},$$

где σ_y — среднеквадратическое отклонение временного ряда $y_1, y_2, \ldots, y_t, \ldots, y_n$.

$$\sigma_y = \sqrt{\left[\sum (y_t - \bar{y})^2\right] \Big/ (n-1)},$$

$$\bar{y} = \sum y_t / n.$$

Расчетные значения $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ сравниваются с табличными значениями критерия Ирвина λ_α, и если оказываются больше табличных, то соответствующее значение y_t уровня ряда считается аномальным.

Значения критерия Ирвина для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ приведены в табл. 32.4.

Таблица 32.4

n	2	3	10	20	30	50	100
λ_α	2,8	2,3	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0

После выявления аномальных уровней необходимо определить причины их возникновения. Если они вызваны ошибками технического порядка, то они устраняются или заменой аномальных уровней соответствующими значениями по кривой, аппроксимирующей временной ряд, или заменой уровней средней арифметической двух соседних уровней ряда.

Ошибки, возникающие из-за воздействия факторов, имеющих объективный характер, устранению не подлежат.

Пример 1. Временной ряд задан в табличной форме (табл. 32.5). Проверить наличие аномальных значений.

Решение. Вычисленные значения заносим в таблицу.

$$\bar{y} = \sum y_t / n = 29{,}1/10 = 2{,}91,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\left[\sum (y_t - \bar{y})^2\right] \Big/ (n-1)} = \sqrt{7{,}66/9} = 0{,}92.$$

Исследуем на аномальные значения точки $t = 2$ и $t = 5$.

$$\lambda_2 = |y_2 - y_1| / \sigma_y = (1{,}9 - 1{,}6)/0{,}92 = 0{,}32.$$

Так как $\lambda_2 = 0{,}32$, $\lambda_{\text{табл}} = 1{,}5$ (для $n = 10$) и $0{,}32 < 1{,}5$, то уровень $t = 2$ — нормальный.

Таблица 32.5

t	y_t	$y_t - \bar{y}$	$(y_t - y)^2$
1	1,6	−1,31	1,72
2	1,9	−1,01	1,02
3	2,1	−0,81	0,66
4	2,4	−0,51	0,26
5	4,5	1,59	2,53
6	2,8	−0,11	0,01
7	3,1	0,19	0,04
8	3,3	0,39	0,15
9	3,6	0,69	0,48
10	3,8	0,89	0,79
$\sum$	29,1		7,66

$$\lambda_5 = |y_5 - y_4|/\sigma_y = (4{,}5 - 2{,}4)/0{,}92 = 2{,}28.$$

Так как $\lambda_5 = 2{,}28$, $\lambda_{\text{табл}} = 1{,}5$ (для $n = 10$) и $2{,}28 > 1{,}5$, то уровень $t = 5$ — аномальный. Если уровень $t = 5$ относится к ошибкам 1-го рода, то его можно заменить на $y_5 = (2{,}4 + 4{,}5)/2 = 3{,}45$.

Компоненты временных рядов. Если во временном ряду проявляется длительная тенденция изменения экономического показателя, то в этом случае говорят, что имеет место тренд.

Пусть дан временной ряд

$$y_t = y_1, y_2, \ldots, y_t, \ldots, y_n.$$

Считают, что значения уровней временных рядов экономических показателей складываются из следующих составляющих (компонент): тренда, сезонной, циклической и случайной.

Под трендом понимают изменение, определяющее общее направление развития или основную тенденцию временного ряда. Тренд относят к систематической составляющей долговременного действия. Во временных рядах часто происходят регулярные колебания, которые относятся к периодическим составляющим рядов экономических процессов.

Если период колебаний не превышает 1 года, то их называют сезонными, более 1 года — циклическими составляющими. Чаще всего причиной сезонных колебаний являются природные, климатические условия, циклических — демографические циклы и др.

Тренд, сезонная и циклическая составляющая называются регулярными или систематическими компонентами временного ряда. Если из временного ряда удалить регулярную компоненту, то останется случайная компонента.

Если временной ряд представлен в виде суммы составляющих компонент, то модель называется аддитивной, если в виде произведения — то мультипликативной или смешанного типа.

$$y_t = u_t + s_t + v_t + e_t \text{ — аддитивная форма,}$$

$$y_t = u_t s_t v_t e_t \text{ — мультипликативная форма,}$$

$$y_t = u_t s_t v_t + e_t \text{ — смешанная форма,}$$

где y_t — уровни временного ряда; u_t — временной тренд; s_t — сезонная компонента; v_t — циклическая составляющая; e_t – случайная компонента.

Проверка гипотезы существования тенденции. Прогнозирование временных рядов целесообразно начинать с построения графика исследуемого показателя. Однако в нем не всегда прослеживается присутствие тренда. Поэтому в этих случаях необходимо выяснить, существует тенденция во временном ряду или она отсутствует.

Дан временной ряд:

$$y_1, y_2, \ldots, y_t, \ldots, y_n.$$

Рассмотрим критерий "восходящих и нисходящих" серий, согласно которому тенденция определяется по следующему алгоритму.

1. Для исследуемого временного ряда определяется последовательность знаков исходя из условий:

$$+, \quad \text{если} \quad y_{t+1} - y_t > 0,$$
$$-, \quad \text{если} \quad y_{t+1} - y_t < 0.$$

При этом если последующее наблюдение равно предыдущему, то учитывается только одно наблюдение.

2. Подсчитывается число серий $v(n)$. Под серией понимается последовательность подряд расположенных плюсов или минусов, причем один плюс или один минус считается серией.

3. Определяется протяженность самой длинной серии $l_{\max}(n)$.

4. По таблице (табл. 32.6) находится значение $l(n)$.

Таблица 32.6

Длина ряда (n)	$n \leq 26$	$26 < n \leq 153$	$153 < n \leq 170$
Значение $l(n)$	5	6	7

5. Если нарушается хотя бы одно из следующих неравенств, то гипотеза об отсутствии тренда отвергается с доверительной вероятностью 0,95.

$$v(n) > [(2n-1)/3 - 1{,}96\sqrt{(16n-29)/90}];$$

$$l_{\max}(n) \leq l(n).$$

Квадратные скобки неравенства означают целую часть числа. Под целой частью числа понимают целое число, не превосходящее само это число. Например, $[2,4] = 2$.

Пример 2. Дана динамика ежеквартального выпуска продукции фирмы в у.е. (табл. 32.7). С помощью критерия "восходящих и нисходящих" серий сделать вывод о присутствии или отсутствии тренда. Доверительную вероятность принять равной 0,95.

Таблица 32.7

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y_t	10	14	7	16	15	17	16	20	17	7	15	16	20	14	19	21

Решение. Определим последовательность знаков (табл. 32.8).

Число серий $v(n) = 11$, протяженность самой длинной серии $l_{\max}(n) = 3$, по таблице $l(n) = 5$. Запишем систему неравенств:

Таблица 32.8

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y_t	10	14	7	16	15	17	16	20	17	7	15	16	20	14	19	21
δ_i		+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	+	+	−	+	+

$$11 > [(2 \cdot 16 - 1)/3 - 1{,}96\sqrt{(16 \cdot 16 - 29)/90}],$$
$$3 \leq 5; \quad 11 > 7; \quad 3 \leq 5.$$

Оба неравенства выполняются, поэтому тренд в динамике выпуска продукции фирмы отсутствует с доверительной вероятностью 0,95.

32.2. Основные показатели динамики экономических процессов

Основные показатели динамики

Для количественной оценки динамики экономических процессов применяют такие статистические показатели, как абсолютные приросты, темпы роста и прироста. Они подразделяются на цепные, базисные и средние.

Если сравнение уровней временного ряда осуществляется с одним и тем же уровнем, принятым за базу, то показатели называются базисными. Если сравнение осуществляется с переменной базой и каждый последующий уровень сравнивается с предыдущим, то вычисленные показатели называются цепными.

Формулы для вычисления цепных, базисных и средних абсолютных приростов, темпов роста и темпов прироста даны в табл. 32.9. В формулах приняты обозначения: $y_1, y_2, \ldots, y_t, \ldots$ $\ldots, y_n$ — уровни временного ряда; n — длина ряда; $y_б$ — уровень временного ряда, принятый за базу сравнения.

Описание динамики ряда средним приростом соответствует его представлению в виде прямой, проходящей через две крайние точки. Для получения прогнозного значения на один шаг вперед достаточно к последнему наблюдению добавить значение среднего абсолютного прироста:

$$y_{n+1} = y_n + \overline{\Delta y}, \tag{32.1}$$

Таблица 32.9

Обозначения	Абсолютный прирост	Темп роста	Темп прироста
Цепной	$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$	$T_t = = y_t/y_{t-1} \cdot 100\%$	$K_t = T_t - 100\%$
Базисный	$\Delta y_{\delta t} = y_t - y_\delta$	$T_{\delta t} = = y_t/y_\delta \cdot 100\%$	$K_{\delta t} = T_t - 100\%$
Средний	$\overline{\Delta y_t} = = (y_n - y_1)/(n-1)$	$\bar{T} = (y_n/y_1)^{1/(n-1)} \cdot 100\%$	$\bar{K} = \bar{T} - 100\%$

где y_n — значение показателя в точке n временного ряда; y_{n+1} — прогнозное значение показателя в точке $n+1$; $\overline{\Delta y}$ — значение среднего прироста временного ряда.

Получение прогнозного значения по формуле (32.1) корректно, если динамика ряда близка к линейной. На такой равномерный характер развития динамики указывают примерно одинаковые цепные абсолютные приросты.

Использование среднего темпа роста (среднего темпа прироста) для описания динамики развития ряда соответствует его представлению в виде показательной или экспоненциальной кривой, проведенной через две крайние точки, и характерно для процессов, изменение динамики которых происходит с постоянным темпом роста. Прогнозное значение на i шагов вперед определяется по формуле

$$y_{n+i} = y_n \cdot \bar{T}^i, \tag{32.2}$$

где y_{n+i} — прогнозная оценка значения показателя в точке $n+i$, $\bar{T}$ — средний темп роста, выраженный не в процентах.

Недостатком прогнозирования с использованием среднего прироста и среднего темпа роста является то, что они учитывают начальный и конечный уровни ряда, исключая влияние промежуточных уровней. Тем не менее они используются как простейшие, приближенные способы прогнозирования.

Пример 3. Ежеквартальная динамика фонда заработной платы работников фирмы (в ден. ед.) представлена в табл. 32.10.

Обосновать правомерность использования среднего прироста для определения прогнозного значения фонда заработной платы в 6-м квартале.

Таблица 32.10

t	1	2	3	4	5
y_t	252	253	254,2	255,3	256,5

Решение. Найдем цепные абсолютные приросты:

$$\Delta y_2 = y_2 - y_1 = 253 - 252 = 1,$$
$$\Delta y_3 = y_3 - y_2 = 254{,}2 - 253 = 1{,}2,$$
$$\Delta y_4 = y_4 - y_3 = 255{,}3 - 254{,}2 = 1{,}1,$$
$$\Delta y_5 = y_5 - y_4 = 256{,}5 - 255{,}3 = 1{,}2.$$

Цепные абсолютные приросты изменяются от 1 до 1,2, их изменения примерно одинаковы, что свидетельствует о близости ежеквартальной динамики фонда заработной платы фирмы к линейной. Поэтому правомерно определить прогнозное значение y'_6 с помощью среднего прироста Δy:

$$\overline{\Delta y} = (y_5 - y_1)/(n-1) = (256{,}5 - 252)/(5-1) = 1{,}125,$$

$$y'_6 = y_5 + \Delta y = 256{,}5 + 1{,}125 = 257{,}625.$$

Пример 4. Изменение ежеквартальной динамики фонда заработной платы работников фирмы происходило примерно с постоянным темпом роста в течение 5 кварталов. Фонд заработной платы в 1-м квартале составлял 252 ден. ед., а в 5-м квартале — 256,5 ден. ед.

Определить прогноз фонда заработной платы работников фирмы в 6-м квартале, используя средний темп роста.

Решение. По условию, изменение фонда заработной платы происходило примерно с постоянным темпом роста в течение 5 кварталов. Поэтому правомерно использовать средний темп роста для расчета прогноза фонда в 6-м квартале.

Средний темп роста равен:

$$\bar{\text{T}} = (y_n/y_1)^{1/(n-1)} \cdot 100,$$

$$\bar{\text{T}} = (y_5/y_1)^{1/4} \cdot 100 = (256{,}5/252)^{1/4} \cdot 100 = 100{,}44.$$

Таким образом, прогноз фонда заработной платы сотрудников фирмы составит:

$$y'_6 = y_5 \cdot \bar{\text{T}} = 256{,}5 \cdot 1{,}0044 = 257{,}6 \text{ ден. ед.}$$

Сглаживание временных рядов

Предварительный анализ временных рядов экономических показателей заключается в выявлении аномальных значений уровней ряда, которые не соответствуют возможностям рассматриваемой экономической системы, а также в определении наличия тренда.

Наиболее распространенным приемом для устранения аномальных значений показателей и отсутствия тенденции временного ряда является сглаживание временного ряда. При этом производится замена фактических уровней временного ряда расчетными, что способствует более четкому проявлению тенденции.

Скользящие средние позволяют сгладить случайные и периодические колебания временного ряда.

Сглаживание по простой скользящей средней. Наиболее распространенной процедурой сглаживания является метод простой скользящей средней. Сначала для временного ряда определяется интервал сглаживания (g). Если необходимо сгладить мелкие колебания, то интервал сглаживания берут по возможности большим, если нужно сохранить более мелкие колебания, то интервал сглаживания уменьшают. Для первых g уровней временного ряда вычисляется их среднее арифметическое значение. Это будет сглаженное значение уровня ряда, находящегося в середине интервала сглаживания. Затем интервал сглаживания сдвигается на один уровень вправо, повторяется вычисление средней арифметической и т. д. В результате такой процедуры получим ряд сглаженных значений, при этом в зависимости от g первые и последние уровни теряются.

Удобно длину интервала сглаживания g брать в виде нечетного числа, в этом случае расчетное значение скользящей средней будет приходиться на средний интервал ряда.

Например, для интервала $g = 3$ сглаженные уровни рассчитываются по формуле

$$\bar{y}_t = (y_{t-1} + y_t + y_{t+1})/3.$$

Чтобы не потерять первый и последний уровни ряда, их можно вычислить по формулам

$$\bar{y}_1 = (5y_1 + 2y_2 - y_3)/6,$$

$$\bar{y}_n = (-y_{n-2} + 2y_{n-1} + 5y_n)/6.$$

Метод простой скользящей средней дает хорошие результаты в динамических рядах с линейной тенденцией развития.

Сглаживание с использованием взвешенной скользящей средней. Для рядов с нелинейной тенденцией развития необходимо применять метод взвешенной скользящей средней. Метод отличается от метода простой скользящей средней тем, что уровни, входящие в интервал сглаживания, суммируются с разными весами. Для полиномов 2-го и 3-го порядков по 5-членной взвешенной скользящей средней центральное значение интервала определяется по формуле:

$$y_t = (-3y_{t-2} + 12y_{t-1} + 17y_t + 12y_{t+1} - 3y_{t+2})/35.$$

Весовые коэффициенты при сглаживании по полиномам 2-го и 3-го порядков в зависимости от длины интервала сглаживания представлены в табл. 32.11.

Таблица 32.11

Длина интервала сглаживания	Весовые коэффициенты
5	(−3, +12, +17)/35
7	(−2, +3, +6, +7)/21
9	(−21, +14, +39, +54, +59)/231

Пример 5. По данным динамики урожайности за 10 лет, представленным в табл. 32.12, рассчитать 3-, 5-летние скользящие средние простые; 5-летние скользящие средние взвешенные; сравнить результаты расчетов.

Таблица 32.12

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	16,3	21,2	18,1	8,7	16,3	17,3	20,9	15,4	19,7	21,7

Решение. Вычислим 3-летние скользящие средние простые:

$$y_2 = (16{,}3 + 21{,}2 + 18{,}1)/3 = 18{,}5,$$

$$y_3 = (21{,}2 + 18{,}1 + 8{,}7)/3 = 16{,}0 \text{ и т. д.}$$

Найдем 5-летние скользящие средние простые:

$$y_3 = (16{,}3 + 21{,}2 + 18{,}1 + 8{,}7 + 16{,}3)/5 = 16{,}1,$$

$$y_4 = (21{,}2 + 18{,}1 + 8{,}7 + 16{,}3 + 17{,}3)/5 = 16{,}3 \text{ и т. д.}$$

Определим 5-летние скользящие средние взвешенные:

$$y_3 = (-3 \cdot 16{,}3 + 12 \cdot 21{,}2 + 17 \cdot 18{,}1 + 12 \cdot 8{,}7 - 3 \cdot 16{,}3)/35 = 16{,}2,$$

$$y_4 = (-3 \cdot 21{,}2 + 12 \cdot 18{,}1 + 17 \cdot 8{,}7 + 12 \cdot 16{,}3 - 3 \cdot 17{,}3)/35 = 12{,}7 \text{ и т. д.}$$

Вычисленные значения занесем в табл. 32.13.

Таблица 32.13

t	y_t	3-летняя скользящая простая	5-летняя скользящая простая	5-летняя скользящая взвешенная
1	16,3	—	—	—
2	21,2	18,5	—	—
3	18,1	16,0	16,1	16,2
4	8,7	14,4	16,3	12,7
5	16,3	14,1	16,3	13,5
6	17,3	18,2	15,7	19,1
7	20,9	17,9	17,9	18,3
8	15,4	18,7	19,0	18,1
9	19,7	18,9	—	—
10	21,7	—	—	—

Сравнивая значения y_t 3- и 5-летних скользящих простых, увидим, что более гладкой является 5-летняя скользящая.

Сравнивая значения y_t 5-летних скользящих простых и взвешенных, увидим, что более гладкой является скользящая простая, но скользящая взвешенная более близка к исходной.

32.3. Применение моделей кривых роста в экономическом прогнозировании

Характеристики моделей кривых роста

Комплекс аналитических методов выравнивания сводится к выбору конкретных кривых роста и определению их параметров. Под кривой роста будем понимать некоторую функцию, аппроксимирующую заданный динамический ряд.

Разработка прогноза с использованием кривых роста включает следующие этапы:

— выбор одной или нескольких кривых, форма которых соответствует динамике временного ряда;

— оценка параметров выбранных кривых;

— проверка адекватности выбранных кривых прогнозируемому процессу и окончательный выбор кривой;

— расчет точечного и интервального прогнозов.

Кривые роста обычно выбираются из трех классов функций.

К первому классу относятся кривые, которые используются для описания процессов с монотонным характером развития и отсутствием пределов роста.

Ко второму классу относятся кривые, имеющие предел роста в исследуемом периоде. Такие кривые называют кривыми насыщения.

Если кривые насыщения имеют точки перегиба, то они относятся к кривым третьего класса. Их называют S-образными кривыми.

Среди кривых роста первого типа следует выделить класс полиномов:

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots$$

Параметр a_0 является начальным уровнем ряда при $t = 0$, a_1 называют линейным приростом, a_2 — ускорением роста, a_3 — изменением ускорения роста.

В экономических исследованиях в большинстве случаев применяются полиномы не выше третьего порядка.

Полином первой степени

$$y_t = a_0 + a_1 t$$

на графике (рис. 32.1) изображается в виде прямой и используется для описания процессов, развивающихся во времени равномерно.

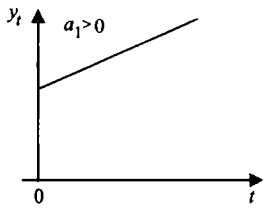


Рис. 32.1

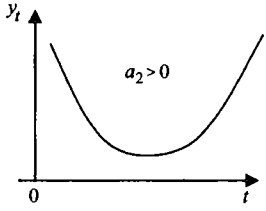


Рис. 32.2

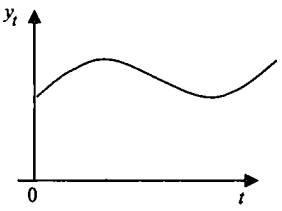


Рис. 32.3

Полином второй степени

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

на графике (рис. 32.2) изображается в виде параболы и применяется в тех случаях, когда процесс развивается равноускоренно. Если $a_2 > 0$, то ветви параболы направлены вверх, в случае $a_2 < 0$ — вниз.

Полином третьей степени

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

У этого полинома (рис. 32.3) знак прироста ординат может изменяться один или два раза.

Оценки параметров полиномов получают методом наименьших квадратов, согласно которому нормальное уравнение для определения коэффициентов прямой имеет вид:

$$\sum y_t = a_0 n + a_1 \sum t;$$

$$\sum y_t \cdot t = a_0 \sum t + a_1 \sum t^2.$$

Решение системы, т.е. нахождение коэффициентов системы a_0 и a_1, производится по формулам Крамера.

Можно упростить систему нормальных уравнений и уменьшить абсолютные значения величин, если перенести начало координат в середину ряда динамики. Если до переноса начала

координат t равно 1, 2, 3,..., то после переноса:
для четного числа членов $t = \ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots,$
для нечетного числа членов $t = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$.

В этом случае коэффициенты прямой находятся из выражений:

$$a_0 = \sum y_t/n; \quad a_1 = \sum y_t \cdot t / \sum t^2. \tag{32.3}$$

Аналогично определяются коэффициенты полинома второй степени (параболы), которые после переноса начала координат в середину ряда динамики имеют вид:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sum y_t/n - \sum t^2/n\Big\{\Big(n\sum y_t t^2 - \\ &\quad - \sum t^2 \sum y_t\Big)\Big/\Big[n\sum t^4 - \Big(\sum t^2\Big)^2\Big]\Big\}; \\ a_1 &= \sum y_t t \Big/ \sum t^2; \quad a_2 = \Big(n\sum y_t t^2 - \\ &\quad - \sum t^2 \sum y_t\Big)\Big/\Big[n\sum t^4 - \Big(\sum t^2\Big)^2\Big]. \end{aligned} \tag{32.4}$$

Показательная кривая (рис. 32.4) имеет вид:

$$y_t = ab^t.$$

Если $b > 1$, то кривая растет с ростом t, она падает, если $b < 1$.

Параметр a характеризует начальные условия, а параметр b — постоянный темп роста.

Прологарифмировав это выражение, получим:

$$\log y_t = \log a + t \log b.$$

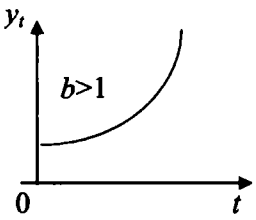
Обозначим $A = \log a$, $B = \log b$, тогда $\log y_t = A + tB$. Для оценивания неизвестных параметров можно использовать систему нормальных уравнений для прямой и найти параметры A и B. Зная значения $A = \log a$ и $B = \log b$, с помощью потенцирования определим значения a и b.

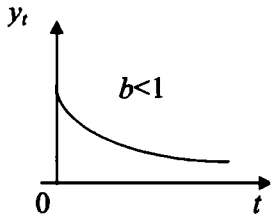
Следует иметь в виду, что полученные таким образом оценки параметров показательной кривой оказываются смещенными в связи с тем, что в расчете участвуют не исходные данные, а их логарифмы. Причем смещение будет тем значительнее, чем больше разность между соседними уровнями заданного ряда.

Рассмотренные типы кривых используются для описания монотонно возрастающих или убывающих процессов без насыщения. Примером кривой с насыщением является модифицированная экспонента (рис. 32.5):

$$y_t = k + ab^t, \quad b < 1$$

где $y = k$ — горизонтальная асимптота.





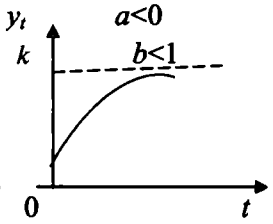


Рис. 32.4 **Рис. 32.5**

Коэффициент k может быть определен исходя из свойств прогнозируемого процесса или задан экспертным путем. В этом случае параметры кривой могут быть определены с помощью метода наименьших квадратов после приведения уравнения к линейному виду:

$$y_t - k_1 = ab^t,$$

где k_1 — заданное значение асимптоты.

Прологарифмируем полученное выражение:

$$\log|y_t - k_1| = \log|a| + t\log b.$$

Используя систему нормальных уравнений, можно найти параметры $\log|a|$ и $\log b$, потенцируя которые, определим a и b.

Если параметр a отрицателен, то асимптота расположена выше кривой. В экономических процессах чаще всего используется случай, когда $a < 0$, $b < 1$. При этом рост уровней ряда замедляется и стремится к некоторому пределу.

Наиболее известными из S-образных кривых являются кривая Гомперца (рис. 32.6) и логистическая кривая (кривая Перла–Рида) (рис. 32.7).

Кривая Гомперца имеет аналитическое выражение:

$$y_t = ka^{b^t},$$

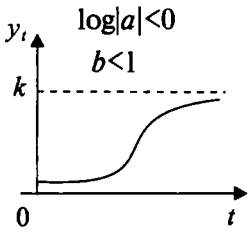


Рис. 32.6

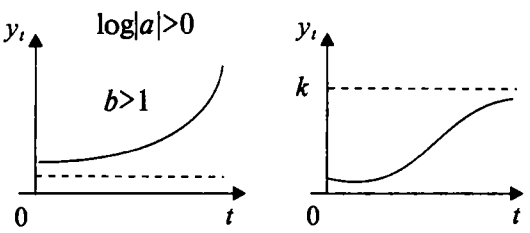


Рис. 32.7

где a, b — положительные параметры, причем $b < 1$; k — асимптота функции.

Для решения экономических задач чаще всего используется случай, когда $\log a < 0$, $b < 1$.

В кривой Гомперца выделяются четыре участка: на первом — прирост функции незначителен, на втором — прирост увеличивается, на третьем — прирост примерно постоянен, на четвертом — происходит замедление темпов прироста и функция неограниченно приближается к значению k. В результате кривая напоминает латинскую букву S.

Логистическая кривая (кривая Перла–Рида) — возрастающая функция, наиболее часто выражается в виде

$$1/y_t = k + ab^t,$$

используется и другой вид кривой

$$y_t = k/(1 + be^{-at}).$$

В этих выражениях $y_t = a$ и b — положительные параметры, k — предельное значение функции при $t \to \infty$. Конфигурация графика логистической кривой близка к графику кривой Гомперца, но в отличие от нее логистическая кривая имеет точку симметрии, совпадающую с точкой перегиба. С помощью этой функции хорошо описывается развитие нового производства. В начале производства нового вида товара технические средства производства еще недостаточно разработаны, издержки производства высоки и спрос на товар мал. В дальнейшем, с увеличением спроса и усовершенствованием технических методов изготовления, производство товаров увеличивается. Происходит

насыщение товарами на рынке, рост производства замедляется и наступает стабилизация выпуска товаров на определенном уровне.

Рассмотренные кривые роста, наиболее часто используемые в экономических исследованиях, могут оказать помощь при выборе типа кривой.

Существует ряд подходов, облегчающих выбор кривой роста. Это в первую очередь статистические методы, например, метод последовательных разностей, характеристик прироста. Часто кривую роста выбирают исходя из значений критерия, в качестве которого принимают минимальное значение суммы квадратов отклонений фактических значений уровня от расчетных.

Однако нельзя недооценивать наиболее простой метод — визуальный. Подбирают кривую роста, форма которой соответствует реальному процессу. Если на графике временного ряда недостаточно просматривается тенденция развития, то целесообразно провести сглаживание ряда и затем подобрать кривую, соответствующую новому ряду. При этом целесообразно использовать современные пакеты компьютерных программ.

Пример 6. По данным месячного выпуска продукции фирмы рассчитать:

— коэффициенты линейного тренда $y_t = a_0 + a_1 t$;

— прогноз на 1 месяц вперед;

— коэффициенты параболического тренда $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$;

— прогноз на 1 месяц вперед.

Решение. Для расчета коэффициентов линейного и параболического трендов воспользуемся выражениями, полученными из системы нормальных уравнений. Перенесем начало координат (t'). Вычисления занесем в табл. 32.14.

Вычислим коэффициенты линейного тренда по формулам (32.3):

$$a_0 = \sum y_t \Big/ n = 24\,634/8 = 3079{,}25;$$

$$a_1 = \sum y_t \cdot t \Big/ \sum t^2 = -8066/168 = -48{,}01.$$

Таким образом, величина среднего уровня ряда при $t = 0$ составляет 3079,25, среднемесячное уменьшение выпуска продукции равно 48,01.

Таблица 32.14

t	t'	y_t	t^2	$y_t \cdot t$
1	−7	3423	49	−23 961
2	−5	3321	25	−16 605
3	−3	3210	9	−9630
4	−1	3122	1	−3122
5	1	3034	1	3034
6	3	2940	9	8820
7	5	2845	25	14 225
8	7	2739	49	19 173
Итого	0	24 634	168	−8066

Уравнение линейного тренда: $y'_t = 3079{,}25 - 48{,}01 \cdot t$.

Прогноз на 9-й месяц составит: $y'_t = 3079{,}25 - 48{,}01 \times 9 = 2647{,}16$.

Вычислим коэффициенты параболического тренда (табл. 32.15) по формулам (32.4):

$$a_0 = 3079{,}25; \quad a_1 = -48{,}01; \quad a_2 = 0{,}105.$$

Уравнение параболического тренда:

$$y'_t = 3077{,}05 - 48{,}01t + 0{,}105t^2.$$

Прогноз на 9-й месяц: $y'_t = 3077{,}05 - 48{,}01 \cdot 9 + 0{,}105 \times 9^2 = 2653{,}47$.

Расчет доверительных интервалов прогноза

Прогнозные значения исследуемого показателя определяют путем подстановки в уравнение кривой времени t, соответствующей периоду упреждения. Полученный прогноз называют точечным.

В дополнение к точечному прогнозу можно определить границы возможного изменения прогнозируемого показателя, т.е. вычислить интервальный прогноз.

Таблица 32.15

t	t'	y_t	t^2	$y_t \cdot t$	t^3	t^4	$y_t \cdot t^2$
1	−7	3423	49	−23 961	−343	2401	167 727
2	−5	3321	25	−16 605	−125	625	83 025
3	−3	3210	9	−9630	−27	81	28 890
4	−1	3122	1	−3122	−1	1	3122
5	1	3034	1	3034	1	1	3034
6	3	2940	9	8820	27	81	26 460
7	5	2845	25	14 225	125	625	71 125
8	7	2739	49	19 173	343	2401	134 211
Итого	0	24 634	168	−8066	0	6216	517 594

Если тренд характеризуется в виде прямой или полиномом второго порядка, то доверительный интервал можно представить в виде:

$$y'_{n+L} \pm S_y \cdot K^*,$$

где n — длина временного ряда; L — период упреждения; y'_{n+L} — точечный прогноз на момент $n + L$; S_y^2 — дисперсия отклонений фактических наблюдений от расчетных;

$$S_y^2 = \sum (y_t - y'_t)^2 \Big/ (n - k),$$

где y_t — фактическое значение уровней ряда; y'_t — расчетные значения уровней ряда; k — число оцениваемых параметров выравнивающей кривой (для прямой $k = 2$, для параболы 2-й степени $k = 3$ и т. д.).

Значения K^* в зависимости от длины временного ряда и периода упреждения для прямой и параболы представлены в табл. 32.16 при доверительной вероятности 0,9.

Пример 7. Для данных о производстве угля за 9 лет (1989–1997 гг.) были оценены параметры модели

$$y'_t = 454 - 17{,}8t$$

и диперсия отклонений фактических значений от расчетных $S_y^2 = 8{,}9\,(\text{млн т})^2$. Используя полученную модель, рассчитать

Таблица 32.16

Длина ряда, n	Линейный тренд			Длина ряда, n	Параболический тренд		
	Период упреждения L				Период упреждения L		
	1	2	3		1	2	3
7	2,6380	2,8748	3,1399	7	3,948	5,755	8,152
9	2,3422	2,4786	2,6310	9	3,144	4,124	5,408
11	2,1827	2,2718	2,3706	11	2,763	3,384	4,189
13	2,0837	2,1463	2,2155	13	2,536	2,965	3,516
15	2,0153	2,0621	2,1131	15	2,386	2,701	3,100
17	1,9654	2,0015	2,0406	17	2,280	2,521	2,823
19	1,9280	1,9568	1,9877	19	2,201	2,391	2,627
21	1,8975	1,9210	1,9461	21	2,139	2,293	2,481
23	1,8738	1,8932	1,9140	23	2,090	2,217	2,371
25	1,8538	1,8701	1,8876	25	2,049	2,156	2,284

интервальный прогноз производства в 1998 г., доверительную вероятность принять равной 0,9.

Найти нижнюю и верхнюю границы прогноза.

Решение. 1. Определим точечный прогноз:

$$y'_{10} = 454 - 17{,}8 \cdot 10 = 276 \text{ млн т.}$$

2. Вычислим интервальный прогноз.

По данным задачи $n = 9$, $L = 1$, линейный тренд по табл. 32.16 $K^* = 2{,}3422$:

$$S_y = \sqrt{S_y^2} = \sqrt{8{,}9} = 2{,}98,$$

$$y_{n+L} \pm S_y \cdot K^* = 276 \pm 2{,}98 \cdot 2{,}3422 = 276 \pm 6{,}98.$$

Точечный прогноз равен 276 млн т.

Нижняя граница прогноза составляет 269,02 млн т.

Верхняя граница прогноза равна 282,98 млн т.

Оценка адекватности моделей

Независимо от вида выбранной модели вопрос о возможности ее применения для прогнозирования экономического показателя может быть решен только после установления ее адекватности.

Проверка адекватности выбранных моделей реальному процессу строится на анализе случайной компоненты. Случайная компонента получается после выделения из исследуемого ряда тренда и периодической составляющей. Если временной ряд не имеет сезонных колебаний, то для аддитивной модели

$$y_t = u_t + e_t.$$

Ряд остатков может быть получен как отклонения фактических уровней y_t от расчетных y'_t

$$e_t = y_t - y'_t.$$

При использовании кривых роста y'_t вычисляют, подставляя в уравнение кривой соответствующие значения времени.

Считают, что модель адекватна описываемому процессу, если значения остаточной компоненты удовлетворяют свойствам случайности, независимости и она подчиняется нормальному закону распределения.

При правильном выборе вида тренда отклонения от него будут носить случайный характер, и изменение остаточной случайной величины не связано с изменением времени. По выборке, полученной для всех временных значений на рассматриваемом интервале, проверяется гипотеза о независимости последовательности значений e_t от времени или наличие тенденции в ее изменении. Для проверки этого свойства может быть использован критерий определения тенденции с помощью "восходящих и нисходящих" серий.

Если вид функции тренда выбран неудачно, то последовательные значения остатков ряда могут не обладать свойствами независимости, так как могут коррелировать между собой. В этом случае говорят, что имеет место автокорреляция ошибок.

Наиболее распространенным приемом обнаружения автокорреляции является метод Дарбина–Уотсона, связанный с автокорреляцией между соседними остаточными членами ряда.

Таблица 32.17

Значения критерия Дарбина–Уотсона при доверительной вероятности 0,95

n	$v = 1$		$v = 2$		$v = 3$	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,9	1,71
19	1,18	1,4	1,08	1,53	0,97	1,68
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66

Определяется критерий Дарбина–Уотсона по формуле:

$$d = \sum (e_t - e_{t-1})^2 \Big/ \sum e_t^2.$$

Применение критерия основано на сравнении величины d, рассчитанной по формуле с теоретическими значениями d_1 и d_2, взятыми из табл. 32.17. В случае, когда в остатках имеется положительная автокорреляция:

— если $d < d_1$, то гипотеза об отсутствии автокорреляции отвергается;

— если $d > d_2$, то гипотеза об отсутствии автокорреляции не отвергается;

— если $d_1 \leq d \leq d_2$, то нет достаточных оснований для принятия решений.

Когда расчетное значение $d > 2$, то в e_t существует отрицательная автокорреляция, и со значениями d_1 и d_2 сравнивается величина $(4 - d)$.

В связи с тем что временные ряды экономических показателей невелики, на основе анализа показателей асимметрии и эксцесса можно произвести проверку ряда остатков на нормальность распределения по формулам:

$$Э = \sum e_t^4 \Big/ n\sqrt{\left(\sum e_t^2/n\right)^2 - 3},$$

$$\sigma_А = \sqrt{6(n-2)/(n+1)(n+3)},$$

$$\sigma_Э = \sqrt{24n(n-2)(n-3)/(n+1)^2(n+3)(n+5)},$$

где А — выборочная характеристика асимметрии; Э — выборочная характеристика эксцесса; $\sigma_А$ — среднеквадратическая ошибка выборочной характеристики асимметрии; $\sigma_Э$ — среднеквадратическая ошибка выборочной характеристики эксцесса.

Если одновременно выполняются неравенства:

$$|А| < 1{,}5\sigma_А; \quad |Э + 6/(n+1)| < 1{,}5\sigma_Э,$$

то гипотеза о нормальном характере распределения случайной компоненты не отвергается.

Если выполняется хотя бы одно из неравенств:

$$|А| \geq 2\sigma_А; \quad |Э + 6/(n+1)| \geq 2\sigma_Э,$$

то гипотеза о нормальном характере распределения отвергается.

Характеристики точности моделей

О точности модели можно судить по величине ошибки прогноза. Ошибка прогноза — величина, характеризующая разницу между фактическим и прогнозным значениями показателя.

Абсолютная ошибка прогноза определяется по формуле:

$$\Delta_t = y_t' - y_t,$$

где y_t' — прогнозное значение показателя; y_t — фактическое значение показателя.

На практике используют относительную ошибку прогноза:

$$\delta_t = 100(y_t' - y_t)/y_t.$$

Средние абсолютные и относительные ошибки по модулю:

$$|\bar{\Delta}_t| = \left(\sum |y_t' - y_t|\right)\Big/ n; \quad |\bar{\delta}_t| = \left(100\sum |(y_t' - y_t)/y_t|\right)\Big/ n.$$

Таблица 32.18

t	1	2	3	4	5	6	7
y_t	268	267	258	262	254	257	263
Прогнозы 1-й модели	275	253	250	269	253	248	250
Прогнозы 2-й модели	260	275	253	278	263	251	269

Если абсолютная и относительная ошибки больше нуля, то это свидетельствует о завышенной прогнозной оценки, если меньше нуля — то о заниженной оценке.

Пример 8. Данные об объеме перевозок грузов и прогнозы приведены в табл. 32.18.

Найти относительную ошибку по модулю и среднюю абсолютную ошибку по модулю для прогнозов по двум моделям.

Решение. Результаты расчета относительной ошибки и средней абсолютной ошибки по заданным моделям заносим в табл. 32.19.

Предпочтительнее 2-я модель, так как меньше величины средней абсолютной и средней относительной ошибок.

УПРАЖНЕНИЯ

32.1. Месячные объемы продаж фирмы (ден. ед.) приведены в таблице.

t	y_t	t	y_t	t	y_t	t	y_t
1	70	4	71	7	23	10	73
2	66	5	79	8	82	11	75
3	65	6	76	9	84	12	82

Проверить аномальность уровней $t = 5$ и $t = 7$.

Таблица 32.19

t	y_t	Прогнозы 1-й модели	Прогнозы 2-й модели	Абсолютная ошибка по модулю 1-й модели	Абсолютная ошибка по модулю 2-й модели	Относительная ошибка по модулю 1-й модели	Относительная ошибка по модулю 2-й модели
1	267	275	260	8	7	2,996	2,545
2	267	253	275	14	8	5,243	3,162
3	258	250	253	8	5	3,101	2,0
4	262	269	278	7	16	2,672	5,948
5	253	253	263	0	10	0	3,953
6	257	248	251	9	6	3,502	2,419
7	263	250	269	13	6	4,943	2,4
Средняя ошибка				8,43	8,29	3,208	3,204

32.2. Недельные изменения курса акций (ден.ед.) АО представлены в таблице.

t	y_t	t	y_t	t	y_t	t	y_t	t	y_t
1	258	5	256	9	253	13	259	17	258
2	256	6	258	10	255	14	255	18	260
3	257	7	257	11	260	15	252	19	263
4	259	8	254	12	262	16	256	20	261

С помощью критерия "восходящих и нисходящих" серий с вероятностью 0,95 сделать вывод о присутствии или об отсутствии тенденции во временном ряду.

32.3. Квартальные объемы перевозок (ден. ед.) транспортного предприятия даны в таблице.

Рассчитать 3-, 5-летние скользящие средние (результаты сравнить графически) и пятилетнюю взвешенную скользящую среднюю.

t	y_t	t	y_t	t	y_t	t	y_t
1	21,4	4	32	7	35,1	10	33,6
2	23,2	5	29,5	8	38,8	11	36,2
3	27,1	6	30,2	9	30,2	12	39

32.4. Ежеквартальная динамика процентной ставки банка дана в таблице.

	I кв. 2001 г.	**II кв. 2001 г.**	**III кв. 2001 г.**	**IV кв. 2001 г.**	**I кв. 2002 г.**	**II кв. 2002 г.**	**III кв. 2002 г.**
y_t	7,3	7,9	8,9	9,6	10,8	11,6	13,0

С помощью среднего темпа роста определить прогноз процентной ставки банка в IV квартале 2002 г.

32.5. Временной ряд, характеризующий изменение выпуска продукции, представлен в таблице. Используя метод "восходящих и нисходящих" серий с вероятностью 0,95 сделать вывод:

— тенденция во временном ряду присутствует;

— тенденция во временном ряду отсутствует.

t	y_t	t	y_t	t	y_t	t	y_t
1	466	6	473	11	474	16	467
2	464	7	478	12	488	17	473
3	465	8	467	13	483	18	475
4	466	9	480	14	476	19	481
5	475	10	458	15	471	20	478

32.6. По критерию "восходящих и нисходящих" серий проверить наличие тенденции в изменении курса валюты. Вывод сделать с доверительной вероятностью 0,95.

t	y_t	t	y_t	t	y_t	t	y_t
1	28,54	6	28,61	11	28,71	16	29,0
2	28,58	7	28,65	12	28,72	17	28,95
3	28,52	8	28,63	13	28,70	18	28,97
4	28,57	9	28,68	14	28,74	19	29,04
5	28,62	10	28,66	15	28,76	20	29,05

32.7. Дан временной ряд, характеризующий месячную динамику численности (чел.) занятых в сфере услуг фирмы:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y_t	34	36	39	44	52	55	59	65	67	73	82	86	92	93	98

— в предположении об изменении тенденции ряда по линейной модели найти коэффициенты тренда $y_t = a_0 + a_1 t$, рассчитать точечный прогноз на 16-й месяц;
— в предположении об изменении тенденции ряда по параболической модели найти коэффициенты тренда $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, рассчитать точечный прогноз на 16-й месяц;
— в предположении об изменении тенденции ряда по показательной модели найти коэффициенты тренда $y_t = a \cdot b^t$, рассчитать точечный прогноз на 16-й месяц.

32.8. Для прогнозирования временного ряда объема реализованной продукции выбрана линейная модель $y_t = a_0 + a_1 t$. Длина временного ряда $n = 24$. Значение критерия Дарбина–Уотсона $d = 1{,}4$.

Определить:

— модель неадекватна реальному процессу по данному критерию;
— модель адекватна реальному процессу по данному критерию;
— нет достаточных оснований для принятия решения об адекватности модели.

32.9. В таблице представлены квартальные данные об объеме производства продукции в денежном выражении (ден. ед.).

	I кв. 2001 г.	**II кв. 2001 г.**	**III кв. 2001 г.**	**IV кв. 2001 г.**	**I кв. 2002 г.**	**II кв. 2002 г.**
y_t	21,19	22,24	23,27	24,32	25,35	26,38

Определить прогноз производства в III квартале 2002 г. с помощью среднего прироста.

32.10. Ежеквартальная динамика процентной ставки банка дана в таблице.

	I кв. 2001 г.	**II кв. 2001 г.**	**III кв. 2001 г.**	**IV кв. 2001 г.**	**I кв. 2002 г.**	**II кв. 2002 г.**	**III кв. 2002 г.**
y_t	7,3	7,9	8,9	9,6	10,8	11,6	13,0

С помощью среднего темпа роста определить прогноз процентной ставки банка в IV квартале 2002 г.

32.11. Данные об изменении урожайности пшеницы (ц/га) за 10 лет представлены в таблице. Произвести сглаживание по 3- и 5-летней скользящей средней и по 5-членной взвешенной скользящей средней.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	16,3	21,2	18,1	8,7	16,3	17,3	20,9	15,4	19,7	21,7

Часть 8
ПРАКТИКУМ

П1. Задания по теме "Математический анализ, функции одной переменной"

1. Найти множества значений x, удовлетворяющих следующим условиям.

1.1. $|x| \geq 5$.

1.2. $|x-3| \leq 3$.

1.3. $|x| = x+2$.

1.4. $|x| > x$.

1.5. $|x| < x+1$.

1.6. $|x-1| \geq 2$.

1.7. $|x^2-3x+2| \leq 2$.

1.8. $|x^2-4x+3|=-(x^2-4x+3)$.

1.9. $|x^2-4x+3| > x^2-4x+3$.

1.10. $|x-4| = |x+4|$.

1.11. $|x^2-2x-3| < 3x-3$.

1.12. $||3x-2|-1| > 2$.

1.13. $||x-1|+2| = 1$.

1.14. $|x|-2|x+1|+|3x+1|=0$.

1.15. $x^2-|3x+2|+x \geq 0$.

1.16. $|x-3|+|x+3| > 8$.

1.17. $x^2-2|x|-3=0$.

1.18. $|x-1|+|1-2x| = |x|$.

1.19. $|\sin x| - \sin x = 2$.

1.20. $||x|-2| \leq 1$.

1.21. $|x^2-3x| > |x^2|-|3x|$.

1.22. $|x^2-5x+6| \geq 6$.

1.23. $|1-1/x| = 1-1/x$.

1.24. $|x^2-3x| < |x|$.

1.25. $x^2-2x+3 \leq |x|$.

1.26. $|x^2-2x+3| \leq |x|$.

1.27. $|x^2-4x| > x-3$.

1.28. $|x+3|-|x+1| < 2$.

1.29. $||x+1|+2| = 2$.

1.30. $|x-1|-|x| > 2x+4$.

1.31. $|x^2-2x-3| < 3x-3$.

1.32. $x^2+2|x+3|-10 \leq 0$.

2. Найти пределы.

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n^2+1}$.

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$.

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+4}{n^2+5}$.

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n^2+1} - \frac{3n^2}{3n-1}\right)$.

2.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{5n+10} + \frac{\cos n}{5n}\right)$.

2.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10n}{n+1}$.

2.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$.

2.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n+1}$.

2.9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$.

2.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n}{n^2+n}$.

2.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10n}{n^2+1}$.

2.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10n^3}{n^2+1}$.

2.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5\cdot 3^n}{3^n+2}$.

2.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

2.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{n+1} + \frac{\sin n}{n}\right)$.

2.16. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sin n}{n^2+1}$.

2.17. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

2.18. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n+1})$.

2.19. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(n - \sqrt{n^2+1})$.

2.20. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n-1} - \sqrt{n^2-n+1}$.

3. Найти области определения функций.

3.1. $y = 3x + 3$.

3.2. $y = x^2 + 5x + 6$.

3.3. $y = \frac{3x-1}{5x+6}$.

3.4. $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$.

3.5. $y = \sqrt{3x-1} + 1/\sqrt{4-x}$.

3.6. $y = \sqrt{2-3x} + \lg x$.

3.7. $y = \sqrt{x^2-4x+3}$.

3.8. $y = 1/\sqrt{x^2-4x}$.

3.9. $y = \sqrt{1-x^2}$.

3.10. $y = \sin 4x$.

3.11. $y = x + \cos x$.

3.12. $y = \operatorname{ctg} x$.

3.13. $y = \operatorname{tg}(x/2)$.

3.14. $y = \operatorname{arctg}(2x-1)$.

3.15. $y = \log_2(2x-1)$.

3.16. $y = \log_2 \log_3 x$.

3.17. $y = \log_5(3x - x^2)$.

3.18. $y = 1/\log_2(1-2x)$.

3.19. $y = 2^{-1/x}$.

3.20. $y = \cos x/(x^2 - 5x + 4)$.

4. Найти пределы.

4.1. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^3-16}{x-4}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2+3x-3}{2x^2+3x+5}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{10x+1}{x^2-3x+1}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x-3}{x^2+2}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+4x-1}{x^2+x+1}$.

4.12. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{1+x}-1}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+4x}-x)$.

4.17. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{1+x^2}-x)$.

4.18. $\lim\limits_{x\to \infty} (x-\sqrt{x^2+x+1})$.

4.19. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$.

4.20. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-1}\right)$.

4.21. $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{9x^2+1}-3x$.

4.22. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{3x+5}$.

4.23. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

4.24. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

4.25. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

4.26. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}$.

4.29. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{x/2}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{3x}$.

5. Найти точки разрыва следующих функций и определить их тип.

5.1. $y=\frac{x+2}{x-4}$.

5.2. $y=\operatorname{tg}(x-\pi/4)$.

5.3. $y=\log_3(1-x)$.

5.4. $y=\frac{x^2-6x+5}{x^2-7x+6}$.

5.5. $y=1/(x^2-1)$.

5.6. $y=3^{-1/x}$.

5.7. $y=\frac{2x}{\sin x}$.

5.8. $y=2^{\operatorname{tg} x}$.

5.9. $y=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ -x-1, & x>0. \end{cases}$

5.10. $y=\frac{x^3-1}{x-1}$.

6. Найти производные функций.

6.1. $y = x^4 + 3x^3 - 2x + 2$.

6.2. $y = 7x^5 + 3x^3 - 4x - 1$.

6.3. $y = \sqrt[3]{x} + 1/x + 1/x^2 + 3$.

6.4. $y = \sqrt[4]{x^3} + 4/x^2 - 1/(3x^3)$.

6.5. $y = 3\sqrt{x} + 3\cos x - 2\operatorname{tg} x + 4$.

6.6. $y = \log_2 x + 4\log_5 x$.

6.7. $y = x^2 \operatorname{tg} x$.

6.8. $y = x^2 \log_2 x$.

6.9. $y = 4e^x$.

6.10. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.

6.11. $y = \frac{\cos x}{1+2\sin x}$.

6.12. $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$.

6.13. $y = \frac{1+e^x}{1+e^x}$.

6.14. $y = x^2 - 1/(2x^2)$, найти $f'(2) - f'(-2)$.

6.15. $y = \frac{x \operatorname{tg} x}{1+x^2}$.

6.16. $y = \sin 5x$.

6.17. $y = \sqrt{1 - x^2}$.

6.18. $y = \sqrt{1 + 5\cos x}$.

6.19. $y = \cos^3 x$.

6.20. $y = \operatorname{tg}\left(x^2 + 2\right)$.

6.21. $y = \ln\left(x^2 + 2x\right)$.

6.22. $y = \ln\left(1 + \cos x\right)$.

6.23. $y = \ln\left(x^2 - 3x + 7\right)$.

6.24. $y = e^{3x}$.

6.25. $y = e^{\sin x}$.

6.26. $y = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$.

6.27. $y = \arcsin\sqrt{x}$.

6.28. $y = \ln\ln x$.

6.29. $y = \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}\right)$.

6.30. $y = x^2 e^{-x}$.

7. Составить уравнения касательных к графикам функций.

7.1. $y = 4x - x^2$ — в точках пересечения с осью Ox.

7.2. $y = x^2$ в точке $M(1/2, 1)$.

7.3. $y = \ln x$ в точке $M(e, 1)$.

7.4. $y = e^{3x}$ в точке пересечения с осью Oy.

7.5. $y = \frac{4x - x^2}{4}$ в точках $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(4, 0)$.

8. Найти производные высших порядков от следующих функций.

А) Производные второго порядка

8.1. $y = \operatorname{ctg} x$.

8.2. $y = \arcsin(x/2)$.

8.3. $y = \cos^2 x$.

8.4. $y = x \arcsin x$.

8.5. $y = e^{-x^2}$.

8.6. $y = \operatorname{arctg}(1/x)$.

8.7. $y = x\cos x$.

8.8. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Б) Производные третьего порядка

8.9. $y = \sin 3x$.

8.10. $y = e^{x/2}$.

8.11. $y = 3^x$.

8.12. $y = \cos^2 x$.

8.13. $y = 2^{3x}$.

8.14. $y = \ln(1 + x)$.

8.15. $y = x^3 2^x$.

8.16. $y = e^x \cos x$.

В) Производные n-го порядка

8.17. $y = 2^x$.

8.18. $y = \sin^2 x$.

8.19. $y = x \sin x$.

8.20. $y = x^2 \sin(x/3)$.

8.21. $y = \cos 3x$.

8.22. $y = \ln(1 + x)$.

8.23. $y = \ln \ln x$.

8.24. $y = 2^{-x}$.

8.25. $y = 3^{2x}$.

8.26. $y = (3x + 1)^n$.

9. Найти пределы с использованием

А) правила Лопиталя:

9.1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x}$.

9.2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2-(e^x+e^{-x})\cos x}{x^4}$.

9.3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$.

9.4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\sin x}}{\ln(1+x)}$.

9.5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$.

9.6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

9.7. $\lim\limits_{x\to \pi/6} \frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.

9.8. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^2}$.

9.9. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln(1+1/x^2)}{\pi-2\operatorname{arctg} x}$.

9.10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1+x^4}{\sin 2x}$.

9.11. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{\ln(e^x-1)}$.

9.12. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-x^3/6-x^2/2-x-1}{\cos x x^2/2-1}$.

Б) разложения по формуле Маклорена:

9.13. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x+2\sin x-3x}{x^4}$.

9.14. $\lim\limits_{x\to 0} (1/x - 1/\sin x)$.

9.15. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2}$.

9.16. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x+x^2/2-1}{x^4}$.

10. Исследовать и построить графики функций.

10.1. $y = x^3 - 3x$.

10.2. $y = 12x - 1/x$.

10.3. $y = x\sqrt{1-x}$.

10.4. $y = \frac{x}{1-x^2}$.

10.5. $y = x^3/(1+x^2)$.

10.6. $y = \frac{x^2+1}{x}$.

10.7. $y = x^3 e^{-x}$.

10.8. $y = e^x/x$.

10.9. $y = x\ln x$.

10.10. $y = x + \operatorname{arctg} x$.

10.11. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

10.12. $y = \frac{1+\ln x}{x}$.

10.13. $y = x/\ln x$.

10.14. $y = x/(1+e^x)$.

10.15. $y = x - \ln x$.

10.16. $y = 2x + 1/x^2$.

10.17. $y = xe^{-x^2}$.

10.18. $y = x^4/(1+x)^3$.

10.19. $y = e^x/(1-x)$.

10.20. $y = (1-x)e^x$.

11. Найти неопределенные интегралы

а) непосредственным интегрированием:

11.1. $\int (x^3 + 3x^2 - 2x + 1)dx$.

11.2. $\int \left(x^4 + \sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$.

11.3. $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$.

11.4. $\int (2^x + 3^x - \cos x + \sin x)dx$.

11.5. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^x} dx$.

11.6. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$.

11.7. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

11.8. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\right) dx$.

11.9. $\int \frac{x^2+3}{1+x^2} dx$.

11.10. $\int \frac{3x^7+1}{x^4} dx$.

11.11. $\int (2\sin x - \cos x)dx$.

11.12. $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right) dx$.

11.13. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x} dx$.

11.14. $\int (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx$.

11.15. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

11.16. $\int \frac{2x^4+2x^2-3}{1+x^2} dx$.

11.17. $\int 4^x \left(3 + \frac{4^{-x}}{\sqrt{x}}\right) dx$.

11.18. $\int \frac{x^5+x^3+x^2+3}{1+x^2} dx$.

11.19. $\int \frac{5\operatorname{tg}^2 x - 3}{\sin^2 x} dx$.

11.20. $\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$;

б) методом подстановки:

11.21. $\int \sin 6x dx.$

11.22. $\int (\cos 3x + 4) dx.$

11.23. $\int \operatorname{ctg} x dx.$

11.24. $\int e^{5x} dx.$

11.25. $\int \frac{e^{3x}+e^{2x}+1}{e^x+1} dx.$

11.26. $\int \sin^3 x \cos x dx.$

11.27. $\int \frac{3x^2}{x^3+1} dx.$

11.28. $\int \sqrt{3x+4} dx.$

11.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}.$

11.30. $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx.$

11.31. $\int \frac{dx}{5x+2}.$

11.32. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx.$

11.33. $\int e^{\sin x} \cos x \, dx.$

11.34. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx.$

11.35. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

11.36. $\int \sqrt{3 + \sin 5x} \cos 5x dx.$

11.37. $\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

11.38. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

11.39. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{2+5\sin 3x}} dx.$

11.40. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}};$

в) интегрированием по частям:

11.41. $\int \ln x dx.$

11.42. $\int (x^2 + 4x + 2) \ln x \, dx.$

11.43. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} dx.$

11.44. $\int x^2 \ln x \, dx.$

11.45. $\int x e^{3x} dx.$

11.46. $\int x \ln (3x+1) dx.$

11.47. $\int (x^2 + 3x + 3) \ln x \, dx.$

11.48. $\int x^2 e^x dx.$

11.49. $\int x \sin 2x \, dx.$

11.50. $\int x \cos 3x \, dx.$

11.51. $\int x^2 \sin x \, dx.$

11.52. $\int x^2 e^{-x} dx.$

11.53. $\int (x^2 + 2x) \sin x \, dx.$

11.54. $\int \frac{x \, dx}{\sin^2 x}.$

11.55. $\int \ln (1 + x^2) dx.$

11.56. $\int \cos (\ln x) dx.$

11.57. $\int (x-1)^2 e^x dx.$

11.58. $\int (x+1)^2 e^{-x} dx.$

11.59. $\int (x^3 + 1) \cos x \, dx.$

11.60. $\int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx.$

12. Решить задачи с определенными интегралами.

1) Вычислить интегралы.

12.1. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$.

12.2. $\int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$.

12.3. $\int\limits_0^\pi \sin x dx$.

12.4. $\int\limits_1^2 (x^2 + 1/x^4)dx$.

12.5. $\int\limits_0^2 x(3 - x)dx$.

12.6. $\int\limits_0^{\pi/2} x \cos x dx$.

12.7. $\int\limits_1^e x \ln x\, dx$.

12.8. $\int\limits_{-1}^1 xe^{-x^2} dx$.

12.9. $\int\limits_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx$.

12.10. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{2+\cos x} dx$.

12.11. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

12.12. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x dx$.

12.13. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$.

12.14. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 4x\, dx$.

12.15. $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$.

12.16. $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\, dx$.

12.17. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

12.18. $\int\limits_1^e \ln^2 x\, dx$.

12.19. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{tg}^2 x\, dx$.

12.20. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$.

2) Найти площади фигур, ограниченных следующими линиями.

12.21. $y = x^2$, $y = 1 - x^2$.

12.22. $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi/4$.

12.23. $y = |x| + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

12.24. $y = \sin 2x$, $y = 1$, $\pi/4 \leq x \leq \pi/2$.

12.25. $x^2 - y^2 = 1$, $x = 2$.

12.26. $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x}$.

12.27. $y = |x^2 - 1|$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$.

12.28. $y = x^2$, $y = 4x - 3$.

12.29. Фигура ограничена параболой $y = x^2 + 4x - 3$ и касательными к ней в точках $a(0, -3)$, $b(3, 0)$.

12.30. Фигура ограничена параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке $(3, 5)$ и осью Oy.

3) Найти объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной следующими линиями.

12.31. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 2$.

12.32. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

12.33. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

12.34. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$.

12.35. $y = x^3$, $y = x$.

12.36. $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \pi/2$.

12.37. $y = \sin x$, $y = 0$, $2\pi \leq x \leq 3\pi$.

12.38. $y = x^2 + 1$, $y = 3x - 1$.

12.39. $y = \sqrt{x}$, $y = 1$.

12.40. $y = 4/x, x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

4) **Вычислить несобственные интегралы.**

12.41. $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}dx.$

12.42. $\int\limits_0^\infty \operatorname{arctg} x\,dx.$

12.43. $\int\limits_{-\infty}^0 xe^x dx.$

12.44. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}.$

12.45. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+x}.$

12.46. $\int\limits_1^\infty x^{-3/4}dx.$

12.47. $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2}.$

12.48. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+5}.$

12.49. $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}+x+x^2}{x^3\sqrt{x}}dx.$

12.50. $\int\limits_0^\infty x2^{-x}dx.$

П2. Задания по теме "Математический анализ, функции нескольких переменных"

1. Найти области определения следующих функций.

1.1. $z = \frac{1}{x-y}.$

1.2. $z = 1/(x^2 - y^2).$

1.3. $z = \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}.$

1.4. $z = \arcsin\frac{y}{x}.$

1.5. $z = \sqrt{y^2 - x^2} - \sqrt{x-4}.$

1.6. $z = \sqrt{x^2 - y^2}.$

1.7. $z = 1/\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}.$

1.8. $z = \ln(4 - x^2 - y^2).$

1.9. $z = \sqrt{(x-2)(y-3)}.$

1.10. $z = \sqrt{x} + \sqrt{y^2 - 4}.$

2. Построить линии уровня следующих функций.

2.1. $z = x^2y + y.$

2.2. $z = \frac{y}{x}.$

2.3. $z = x\sqrt{y-1}.$

2.4. $z = xy + y.$

2.5. $z = \ln(y - x).$

2.6. $z = \frac{y-x^2}{x^2}.$

2.7. $z = y - x^2.$

2.8. $z = \sqrt{x} - y.$

2.9. $z = y^2 - x.$

2.10. $z = y/x^3.$

3. Найти частные производные от функций.

3.1. $z = \frac{y}{x}$.

3.2. $z = x^2y^3 + x^3y$.

3.3. $z = \frac{xy}{x+y}$.

3.4. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

3.5. $z = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$.

3.6. $z = y^x$.

3.7. $z = \frac{x+y}{x-y}$.

3.8. $z = x^2 \cos y$.

3.9. $z = xye^{xy}$.

3.10. $z = e^{-x/y}$.

4. Найти градиенты функций в следующих точках.

4.1. $z = 2 + x^2 - y^2$, $M(1,1)$.

4.2. $z = xy/(x^2+y^2+1)$, $M(0,1)$.

4.3. $z = (x-y)^2$, $M(1,1)$.

4.4. $z = x^2 \cos y$, $M(1,\pi/2)$.

4.5. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M(1,1)$.

4.6. $z = \sin(x+2y)$, $M(0,0)$.

4.7. $z = \ln(2x+3y)$, $M(0,1)$.

4.8. $z = \operatorname{arctg}(x^2y)$, $M(1,1)$.

4.9. $z = \ln(x + y^2)$, $M(1,2)$.

4.10. $z = \sin(\pi xy)$, $M(1,1)$.

5. Найти частные производные второго порядка от функций.

5.1. $z = \frac{x^2}{1-2y}$.

5.2. $z = x^2e^{xy}$.

5.3. $z = e^{x+2y}$.

5.4. $z = x\cos^2 y$.

5.5. $z = x\ln y$.

5.6. $z = \sin x \cos y$.

5.7. $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x}$.

5.8. $z = \sin(x^2 + y^2)$.

5.9. $z = x^2 \sin\sqrt{y}$.

5.10. $z = \cos(3x - 2y)$.

6. Найти экстремумы функций.

6.1. $z=y^2-x^2+xy-2x-6y$.

6.2. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

6.3. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

6.4. $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$, $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \pi/2$.

6.5. $z = e^x(x + y^2)$.

6.6. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

6.7. $z = 2xy - 4x - 2y$.

6.8. $z = xy(1 - x^2 - y^2)$.

6.9. $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$, $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \pi/2$,

6.10. $z=x^2+xy+y^2-2x+3y$.

П3. Задания по теме “Элементы линейной алгебры”

1. Вычислить

$$\bar{a}\bar{c} - 2\bar{b}(\bar{a} + \bar{c}) + \bar{b}^2 - 3\bar{c}^2,$$

где $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ — векторы, заданные в таблице.

Номер варианта	Вектор $\bar{a}$	Вектор $\bar{b}$	Вектор $\bar{c}$
1	(1, −2, 3)	(0, −1, −2)	(−2, 3, 4)
2	(2, 3, 0)	(−3, 1, 1)	(−1, 0, −2)
3	(4, −1, 1)	(0, −1, 1)	(5, −2, 0)
4	(1, 1, 2)	(3, 2, 1)	(−2, −1, 1)
5	(0, −1, 2)	(3, −2, 3)	(4, 2, −2)
6	(7, 2, −1)	(−2, −1, −2)	(3, −3, −4)
7	(4, 3, −4)	(6, −3, −2)	(−1, −3, 0)
8	(5, 4, 1)	(−4, −2, −3)	(1, 2, −2)
9	(−2, 6, −3)	(3, 0, −4)	(0, 5, −6)
10	(−5, 4, 0)	(6, −6, 1)	(1, −2, 1)

2. Даны матрицы A, B, C, D, E, F и G:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти следующие комбинации этих матриц.

2.1. Матрицу $H = 3C - 4F$.

2.2. Соответствующие транспонированные матрицы.

2.3. Все возможные произведения матриц, имеющие смысл.

2.4. Матрицу $H = C^2 - F^2$.

2.5. Матрицу $H = G^3$.

3. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & -7 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & -3 \\ 9 & 7 & 3 & 0 & 8 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 & -1 \\ 12 & 8 & 9 & -8 \end{vmatrix}$.

4. Определить, являются ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ линейно независимыми. Варианты задания этих векторов указаны в таблице задания 1.

5. Найти ранги матриц, указанных в задании 2.

6. Решить методом Крамера системы линейных уравнений.

6.1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 9, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3 = 4, \\ 2x_1-5x_2+3x_3 = 1, \\ -x_1+4x_2-2x_3 = 1. \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1+2x_2-2x_3 = -6, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 15. \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3 = 1, \\ 3x_1+2x_2-2x_3 = -8, \\ 4x_1+3x_2+5x_3 = 5. \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} -2x_1+2x_2-3x_3 = -3, \\ 3x_1 - 5x_2+2x_3 = 6, \\ 3x_1+x_2+3x_3 = 4. \end{cases}$

7. Решить задачи 6.1–6.6 методом обратной матрицы, вычислив ее методом Гаусса.

8. Решить методом Гаусса системы линейных уравнений 6.3–6.6.

9. Решить методом Гаусса системы линейных уравнений.

9.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -9, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 15, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 12. \end{cases}$

9.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

9.3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

9.4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ -3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

9.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

9.6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

9.7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

9.8. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$

9.9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

9.10. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$

10. Найти фундаментальные системы решений систем однородных уравнений.

10.1. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

10.2. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

10.3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

10.4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

10.5. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

10.6. $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0.$

10.7. $x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0.$

11. Найти собственные значения и собственные векторы матриц.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; **е)** $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$; **ж)** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; **з)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$; **и)** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$.

П4. Задания по теме "Элементы теории вероятностей"

1. Задачи на случайные события

1.1. Два нумизмата обмениваются коллекционными монетами. Найти число способов обмена, если первый нумизмат обменивает 5 монет, а второй — 8 монет.

1.2. В ящике находится 12 деталей, среди которых имеются 3 нестандартные. Найти вероятность того, что 3 взятые наугад детали будут стандартными.

1.3. В урне находится 20 шаров: 15 белых и 5 красных. Из урны извлекают один шар, затем, не возвращая его обратно, извлекают второй. Найти вероятность появления красного шара при втором извлечении.

1.4. Абонент забыл последнюю цифру телефонного номера. Найти вероятность того, что при наборе номера наугад он наберет его правильно не более чем с четырех попыток.

1.5. В лотерее разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей на каждые 5000 билетов. Найти вероятность выигрыша вообще.

1.6. В ящике находится 12 деталей, из которых 3 нестандартные. Из ящика последовательно, одну за другой, берут две детали. Найти вероятность того, что обе детали будут стандартными.

1.7. В цеху находятся четыре однотипных станка. Вероятности исправного состояния этих станков соответственно равны 0,7; 0,9; 0,8 и 0,6. Найти вероятность того, что все станки находятся в эксплуатации.

1.8. На станции "Скорой помощи" дежурят две машины. Вероятности технической исправности машин равны соответственно 0,95 и 0,75. Найти вероятность исполнения поступившего вызова второй машиной.

1.9. Инвестиционный фонд вкладывает поровну средства в пять предприятий при условии возврата ему каждым предприятием через определенный срок 125% от вложенной суммы. Вероятность банкротства каждого из предприятий равна 0,3.

Найти вероятность того, что по истечении срока кредита фонд получит обратно не менее вложенной суммы.

1.10. Таможенный досмотр автомашин осуществляют два инспектора. В среднем из каждых 100 машин 45 проходит через первого инспектора. Вероятность того, что при досмотре машина, соответствующая таможенным правилам, не будет задержана, составляет 0,95 у первого инспектора и 0,85 у второго. Машина, соответствующая таможенным правилам, не была задержана. Найти вероятность того, что она прошла досмотр у первого инспектора.

1.11. В первой коробке находится 10 шаров, из которых 4 синих; во второй коробке — 5 шаров, из которых 3 синих. Из первой коробки наугад перекладывают один шар во вторую коробку. Найти вероятность извлечения из второй коробки синего шара.

1.12. Три орудия произвели залп по цели, и два снаряда поразили ее. Найти вероятность поражения цели при залпе вторым орудием, если вероятности поражения цели орудиями равны соответственно 0,5; 0,6 и 0,7.

1.13. Найти вероятность поражения цели при залповой стрельбе отделением из 5 солдат, если вероятность попадания в цель каждым солдатом составляет 0,5.

1.14. Из урны, содержащей белые и черные шары, извлекают по одному шару 4 раза. Найти вероятность появления белого шара: **а)** менее трех раз; **б)** не менее трех раз.

1.15. Вероятность выпуска стандартного изделия равна 0,9. Найти вероятность того, что среди 100 приобретенных изделий будет ровно 80 стандартных.

1.16. Вероятность обращения в банк клиента за возвратом депозита равна 0,3. Найти вероятность того, что из 100 клиентов, посетивших банк, ровно 30 потребуют возврата депозита.

1.17. Вероятность появления брака в каждом из 2500 изделий равна 0,2. Найти вероятность появления стандартных изделий в количестве: **а)** не менее 1250; **б)** не менее 1200 и не более 1250;

в) не более 1249. Выпуск каждого изделия полагать независимым событием.

1.18. Вероятность обращения в травматологический пункт для каждого рабочего на стройке составляет 0,3. Найти, среди какого количества строителей следует ожидать обращения в пункт не менее 50 человек.

1.19. Банк выдал кредиты размером 400 тыс. р. каждому из 2000 клиентов на год под 15% годовых. Вероятность невозврата кредита каждым из клиентов составляет 0,05. Какой доход гарантирован банку с вероятностью: **а)** 0,7; **б)** 0,95?

1.20. Вероятность появления события в каждом из 1200 независимых испытаний равна 0,6. Найти вероятность отклонения относительной частоты появления события от его вероятности не более чем на 2% по абсолютной величине.

2. Задачи на случайные величины

2.1. Из ящика с семью деталями, среди которых имеется 5 стандартных, наудачу взяты четыре детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа стандартных деталей среди отобранных.

2.2. Тираж календаря 50 тыс. экземпляров. Вероятность брака в одном календаре равна 0,0003. Найти вероятность содержания в тираже ровно 10 бракованных календарей.

2.3. Случайная составляющая дохода равна $2{,}5X$, а случайная составляющая затрат равна $40Y$. Найти дисперсию прибыли при следующих условиях: случайная величина X распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 100$, $p = 0{,}6$; случайная величина Y распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 3$; случайные величины X и Y являются независимыми.

2.4. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения:

X	-4	0	2	3	4
p	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3.

2.5. Найти дисперсию дискретной случайной величины X — числа отказов реле в 10 независимых опытах, если вероятность отказа реле в каждом опыте равна 0,1.

2.6. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	2	3	5
p	0,1	0,2	0,4	0,3.

Найти центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

2.7. Найти ковариацию и коэффициент корреляции X и Y для двумерной случайной величины, распределение которой следующее:

$Y/X \rightarrow$	2	4	6
$\downarrow$			
1	0,1	0,2	0,3
2	0,2	0,1	0,1.

2.8. Непрерывная случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x) = (\operatorname{arcctg} x)/\pi$. Найти вероятность того, что величина X примет значение, заключенное в интервале $(-1, 1)$.

2.9. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3; \\ 0{,}3x - 1, & 3 < x \leq 6; \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что X примет значение: **а)** менее 1; **б)** менее четырех; **в)** не менее четырех; **г)** не менее семи.

2.10. Дискретная случайная величина дана законом рапределения:

X	2	4	6	8	12
p	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Найти функцию распределения и построить ее график.

2.11. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \pi/4; \\ 2\sin 2x, & \pi/4 < x \le \pi/2; \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

2.12. Случайная величина X задана на положительной полуоси Ox функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-3x}$. Найти математическое ожидание величины X.

2.13. Случайная величина X задана на интервале (0, 2) плотностью распределения $f(x) = x/8$; вне этого интервала $f(x)$=0. Найти функцию распределения и дисперсию величины X.

2.14. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2e^{-2x}$ на интервале $(0, \infty)$. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.

2.15. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2; \\ 1 - 4/x^2, & x \ge 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2.16. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (5, 10).

2.17. Сторона квадрата измерена приближенно в интервале (a, b). Найти математическое ожидание и дисперсию площади квадрата, если его сторону рассматривать как случайную величину с равномерным распределением на этом интервале.

2.18. Размер женской обуви является случайной величиной с нормальным законом распределения, математическим ожиданием 37 и дисперсией 4. Какой процент от общего объема закупок следует предусмотреть магазину для обуви 38-го размера, если этот размер находится в интервале (37,5, 38,5)?

2.19. Найти формулу плотности вероятности нормально распределенной случайной величины X, если математическое ожидание равно 5, а дисперсия равна 36.

2.20. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$. Вероятность попадания X в интервал (5, 10) равна 0,2. Найти дисперсию.

П5. Задания по теме "Обыкновенные дифференциальные уравнения"

1. Найти общие решения уравнений первого порядка методом разделения переменных.

1.1. $xy' + y = 0$.

1.2. $y - xy' = 1 + x^2y'$.

1.3. $y'xy(1 + x^2) = 1 + y^2$.

1.4. $yy' + x = 1$.

1.5. $2xyy' + y = 2$.

1.6. $x + xy + y'(y + xy) = 0$.

1.7. $y'(1 + x^2) + x(1 + 2y) = 0$.

1.8. $xy' - y = 2$.

1.9. $e^y(1 + x^2)y' - 2x(1 + e^y) = 0$.

1.10. $xy' = \sqrt{y^2 + 1}$.

2. Найти частные решения уравнений первого порядка, удовлетворяющие следующим начальным условиям.

2.1. $y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x$, $y_0 = 0{,}5$ при $x_0 = \pi/4$.

2.2. $y' = 2\sqrt{y}\ln x$, $y_0 = 1$ при $x_0 = e$.

2.3. $y'\operatorname{tg} x - y = 1$, $y_0 = 1$ при $x_0 = \pi/2$.

2.4. $y'\sin x = y\ln y$, $y_0 = 1$ при $x_0 = \pi/2$.

2.5. $y' = 2\sqrt{y}$, $y_0 = 1$ при $x_0 = 0$.

2.6. $y'(2x + 1) + y^2 = 0$, $y_0 = 1$ при $x_0 = 4$.

3. Найти общие решения линейных уравнений первого порядка.

3.1. $y' + 2y = 2$.

3.2. $y' - \frac{3y}{x} = x$.

3.3. $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$.

3.4. $y' - \frac{y}{x} = x$.

3.5. $xy' + 2y = x^2$.

3.6. $y' + x^2y = x^2$.

3.7. $y' + \frac{1-2x}{x}y = 1.$

3.8. $xy' + y = \ln x + 1.$

3.9. $y' + \frac{2y}{x} = e^{-x^2}/x.$

3.10. $y' - y = e^x.$

4. Решить уравнения Бернулли.

4.1. $x^2y' = y^2 + xy.$

4.2. $y' = x^3y^3 - xy.$

4.3. $y' - xy = -y^3e^{-x^2}.$

4.4. $y'x + y = y^2 \ln x.$

5. Найти решения линейных однородных уравнений второго порядка.

5.1. $y'' - 5y' + 4y = 0.$

5.2. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

5.3. $y'' - 7y' - 8y = 0.$

5.4. $y'' - 9y = 0.$

5.5. $y'' - 6y' + 9y = 0.$

5.6. $y'' - 2y' + 8y = 0.$

5.7. $y'' + 8y' - 9y = 0.$

5.8. $y'' + 6y' + 9y = 0.$

5.9. $y'' + 9y = 0.$

5.10. $y'' + 4y' = 0.$

6. Решить линейные неоднородные уравнения второго порядка.

6.1. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}.$

6.2. $y'' - 4y = 8x^3.$

6.3. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x.$

6.4. $y'' - 4y' + 5y = e^x.$

6.5. $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}.$

6.6. $y'' + y' - 2y = 6x^2.$

6.7. $y'' + 4y = \sin 2x.$

6.8. $y'' + 4y' + 5y = 10.$

6.9. $y'' - 3y' - 10y = x.$

6.10. $y'' - 4y = e^x.$

7. Найти частные решения линейных уравнений второго порядка, удовлетворяющие указанным начальным и краевым условиям.

7.1. $y'' + 9y = 0,$ $\quad y_0 = 0,\ y_0' = 1$ при $x_0 = 0.$

7.2. $y'' + 4y' + 4y = 4,$ $\quad y_0 = 1,\ y_0' = 0$ при $x_0 = 0.$

7.3. $y'' + y = e^x,$ $\quad y_0 = 0,\ y_0 = 1$ при $x_0 = 0.$

7.4. $y'' + 4y = 0,$ $\quad y = 0$ при $x = 0;\ y = 1$ при $x = \pi/4.$

7.5. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x},$ $\quad y = 0$ при $x = 0;\ y = 1$ при $x = \ln 2.$

7.6. $y'' - 4y' - 7y = 14$, $y = 1$ при $x = 0$; $y = 4$ при $x = \ln 4$.

7.7. $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y = 1$ при $x = 0$; $y = 2$ при $x = \ln 3$.

7.8. $y'' + y = e^x$, $y_0 = 1$, $y_0' = 1$ при $x_0 = 0$.

7.9. $y'' - y' - 2y = e^x$, $y_0 = 0$, $y_0' = 1$ при $x_0 = 0$.

7.10. $y'' - 2y' = 2e^x$, $y_0 = -1$, $y_0' = 1$ при $x_0 = 1$.

П6. Задания по теме "Линейное программирование"

6.1. Найти область решений и область допустимых решений системы неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \qquad\quad a_{32}x_2 \leq b_3. \end{cases}$$

Значения коэффициентов системы ограничений системы неравенств

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	−5	6	−3	5	5	1	1	5	10	1
a_{12}	7	−4	2	−7	4	1	1	4	−5	1
b_1	35	24	6	35	20	1	7	20	50	2
a_{21}	5	7	1	9	7	−1	4	−3	6	−1
a_{22}	6	4	1	7	2	1	−3	5	5	1
b_2	30	28	3	63	14	4	12	15	30	2
b_3	6	3	−5	−4	4	−1	−3	6	−2	5
a_{32}	1	1	−1	−1	1	−1	−1	1	−1	1

6.2. Найти область решений и область допустимых решений и определить координаты угловых точек области допустимых решений системы неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3, \\ \qquad\qquad x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

Значения коэффициентов системы ограничений системы неравенств

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	2	3	5	1	2	3	10	1	3	1
a_{12}	3	2	1	1	1	1	3	1	2	2
b_1	6	6	5	1	2	3	30	4	6	2
a_{21}	9	1	−1	−1	1	−6	−2	−3	3	2
a_{22}	−6	−1	1	3	−4	2	5	2	−2	−1
b_2	54	1	1	3	4	12	10	6	6	2
a_{31}	7	6	5	8	4	5	8	5	5	7
a_{32}	10	5	10	5	6	4	6	7	6	4
b_3	70	30	50	40	24	20	48	35	30	28

6.3. Дана задача линейного программирования

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \le b_4, \\ \qquad\qquad x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Графическим методом найти оптимальные решения при стремлении целевой функции к максимальному и минимальному значениям.

Значения коэффициентов целевой функции и системы ограничений

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1	2	3	−1	1	−1	−2	1	−1	3	0
c_2	1	−1	1	3	−2	2	1	−1	0	2
a_{11}	7	5	−1	12	3	1	7	−1	−3	−1
a_{12}	8	2	1	5	1	−2	6	−2	2	1
b_1	56	30	2	60	12	2	42	−2	−6	2
a_{21}	−2	−3	−2	−3	−3	−2	−2	−2	2	6
a_{22}	3	−2	−3	2	1	3	1	3	1	7
b_2	6	−6	−6	6	3	6	4	12	14	42
a_{31}	−2	−1	1	−1	−1	−1	3	−2	3	1
a_{32}	1	1	−3	2	1	3	−2	3	−4	−2
b_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_{41}	1	0	0	−1	0	1	0	1	0	−1
a_{42}	0	1	1	0	1	0	−1	0	1	0
b_4	6	5	4	−2	5	4	−2	5	6	−2

Составить математическую модель и провести экономический анализ задачи с использованием графического метода.

6.4. Фирма изготовляет два вида красок для внутренних (B) и наружных (H) работ. Для их производства используют исходные продукты: пигмент и олифу. Расходы исходных продуктов и максимальные суточные запасы указаны в таблице.

Расход и суточные запасы исходных продуктов

Исходный продукт	**Расход исходных продуктов на 1 т краски**		**Суточный запас, т**
	Краска H	**Краска B**	
Пигмент	a_{11}	a_{12}	b_1
Олифа	a_{21}	a_{22}	b_2

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску для наружных (внутренних) работ никогда не превышает b_3 т в сутки. Цена продажи 1 т краски для наружных работ — c_1 ден. ед., для внутренних работ — c_2 ден. ед.

Какое количество краски каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Значения коэффициентов условий задачи

№ варианта / **Значения**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1	3	1	1	2	3	2	1	3	2	4
c_2	2	1	4	2	2	1	2	4	3	5
a_{11}	1	2	3	3	1	3	3	1	1	1
a_{12}	2	1	2	1	1	4	1	1	1	2
b_1	6	6	12	3	4	24	6	6	7	8
a_{21}	2	1	1	3	4	2	1	2	2	4
a_{22}	1	2	2	2	1	1	1	1	1	3
b_2	8	6	6	12	8	8	5	8	10	24
k_1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
k_2	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1
b_3	2	2,5	3,5	4	4	3	1	4,5	6	3

Примечание. Если по условию задания спрос на краску для наружных (внутренних) работ не превышает b_3 т в сутки, то в математической модели задачи следует принять, что коэффициент системы ограничений при неизвестном значении краски для наружных (внутренних) работ, обозначенный в таблице k_1 (k_2), равен 1 (0), а при неизвестном значении краски для внутренних (наружных) работ k_2 (k_1) равен 0 (1).

6.5. Дана задача линейного программирования

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2. \\ \qquad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Решить задачу симплексным методом при стремлении целевой функции к максимальному и минимальному значениям.

Значения коэффициентов целевой функции и системы ограничений

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1	1	2	2	2	2	−3	−2	−1	3	−2
c_2	−2	3	−1	−1	1	1	−2	2	2	−1
c_3	3	−1	3	0	−1	3	3	−1	1	−1
c_4	1	−1	1	3	−1	−1	0	3	−1	3
a_{11}	1	1	2	1	1	1	−2	3	1	−3
a_{12}	−1	1	1	2	−1	2	1	−1	3	2
a_{13}	3	−7	2	3	2	−1	3	2	−1	−1
a_{14}	2	−1	−3	−1	1	1	1	−1	2	1
b_1	3	3	3	1	2	2	2	5	7	5
a_{21}	2	2	−1	3	2	2	2	−1	2	1
a_{22}	−3	3	−2	2	1	−2	3	2	−1	3
a_{23}	5	−1	1	1	−3	3	4	1	2	1
a_{24}	−1	5	2	−1	1	3	0	2	1	2
b_2	4	8	5	5	6	9	1	0	1	10

6.6. Составить математическую модель и решить задачу симплексным методом.

В производстве пользующихся спросом двух изделий, A и B, принимают участие 3 цеха фирмы. На изготовление одного изделия A 1-й цех затрачивает a_1 ч, 2-й цех — a_2 ч, 3-й цех — a_3 ч. На изготовление одного изделия B 1-й цех затрачивает d_1 ч, 2-й цех — d_2 ч, 3-й цех — d_3 ч. На производство обоих изделий 1-й цех может затратить не более b_1 ч, 2-й цех — не более b_2 ч, 3-й цех — не более b_3 ч.

От реализации одного изделия A фирма получает доход c_1 р., изделия B — c_2 р.

Определить максимальный доход от реализации всех изделий A и B.

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	7	10	8	8	10	5	3	7	7	5
a_2	6	9	7	7	9	6	9	7	7	9
a_3	5	3	7	7	5	7	10	8	8	10
d_1	8	18	12	10	6	7	5	13	5	7
d_2	3	15	9	5	3	6	3	8	2	9
d_3	1	1	5	2	1	1	2	2	1	8
b_1	476	1238	612	459	735	256	414	363	347	343
b_2	364	1118	492	379	765	283	723	327	300	587
b_3	319	523	562	459	455	363	788	429	357	587
c_1	11	11	11	9	8	9	12	6	11	11
c_2	10	13	9	9	4	7	16	4	7	7

6.7. Дана исходная задача

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \le b_4, \\ \qquad\qquad x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Составить математическую модель симметричной двойственной задачи. По решению двойственной или исходной задачи найти решение другой с использованием основных теорем двойственности.

Значения коэффициентов целевой функции и системы ограничений

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1	−1	−2	1	−1	3	0	2	3	−1	1
c_2	−2	2	1	−1	0	2	1	−1	1	3
a_{11}	3	1	7	−1	−3	−1	7	5	−2	12
a_{12}	1	−2	6	−2	2	1	8	2	3	5
b_1	12	2	42	−2	−6	2	56	30	2	60
a_{21}	−3	−2	−2	−2	2	6	−2	−3	−2	−3
a_{22}	1	3	1	3	1	7	3	−2	−3	2
b_2	3	6	4	12	14	42	6	−6	−6	6
a_{31}	−1	−1	3	−2	3	1	−2	−1	1	−1
a_{32}	1	3	−2	3	−4	−2	1	1	−3	2
b_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_{41}	0	1	0	1	0	−1	1	0	0	−1
a_{42}	1	0	−1	0	1	0	0	1	1	0
b_4	5	4	−2	5	6	−2	6	5	4	−2
$L(x)$	min	min	max	min	max	max	max	min	max	max

6.8. Дана исходная задача

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2. \\ \qquad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Составить математическую модель несимметричной двойственной задачи. По решению двойственной или исходной задачи найти решение другой с использованием основных теорем двойственности.

Значения коэффициентов целевой функции и системы ограничений

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1	2	−3	−2	−1	3	−2	1	2	2	2
c_2	1	1	−2	2	2	−1	−2	3	−1	−3
c_3	−1	3	3	−1	1	−1	3	−1	3	0
c_4	−1	−1	0	3	−1	3	1	−1	1	3
a_{11}	1	1	−2	3	1	−3	1	1	2	1
a_{12}	−1	2	1	−1	3	2	−1	1	1	2
a_{13}	2	−1	3	2	−1	−1	3	−7	2	3
a_{14}	1	1	1	−1	2	1	2	−1	−3	−1
b_1	2	2	2	5	7	5	3	3	3	1
a_{21}	2	2	2	−1	2	1	2	2	−1	3
a_{22}	1	−2	3	2	−1	3	−3	3	−2	2
a_{23}	−3	3	4	1	2	1	5	−1	1	1
a_{24}	1	3	0	2	1	2	−1	5	2	−1
b_2	6	9	1	0	1	10	4	8	5	5

6.9. Решить транспортную задачу, заданную распределительной таблицей.

a_i \ b_j		40	20	40
1	30	c_{11}	c_{12}	c_{13}
2	25	c_{21}	c_{22}	c_{23}
3	15	c_{31}	c_{32}	c_{33}
4	30	c_{41}	c_{42}	c_{43}

Значения коэффициентов распределительной таблицы

Значения \ **№ варианта**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_{11}	3	6	2	5	5	5	2	3	2	3
c_{12}	5	2	6	4	3	3	5	1	4	1
c_{13}	4	4	4	3	4	1	4	3	3	4
c_{21}	4	2	4	2	2	3	1	5	2	6
c_{22}	2	1	3	3	6	4	4	4	5	3
c_{23}	1	5	5	3	5	5	5	2	2	2
c_{31}	1	5	3	3	4	4	2	4	4	6
c_{32}	3	6	1	1	4	2	6	3	1	5
c_{33}	2	3	5	2	3	3	5	5	4	3
c_{41}	5	1	5	1	5	2	4	1	5	2
c_{42}	3	3	2	2	3	4	3	5	3	3
c_{43}	5	2	5	5	2	5	1	5	5	5

6.10. Решить транспортную задачу, заданную распределительной таблицей.

a_i \ b_j		1	2
		30	25
1	15	c_{11}	c_{12}
2	35	c_{21}	c_{22}
3	20	c_{31}	c_{32}

Значения коэффициентов распределительной таблицы

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_{11}	4	4	2	3	1	4	3	3	2	3
c_{12}	3	1	4	5	1	3	4	1	3	4
c_{21}	1	3	1	2	3	1	2	2	1	5
c_{22}	2	4	3	3	2	3	5	1	1	2
c_{31}	3	2	1	1	4	1	1	4	5	2
c_{32}	5	2	5	1	5	5	1	2	4	1

6.11. Составить математическую модель транспортной задачи и решить ее.

Фирма имеет три магазина розничной торговли, расположенных в разных районах города (A, B, C). Поставки продукции в эти магазины осуществляются с двух складов D и E, площади которых вмещают 30 и 25 т продукции соответственно. В связи с возросшим покупательским спросом фирма планирует расширить площади магазинов, поэтому их потребности в продукции с торговых складов составят 20, 35 и 15 т в день. Чтобы удовлетворить спрос на продукцию, предполагается строительство третьего склада, площади которого позволят хранить в нем 15 т продукции ежедневно. Руководство фирмы рассматривает два варианта его размещения. В таблице даны транспортные издержки, соответствующие перевозке продукции с двух существующих складов, и два варианта размещения нового склада.

Оценить две транспортные модели и принять решение, какой вариант размещения нового склада выгоднее. Предполагается, что остальные издержки сохраняют существующие значения.

Торговый склад	**Транспортные издержки, ден. ед.**		
	A	***B***	***C***
D	c_{11}	c_{12}	c_{13}
E	c_{21}	c_{22}	c_{23}
Вариант 1	c_{31}	c_{32}	c_{33}
Вариант 2	c_{41}	c_{42}	c_{43}

Значения коэффициентов

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_{11}	5	2	3	3	2	3	1	5	4	3
c_{12}	6	5	5	1	5	2	4	1	2	2
c_{13}	3	4	1	3	4	2	5	3	5	3
c_{21}	2	3	4	4	1	4	3	4	4	1
c_{22}	5	1	2	4	3	3	5	5	3	5
c_{23}	4	4	3	2	3	5	2	4	1	5
c_{31}	3	4	4	3	4	1	3	2	3	3
c_{32}	4	2	5	5	2	5	2	3	2	4
c_{33}	5	3	4	5	5	5	3	4	4	3
c_{41}	1	5	1	2	3	4	1	4	2	2
c_{42}	3	3	3	3	4	2	2	3	1	1
c_{43}	3	1	5	1	2	1	1	5	3	4

6.12. Дана задача линейного программирования

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \ge b_3, \\ \qquad\qquad x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Графическим методом найти максимальное и минимальное целочисленные решения задач.

Решить задачу методом Гомори, принимая по своему усмотрению стремление целевой функции к максимальному или минимальному значениям.

Значения коэффициентов целевой функции и системы ограничений

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1	4	3	−1	−3	2	4	−3	−3	5	−2
c_2	5	2	−1	−5	3	3	−2	4	−2	3
a_{11}	6	8	7	4	8	10	8	15	9	3
a_{12}	4	5	10	6	6	7	9	8	12	−10
b_1	37	42	68	41	51	73	75	110	118	31
a_{21}	5	5	9	6	−5	−5	7	5	−2	6
a_{22}	6	7	7	4	7	2	−5	10	4	13
b_2	43	33	65	38	34	9	32	53	−7	75
a_{31}	2	4	3	2	−2	2	2	2	10	10
c_{32}	3	2	2	4	6	5	8	12	5	2
b_3	5	5	7	5	7	12	17	25	52	21

П7. Задания по теме “Нелинейное программирование”

7.1. Дана задача с линейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений.

Используя графический метод, найти глобальные экстремумы функции, при этом с 1-го по 5-й вариант выполнения работ принять математическую модель задачи вида

$$L = c_1x_1 + c_2x_2$$

при ограничениях:

$$x_1^2 + x_2^2 \le b_1,$$
$$x_{1,2} \ge 0;$$

с 6-го по 10-й вариант — вида

$$L = c_1x_1 + c_2x_2$$

при ограничениях:

$$x_1x_2 \le b_1,$$
$$x_1 \le b_2,$$
$$x_2 \le b_3,$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

Значения коэффициентов целевых функций и систем ограничений

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1	2	1	−1	2	−3	2	3	−2	2	−1
c_2	3	2	−2	1	−1	3	2	−1	1	−2
b_1	16	36	25	4	9	3	2	5	4	2
b_2	-	-	-	-	-	4	6	5	7	8
b_3	-	-	-	-	-	5	7	4	5	6

7.2. Дана задача с нелинейной целевой функцией и линейной системой ограничений.

Используя графический метод, найти глобальные экстремумы функции

$$L = (x_1 + a)^2 + (x_2 + b)^2$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Значения коэффициентов целевой функции и системы ограничений

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	−5	−6	−1	−2	−3	−1	−3	−2	−2	1
b	−4	−2	−1	−1	−4	−1	−1	−6	−2	−1

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	5	2	5	2	3	3	3	3	6	6
a_{12}	−4	5	−4	5	8	5	8	5	7	7
b_1	−20	20	−20	20	24	15	24	15	42	42
a_{21}	3	2	3	2	4	5	4	5	3	3
a_{22}	2	1	2	1	7	3	7	3	−2	−2
b_2	30	10	30	10	28	15	28	15	−6	−6

7.3. Дана задача с нелинейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений.

Используя графический метод, найти глобальные экстремумы функции, при этом с 1-го по 5-й вариант выполнения работ принять математическую модель задачи вида

$$L = (x_1 + a)^2 + (x_2 + b)^2$$

при ограничениях:

$$x_1 x_2 \le b_1,$$
$$x_1 \le b_2,$$
$$x_2 \le b_3,$$
$$x_{1,2} \ge 0;$$

с 6-го по 10-й вариант — вида

$$L = (x_1 + a)^2 + (x_2 + b)^2$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 \le b_1,$$
$$x_1 \le b_2,$$
$$x_2 \le b_3,$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

Значения коэффициентов целевой функции и системы ограничений

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	−2	1	−1	2	−1	−1	1	0	−2
b	−1	1	−2	−1	2	−2	1	−1	−2	0
b_1	4	5	6	3	2	16	25	36	4	9
b_2	6	5	4	5	3	3,5	4,5	5,5	6,5	2,8
b_3	5	6	5	4	6	3,5	4,5	5,5	6,5	2,8

7.4. Дана задача нелинейного программирования

$$L = ax_1x_2$$

при ограничении

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1.$$

Найти условный экстремум с использованием метода множителей Лагранжа.

Значения коэффициентов целевой функции и системы ограничений

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	2	1	3	−1	−2	−3	1	2	−1
a_{11}	1	2	3	2	−1	1	3	1	1	3
a_{12}	1	3	1	1	3	−2	−1	3	3	−3
b_1	1	4	2	3	2	2	3	1	2	2

П8. Задания по теме "Динамическое программирование"

8.1. Определить оптимальный цикл замены оборудования при следующих исходных данных: $S(t) = 0$, $f(t) = r(t) - u(t)$.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(t)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	12	10	14	11	13	15	16	15	14	11
a_1	12	10	14	11	13	15	16	15	14	11
a_2	10	9	12	10	12	14	15	14	13	10
a_3	8	8	10	9	11	12	13	13	12	9
a_4	6	7	8	7	9	10	11	11	10	8
a_5	4	5	6	5	7	8	8	9	7	7
a_6	2	3	4	3	4	6	5	7	4	5
a_7	0	1	1	0	1	3	2	4	1	3
a_8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
a_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

8.2. Совет директоров фирмы рассматривает предложения по наращиванию производственных мощностей для увеличения выпуска однородной продукции на четырех предприятиях, принадлежащих фирме.

Для модернизации предприятий совет директоров инвестирует средства в объеме 250 млн р. с дискретностью 50 млн р. Прирост выпуска продукции зависит от выделенной суммы, его значения представлены предприятиями и содержатся в таблице.

Найти распределение инвестиций между предприятиями, обеспечивающее фирме максимальный прирост выпуска продукции, причем на одно предприятие можно осуществить только одну инвестицию.

Инвестиции, млн р.	**Прирост выпуска продукции, млн р.**			
	Предприятие 1	**Предприятие 2**	**Предприятие 3**	**Предприятие 4**
50	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
100	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
150	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
200	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
250	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / **Значения**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	5	8	11	10	12	21	22	23	25	15
a_{12}	7	10	12	9	13	20	23	24	26	12
a_{13}	6	7	10	7	11	22	24	25	27	17
a_{14}	4	10	11	8	11	23	21	22	28	13
a_{21}	9	13	16	15	17	30	31	32	34	32
a_{22}	10	12	15	16	15	28	30	31	33	30
a_{23}	8	14	17	13	16	31	32	33	35	33
a_{24}	11	13	14	14	18	29	29	30	35	31
a_{31}	21	22	23	24	23	42	43	44	46	39
a_{32}	20	21	24	22	25	41	41	43	46	38
a_{33}	21	22	22	20	21	40	42	42	45	40
a_{34}	19	23	25	21	22	41	40	41	44	37
a_{41}	33	31	32	33	34	51	52	53	57	46
a_{42}	34	38	31	34	33	52	53	52	58	45
a_{43}	32	29	32	31	35	53	51	54	56	47
a_{44}	35	30	30	32	34	50	53	55	55	44
a_{51}	38	39	38	40	42	62	63	70	78	52
a_{52}	39	40	39	39	41	63	64	72	77	54
a_{53}	40	38	40	41	43	61	65	71	79	60
a_{54}	41	41	38	40	44	64	66	73	80	63

8.3. В трех районах города предприниматель планирует строительство пользующихся спросом одинаковых по площади мини-магазинов "Продукты". Известны места, в которых их можно построить. Подсчитаны затраты на их строительство и эксплуатацию.

Необходимо так разместить мини-магазины, чтобы затраты на их строительство и эксплуатацию были минимальные.

x	1	2	3	4
$g_1(x)$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
$g_2(x)$	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
$g_3(x)$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	10	5	22	15	8	26	18	12	19	24
a_{12}	21	9	35	25	13	44	29	21	36	43
a_{13}	32	16	47	41	21	67	42	28	53	62
a_{14}	45	21	61	53	28	89	57	37	67	79
a_{21}	8	6	20	13	9	25	17	11	20	25
a_{22}	22	11	37	26	14	46	30	22	37	41
a_{23}	30	17	46	40	20	65	41	27	54	64
a_{24}	46	20	58	55	27	91	55	35	65	78
a_{31}	9	4	23	17	7	24	20	13	18	24
a_{32}	20	8	36	24	15	47	32	20	35	44
a_{33}	31	15	50	39	22	64	44	29	55	60
a_{34}	44	19	59	52	30	93	59	39	69	81

8.4. Требуется проложить трубопровод на дачном массиве между двумя пунктами A и B таким образом, чтобы затраты на проведение работ (в тыс. р.) были минимальные.

a_{11} b_{11} b_{12} a_{21}	a_{12} b_{13} a_{22}	a_{13} b_{14} a_{23}	B
b_{21} b_{22} a_{31}	b_{32} a_{32}	b_{24} a_{33}	
b_{31} b_{32} a_{41}	b_{33} a_{42}	b_{34} a_{43}	
A			

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	22	5	13	24	33	17	20	28	29	35
a_{12}	21	4	14	25	32	18	19	27	30	34
a_{13}	20	3	15	23	31	16	18	26	28	36
a_{21}	22	4	14	25	32	18	19	25	28	35
a_{22}	19	5	15	23	33	17	18	25	29	36
a_{23}	22	3	13	24	31	16	20	26	30	34
a_{31}	21	3	15	23	33	17	20	26	29	34
a_{32}	20	4	13	24	31	16	19	27	30	35
a_{33}	22	5	14	25	32	18	18	25	28	36
a_{41}	20	3	13	24	31	16	18	27	30	36
a_{42}	22	4	14	25	32	18	20	26	28	34
a_{43}	21	5	15	23	33	17	19	28	29	35
b_{11}	21	3	15	23	33	17	18	26	30	36
b_{12}	20	4	13	24	31	16	20	27	29	34
b_{13}	19	5	14	25	32	18	19	28	29	35
b_{14}	21	4	13	24	33	17	20	27	28	35
b_{21}	20	5	13	24	31	16	19	27	28	35
b_{22}	22	3	14	25	32	18	18	25	28	36
b_{23}	21	4	15	23	33	17	20	26	30	34
b_{24}	22	4	15	23	31	16	19	28	29	34
b_{31}	22	4	14	25	32	18	20	25	29	34
b_{32}	21	5	15	23	33	17	19	28	30	35
b_{33}	23	3	13	24	31	16	18	27	28	36
b_{34}	20	4	14	25	32	18	18	26	30	36

П9. Задания по теме “Сетевые модели”

9.1. Районной администрацией принято решение о газификации одного из небольших сел района, имеющего 10 жилых домов.

Расположение домов указано на рис. 9.1. Числа в кружках обозначают условный номер дома. Узел 11 является газопонижающей станцией.

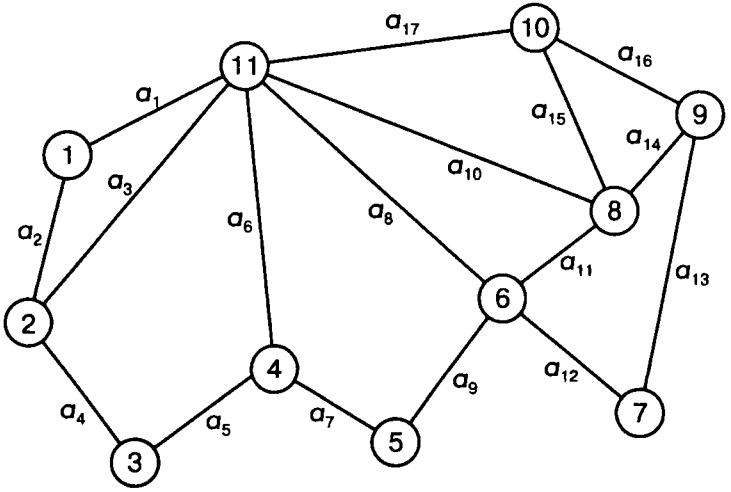


Рис. 9.1

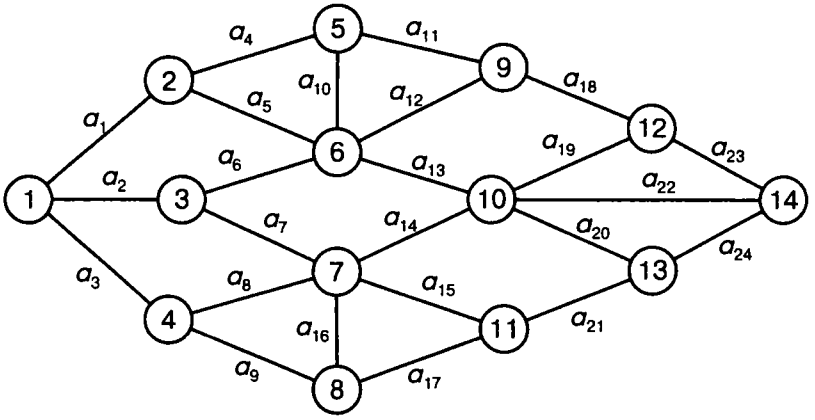


Рис. 9.2

Разработать такой план газификации села, чтобы общая длина трубопроводов была наименьшей.

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	200	180	220	150	170	190	230	160	210	240
a_2	60	70	50	40	80	70	30	100	90	40
a_3	250	270	290	220	230	240	280	250	260	300
a_4	110	130	120	140	100	150	200	170	190	180
a_5	150	140	110	100	120	130	160	150	140	110
a_6	300	320	310	350	330	360	340	310	290	370
a_7	80	90	70	100	60	50	70	40	50	90
a_8	350	370	360	390	340	380	330	390	360	400
a_9	120	130	140	190	150	180	170	160	140	160
a_{10}	400	440	420	430	470	450	410	460	440	470
a_{11}	210	190	200	210	220	180	230	170	180	190
a_{12}	40	50	30	60	80	70	90	80	50	40
a_{13}	120	130	150	120	100	170	160	70	90	110
a_{14}	30	40	50	60	30	50	80	70	90	40
a_{15}	70	50	40	60	30	80	70	90	40	50
a_{16}	20	40	30	50	30	70	20	60	40	50
a_{17}	550	580	570	590	530	520	560	630	600	610

9.2. Транспортному предприятию требуется перевезти груз из пункта 1 в пункт 14. На рис. 9.2 показана сеть дорог и стоимость перевозки единицы груза между отдельными пунктами.

Определить маршрут доставки груза, которому соответствуют наименьшие затраты.

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	20	18	22	15	17	19	23	16	21	24
a_2	18	19	21	16	18	21	20	15	19	22
a_3	19	17	20	17	16	20	22	17	20	23
a_4	11	13	12	14	10	15	20	17	19	18
a_5	15	14	11	10	12	13	16	15	16	17
a_6	13	15	10	12	13	16	17	16	18	16
a_7	12	16	9	11	9	14	19	14	15	19
a_8	14	17	13	13	11	18	18	19	17	20
a_9	12	18	14	16	15	17	15	18	14	21
a_{10}	24	21	20	18	17	16	19	16	22	23
a_{11}	21	19	20	21	22	18	23	17	18	19
a_{12}	20	22	19	23	18	17	24	16	20	21
a_{13}	22	21	18	22	21	19	20	18	19	18
a_{14}	23	23	21	20	19	16	22	15	21	20
a_{15}	24	18	17	24	20	15	21	19	22	22
a_{16}	20	21	23	19	22	18	20	16	17	21
a_{17}	22	17	19	23	18	17	19	22	20	21
a_{18}	31	32	30	35	37	36	33	36	31	34
a_{19}	32	33	29	31	36	37	34	35	32	33
a_{20}	35	37	32	33	34	38	36	31	36	30
a_{21}	37	36	31	34	36	35	40	37	39	38
a_{22}	45	41	43	42	44	40	46	45	47	45
a_{23}	28	32	30	25	26	28	33	31	29	27
a_{24}	30	31	332	24	25	29	32	33	30	29

9.3. Составить сетевой график выполнения работ и рассчитать временные параметры по данным, представленным в таблице.

Содержание работы	Обозначение	Предыдущая работа	Продолжительность, дн.
Исходные данные на изделие	a_1		t_1
Заказ комплектующих деталей	a_2	a_1	t_2
Выпуск документации	a_3	a_1	t_3
Изготовление деталей	a_4	a_3	t_4
Поставка комплектующих деталей	a_5	a_2	t_5
Сборка изделия	a_6	a_4, a_5	t_6
Выпуск документации на испытание	a_7	a_3	t_7
Испытание и приемка изделия	a_8	a_6, a_7	t_8

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_1	30	33	36	35	25	20	15	30	25	20
t_2	7	9	8	6	8	11	10	5	9	7
t_3	15	17	18	14	16	20	12	13	20	19
t_4	35	33	32	34	31	35	30	37	39	38
t_5	25	24	21	20	22	23	26	25	18	16
t_6	13	15	10	12	13	16	17	16	18	16
t_7	12	16	9	11	9	14	19	14	15	19
t_8	14	17	13	13	11	18	18	19	17	20

9.4. Постройте график работ, определите критический путь и стоимость работ до сжатия. Найдите критический путь и минимальную стоимость работ после сжатия.

Операция	Нормальный режим		Максимальный режим	
	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. р.	Продолжительность, дн.	Затраты, тыс. р.
1,2	a_{11}	b_{11}	a_{12}	b_{12}
2,3	a_{21}	b_{21}	a_{22}	b_{22}
2,4	a_{31}	b_{31}	a_{32}	b_{32}
3,5	a_{51}	b_{51}	a_{52}	b_{52}
4,5	a_{61}	b_{61}	a_{62}	b_{62}
5,6	a_{71}	b_{71}	a_{72}	b_{72}

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	20	18	22	15	17	19	23	16	21	24
a_{21}	28	29	31	36	28	31	30	25	29	32
a_{31}	19	17	20	17	16	20	22	17	20	23
a_{41}	21	23	22	24	20	25	30	27	29	28
a_{51}	25	24	21	20	22	23	26	25	26	27
a_{61}	13	15	10	12	13	16	17	16	18	16
a_{71}	12	16	9	11	9	14	19	14	15	19
b_{11}	14	17	13	13	11	18	18	19	17	20
b_{21}	12	18	14	16	15	17	15	18	14	21
b_{31}	24	21	20	18	17	16	19	16	22	23
b_{41}	21	19	20	21	22	18	23	17	18	19
b_{51}	20	22	19	23	18	17	24	16	20	21
b_{61}	22	21	18	22	21	19	20	18	19	18
b_{71}	23	23	21	20	19	16	22	15	21	20

Окончание табл.

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{12}	17	15	18	13	14	15	18	13	16	18
a_{22}	23	24	24	30	22	26	24	21	25	27
a_{32}	16	14	16	15	13	17	18	22	16	19
a_{42}	17	20	18	21	16	21	25	22	24	24
a_{52}	20	21	18	17	18	19	21	21	22	23
a_{62}	11	13	8	10	11	12	14	15	14	13
a_{72}	10	13	8	9	7	11	15	12	12	16
b_{12}	17	21	15	16	14	23	24	25	22	25
b_{22}	15	22	17	20	19	22	21	23	18	27
b_{32}	30	26	25	23	24	20	25	21	27	29
b_{42}	26	25	24	27	28	23	29	22	23	24
b_{52}	25	28	14	29	22	23	30	20	27	29
b_{62}	28	27	15	29	26	15	26	24	23	22
b_{72}	29	30	26	25	24	21	29	20	27	26

П10. Задания по теме “Теория игр”

10.1. Найти оптимальные стратегии и цену игры, заданной платежной матрицей. При этом с 1-го по 5-й вариант выполнения работ принять платежную матрицу вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

с 6-го по 10-й вариант — вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}.$$

Значения коэффициентов платежных матриц

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	3	4	2	5	4	4	3	4	3	–2
a_{12}	4	3	5	4	3	7	2	1	4	3
a_{13}	5	2	3	3	6	–	–	–	–	–
a_{14}	2	3	4	7	4	–	–	–	–	–
a_{21}	7	5	3	4	5	9	4	2	2	4
a_{22}	6	2	2	2	6	3	–1	3	3	2
a_{23}	4	6	5	5	4	–	–	–	–	–
a_{24}	8	1	3	4	7	–	–	–	–	–
a_{31}	–	–	–	–	–	5	5	–1	5	3
a_{32}	–	–	–	–	–	9	3	2	3	5
a_{41}	–	–	–	–	–	6	2	3	4	2
a_{42}	–	–	–	–	–	9	4	5	2	4

10.2. Торговая фирма разработала несколько вариантов плана продаж товаров на предстоящей ярмарке с учетом конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели дохода представлены в таблице.

1) Определить оптимальную стратегию фирмы в продаже товаров на ярмарке.

2) Если существует риск (вероятность реализации плана $П_1$ — b%, $П_2$ — c%, $П_3$ — d%), то какую стратегию фирме следует считать оптимальной?

План продажи	Величина дохода, ден. ед.		
	$Д_1$	$Д_2$	$Д_3$
$П_1$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$П_2$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$П_3$	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	3	2	3	4	3	5	2	2	3	2
a_{12}	5	4	4	3	2	3	3	1	2	4
a_{13}	1	2	2	5	4	-4	3	3	4	3
a_{21}	1	1	1	6	5	-2	4	4	5	3
a_{22}	4	3	2	2	3	5	2	3	3	1
a_{23}	3	5	4	3	2	2	1	1	2	4
a_{31}	4	4	5	2	2	1	3	1	2	2
a_{32}	2	2	3	5	5	1	2	4	5	3
a_{33}	5	-3	1	-2	-5	3	4	2	5	3
b, %	40	30	30	35	45	20	30	25	40	15
c, %	30	20	45	25	35	40	35	25	15	35
d, %	30	50	25	40	20	40	35	50	45	50

10.3. Фирма производит пользующиеся спросом детские платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты фирмы в течение апреля–мая на единицу продукции составят: платья — A ден. ед., костюмы — B ден. ед. Цена реализации составит C ден. ед. и D ден. ед. соответственно.

По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды E шт. платьев и K шт. костюмов, при прохладной погоде — M шт. платьев и N шт. костюмов.

В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход.

Задачу решить графическим методом и с использованием критериев игр с природой, приняв степень оптимизма α, указанную в таблице.

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	5	10	7	12	15	9	11	13	6	8
B	25	35	28	40	42	32	38	41	26	30
C	10	18	12	22	28	15	20	24	11	14
D	40	80	55	95	115	70	85	105	50	60
E	1220	1370	1340	1430	1460	1310	1390	1510	1480	1550
K	550	530	490	510	570	560	580	605	590	600
M	410	450	430	460	470	440	465	475	480	490
N	930	970	950	920	980	990	960	910	940	880
α	0,4	0,6	0,3	0,7	0,5	0,4	0,3	0,7	0,6	0,5

10.4. Решить задачу с использованием "дерева" решений.

Фирма планирует построить среднее или малое предприятие по производству пользующейся спросом продукции. Решение о строительстве определяется будущим спросом на продукцию, которую предполагается выпускать на планируемом предприятии.

Строительство среднего предприятия экономически оправданно при высоком спросе, но можно построить малое предприятие и через 2 года его расширить.

Фирма рассматривает данную задачу на десятилетний период. Анализ рыночной ситуации, проведенный службой маркетинга, показывает, что вероятности высокого и низкого уровней спроса составляют A и B соответственно.

Строительство среднего предприятия составит C млн р., малого — D млн р. Затраты на расширение малого предприятия оцениваются в E млн р.

Ожидаемые ежегодные доходы для каждой из возможных альтернатив:

— среднее предприятие при высоком (низком) спросе — $F(K)$ млн р.;

— малое предприятие при низком спросе — L млн р.;

— малое предприятие при высоком спросе — M млн р.;
— расширенное предприятие при высоком (низком) спросе — $N(p)$ млн р.;
— малое предприятие без расширения при высоком спросе в течение первых двух лет и последующем низком спросе дает R млн р. за остальные 8 лет.

Определить оптимальную стратегию фирмы в строительстве предприятий по выпуску продукции.

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0,7	0,8	0,75	0,6	0,65	0,7	0,8	0,75	0,6	0,65
B	0,3	0,2	0,25	0,4	0,35	0,3	0,2	0,25	0,4	0,35
C	10	9	8	7	6	8,5	7,5	9,5	6,5	7,5
D	3	2,5	2	1,5	1	2,8	1,7	2,6	1,2	1,8
E	6	5	4	3	2	4,6	3,8	5,2	2,3	3,4
F	2	1,8	1,6	1,4	1,2	1,7	1,5	1,9	1,3	1,4
K	0,5	0,45	0,4	0,3	0,2	0,4	0,35	0,5	0,25	0,38
L	0,4	0,35	0,3	0,2	0,15	0,32	0,22	0,36	0,15	0,25
M	0,5	0,4	0,3	0,25	0,2	0,33	0,28	0,45	0,25	0,27
N	1,8	1,7	1,6	1,5	1,3	1,65	1,55	1,75	1,4	1,6
P	0,4	0,3	0,25	0,2	0,15	0,26	0,22	0,35	0,18	0,24
R	0,4	0,35	0,28	0,18	0,1	0,32	0,21	0,37	0,15	0,2

П11. Задания по теме "Системы массового обслуживания"

11.1. Контроль готовой продукции фирмы осуществляют A контролеров. Если изделие поступает на контроль, когда все контролеры заняты проверкой готовых изделий, то оно остается непроверенным. Среднее число изделий, выпускаемых фирмой, составляет B изд./ч. Среднее время на проверку одного изделия — C мин.

Определить вероятность того, что изделие пройдет проверку, насколько загружены контролеры и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{\text{обс}} \geq D$.

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	3	4	5	6	3	5	4	2	3	5
B	20	22	25	30	18	28	24	14	16	26
C	7	6	5	8	6	4	3	5	6	7
D	0,97	0,98	0,96	0,97	0,98	0,96	0,98	0,97	0,96	0,98

11.2. Приходная касса городского района с временем работы A часов в день проводит прием от населения коммунальных услуг и различных платежей в среднем от B человек в день.

В приходной кассе работают C операторов-кассиров. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента составляет D мин.

Определить характеристики работы приходной кассы как объекта СМО.

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	11	10	10	9	8	9	8	11	7	7
B	220	220	300	300	280	270	240	300	200	240
C	2	2	3	3	4	4	3	3	2	4
D	4	3	4	3	4	3	5	5	2	5

11.3. На АЗС установлено A колонок для выдачи бензина. Около станции находится площадка на B автомашин для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем C маш./ч. Среднее время заправки одной автомашины — D мин.

Определить вероятность отказа и среднюю длину очереди.

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	3	2	3	3	2	4	3	2	3	3
B	2	3	1	3	3	2	4	2	2	2
C	15	10	20	30	25	20	35	15	20	30
D	2	3	4	3	2,5	3,3	3	2	2,5	3

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава 1

1.1. $(-2, 2)$. **1.2.** $[-3, 3]$. **1.3.** $(-\infty, -5)\bigcup(5, \infty)$. **1.4.** $(2, 4)$. **1.5.** $[-4, 4]$. **1.6.** $(-\infty, -2]\bigcup[2, \infty)$. **1.7.** $(0, 1)$. **1.8.** $(-\infty, \infty)$. **1.9.** $\varnothing$. **1.10.** а) $38 + 21i$. б) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9}i$. в) $-\frac{1}{13} + \frac{18}{13}i$.

1.11. а) $\cos\pi + i\sin\pi$. б) $3(\cos 0 + i\sin 0)$. в) $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$.

г) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. д) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

е) $3(\cos 0 + i\sin 0)$. ж) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

з) $\cos(\pi + \varphi) + i\sin(\pi + \varphi)$. и) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$.

к) $\frac{1}{\cos\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

1.12. а) 8. б) 16. в) $-256 - 256i$. г) 14. д) $-i$. е) i.

1.13. а) -1; $\frac{19 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$. б) ± 1; $\pm i$. в) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. г) 3; $-\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

д) $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$. е) ± 3; $\pm 3i$; $\pm(\sqrt{3} + i\sqrt{3})$; $\pm(\sqrt{3} - i\sqrt{3})$.

ж) -1; $\pm i$; $\frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$.

Глава 2

2.1. $\frac{2}{3}$. **2.2.** ∞. **2.3.** 1. **2.4.** 0. **2.5.** 2. **2.6.** $\frac{1}{3}$. **2.7.** 0.

2.8. $\frac{1}{2}$. **2.9. а)** ≈ 23 года, **б)** ≈ 14 лет. **2.10.** $\approx 37\%$.

2.11. Задержка денег и их "прокручивание". **2.12.** $\approx 64\%$.

Глава 3

3.1. $(-\infty, \infty)$. **3.2.** (∞, ∞). **3.3.** $(-\infty, \frac{2}{3}) \bigcup (\frac{2}{3}, \infty)$.

3.4. $(-\infty, -3] \bigcup [3, \infty)$. **3.5.** $[3, \infty)$. **3.6.** $(6, \infty)$.

3.7. $(-\infty, 1] \bigcup [3, \infty]$. **3.8.** $(1, 2)$. **3.9.** $(-\infty, \infty)$. **3.10.** $(-\infty, \infty)$.

3.11. $(-\infty, 0) \bigcup (0, \infty)$. **3.12.** $(-\infty, 1) \bigcup (1, 2) \bigcup (2, \infty)$.

3.13. $(3, \infty)$. **3.14.** $(0, 3)$. **3.15.** $(-\infty, \infty)$; -2; 0; 4.

3.16. $[0{,}1, 10]$; π; $\pi/2$; 0. **3.17.** $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

3.18. а) 4, нет; **б)** 2, да; **в)** 2, нет; **г)** 2, да.

3.19. 6. **3.20.** 0. **3.21.** 1. **3.22.** ∞. **3.23.** 0. **3.24.** 2.

3.25. $\frac{3}{5}$. **3.26.** 1. **3.27.** 3. **3.28.** $\frac{3}{5}$. **3.29.** 1. **3.30.** $\frac{1}{3}$.

3.31. $\frac{1}{2}$. **3.32.** e^4. **3.33.** $e^{9/2}$. **3.34.** $x = -2$, второго рода.

3.35. $x = 0$, второго рода. **3.36.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; все разрывы второго рода.

3.37. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; все разрывы второго рода.

3.38. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; все разрывы второго рода.

3.39. $x = 1, x = 2$; оба разрыва второго рода.

3.40. $x = 2$, устранимый разрыв; $x = 1$, разрыв второго рода.

Глава 4

4.1. $3x^2 + 6x - 2$. **4.2.** $35x^6 + 18x^2 - 4$. **4.3.** $-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

4.4. $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} + 4x^3$. **4.5.** $\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt{x^3}} - \dfrac{9}{x^4} + \dfrac{8}{x^5}$.

4.6. $15x^4 + 2\cos x + \dfrac{5}{\cos^2 x}$. **4.7.** $\dfrac{5}{6}x^{-1/6} - 24x^5 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

4.8. $\dfrac{1}{x}(\log_2 e - 3\log_3 e)$. **4.9.** $3e^x + \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4.10. $\ln 5\, 5^x + \ln 6\, 6^x - \ln 5\, 5^{-x}$. **4.11.** $2x \operatorname{tg} x + \dfrac{x^2}{\cos^2 x}$.

4.12. $(\dfrac{2}{7}\ln x + 1)x^{-5/7}$.

4.13. $-\dfrac{2}{3}x^{-5/3} - \dfrac{9}{2}x^{-7/3} + \arccos x - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

4.14. $2x\log_3 x\, x\log_3 e - e^x\left(1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$. **4.15.** $-\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$.

4.16. $\dfrac{\cos x + x\ln x \sin x}{x\cos^2 x} + \operatorname{tg} x + \dfrac{x}{\cos^2 x}$.

4.17. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

4.18. $\operatorname{tg} x\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} + \dfrac{x}{\cos^2 x(1+x^2)}$.

4.19. $\dfrac{e^x + e^{-x} + 2}{(1+e^{-x})^2}$. **4.20.** $-\dfrac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$. **4.21.** $\dfrac{33}{4}$.

4.22. 1, 2, 0, -1. **4.23.** $4\cos 4x$. **4.24.** $2(1-x)\sin(x^2-2x+1)$.

4.25. $\sin 2x$. **4.26.** $\dfrac{2-\cos x}{2\sqrt{2x-\sin x}}$. **4.27.** $\dfrac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}$.

4.28. $\dfrac{4x\sqrt{x}+1}{2x(x\sqrt{x}+1)}$. **4.29.** $\dfrac{2}{4+x^2}$. **4.30.** $\dfrac{1}{x\ln x}$.

4.31. $\dfrac{2x}{\sqrt{3-x^4}}$. **4.32.** $-\dfrac{2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}}{1+x^2}$. **4.33.** $\cos x e^{\sin x}$.

4.34. $2\operatorname{ctg} x \ln\sin x$. **4.35.** $x^x(\ln x+1)$.

4.36. $x^{\cos x}(\dfrac{\cos x}{x}-\sin x\ln x)$. **4.37.** $y=2x-1$. **4.38.** $y=x-1$.
4.40. 135°. **4.41.** 0,04.

4.42. **а)** 10,05; **б)** 1,02; **в)** $\approx 6{,}93$; **г)** $\approx 2{,}08$; **д)** $\approx 2{,}013$.

4.43. $-\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$. **4.44.** $2\cos 2x$. **4.45.** $2(2x^2-1)e^{-x^2}$.

4.46. $2\cos x - x\sin x$. **4.47.** $-\dfrac{2}{(x-1)^3}$. **4.48.** $e^{-x}(3-x)$.

4.49. $2e^x(\cos x-\sin x)$. **4.50.** $-x^{-2}$. **4.51.** $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

4.52. $2^n\sin x(2x+n\dfrac{\pi}{2})$. **4.53.** $3^x\ln^n 3$. **4.54.** $2\dfrac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}$.

4.55. $x\cos x(x+n\dfrac{\pi}{2})+n\sin(x+n\dfrac{\pi}{2})$.

4.56. $e^x[x^3+3nx^2+3n(n-1)x+n(n-1)(n-2)]$.

Глава 5

5.1. 1. **5.2.** 2. **5.3.** 0. **5.4.** 3/5 . **5.5.** 0. **5.6.** 0. **5.7.** 0.

5.8. 1/3. **5.9.** $1/\sqrt{3}$. **5.10.** 1. **5.11.** 1. **5.12.** $x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$.

5.13. $1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. **5.14.** 2. **5.15.** 1/2. **5.16.** 1.

5.17. 1/3. **5.18.** Выпуклость вверх на интервале $(-\infty, 2)$; выпуклость вниз на интервале $(2, \infty)$; $x = 2$ — точка перегиба.

5.19. Выпуклость вверх на интервалах $(-\infty, -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}, \infty)$; выпуклость вниз на интервале $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$; $x = \pm\sqrt{3}$ — точки перегиба.

5.20. Выпуклость вниз на интервалах $(-\infty, -\frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, \infty)$; выпуклость вниз на интервале $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; $x = \pm\frac{1}{2}$ — точки перегиба.

5.21. $x = -1$ — вертикальная асимптота, $y = 3$ — горизонтальная асимптота.

5.22. $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

5.23. $y = x - 1$ — наклонная асимптота, $x = -1$ — вертикальная асимптота.

5.34. 6 и 6. **5.35.** $\sqrt[3]{2V} \times \sqrt[3]{2V} \times \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$. **5.36.** $(\frac{3}{2}, 0)$.

5.37. а) $\bar{C} = 28$, $C' = 24$; **б)** $\bar{C} = 22$, $C' = 6$.

5.38. а) В точке равновесной цены (при $P_0 = 20/3$) $|E_D(P_0)| = 0,25$. **б)** Равновесная цена повысится на 50%, эластичность спроса по абсолютной величине увеличится $\approx$ на 71%.

5.39. $E_D = E_S = 0{,}8$; доход уменьшится на $2,5\%$.

5.40. $(2, \infty)$.

Глава 6

6.1. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} + x + C$. **6.2.** $\frac{x^5}{5} + \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + \ln x - \frac{1}{x} + C$.

6.3. $3\operatorname{arctg} x + 2\arcsin x + C$. **6.4.** $\dfrac{2^x}{\ln 2} + \dfrac{3^x}{\ln 3} + 4e^x + C$.

6.5. $\dfrac{2}{5}x^{5/2} + x^2 - x + C$. **6.6.** $-\cos x + 3\sin x + C$.

6.7. $\dfrac{2}{7}x^{7/2} + \dfrac{3}{7}x^{7/3} - 2\sqrt{x} + \dfrac{3}{2}x^{2/3} + C$.

6.8. $\dfrac{x^3}{3} + x + \ln x - 2x^{-1/2} - \dfrac{3}{2}x^{-3/2} + C$.

6.9. $-\operatorname{ctg} x - x + C$. **6.10.** $2\operatorname{tg} x + \sin x + C$.

6.11. $-\dfrac{1}{x} + 2\operatorname{arctg} x + C$. **6.12.** $\operatorname{tg} x - x + C$.

6.13. $x^3 + \operatorname{arctg} x + C$. **6.14.** $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \operatorname{arctg} x + C$.

6.15. $-\dfrac{1}{5}\cos 5x$. **6.16.** $\dfrac{1}{3}\sin(3x+5) + C$.

6.17. $-\cos\sqrt{x} + C$. **6.18.** $\dfrac{(2x+1)^{10}}{2}\left(\dfrac{x}{11} - \dfrac{1}{220}\right) + C$.

6.19. $\dfrac{1}{3}\ln(3x+2) + C$. **6.20.** $-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(2+x)^3} + C$.

6.21. $\dfrac{1}{3}(2x+5)^{3/2} + C$. **6.22.** $x - 2\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}+1)^2 + C$.

6.23. $-\ln(\cos x) + C$. **6.24.** $-\dfrac{1}{2}\ln(1 + 2\cos x) + C$.

6.25. $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2x + C$. **6.26.** $\dfrac{1}{3}\sin^3 x + C$.

6.27. $\dfrac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + e^{-x} + C$. **6.28.** $-e^{\cos x} + C$.

6.29. $2e^{\sqrt{x}} + C$. **6.30.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+1}) + C$.

6.31. $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}^5 x + C$. **6.32.** $-\frac{2}{15}(2+\cos 5x)^{3/2} + C$.

6.33. $\ln(x^2 - 2x + 5) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C$.

6.34. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$. **6.35.** $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

6.36. $(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2)\ln x - \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + C$.

6.37. $2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$. **6.38.** $-e^{-x}(x+1) + C$.

6.39. $\frac{e^{5x}}{25}(5x-1) + C$. **6.40.** $x\operatorname{arctg}\sqrt{5x-1} - \frac{1}{5}\sqrt{5x-1} + C$.

6.41. $x\operatorname{tg} x + \ln\cos x + C$. **6.42.** $2\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \ln(1+x) + C$.

6.43. $x[1+(\ln x - 1)^2] + C$. **6.44.** $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C$.

6.45. $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C$.

Глава 7

7.1. 6. **7.2.** $\pi/4$. **7.3.** 112/3. **7.4.** 17/6. **7.5.** 64/21. **7.6.** 5π.

7.7. $e - 2$. **7.8.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$. **7.9.** $2\ln 2 - 1$. **7.10.** 1/3.

7.11. 1/2. **7.12.** 1. **7.13.** 32/3. **7.14.** 4/3. **7.15.** 1.

7.16. 1/6. **7.17.** $\ln 3$. **7.18.** $\ln 2$. **7.19.** 4. **7.20.** $2 + \pi^3/6$.

7.21. $8\pi/15$. **7.22.** $\pi(e^2 - 1)/2$. **7.23.** $108\pi/5$. **7.24.** $\pi/6$.

7.25. $0{,}8\pi$. **7.26.** $2\pi/35$. **7.27.** Интеграл расходится. **7.28.** 1.

7.29. Интеграл расходится. **7.30.** 1. **7.31.** 1. **7.32.** 1.

7.33. 2π. **7.34.** $Ml(y - al/2)$. **7.35.** 797 500 кВт·ч.

Глава 8

8.1. Из плоскости Oxy исключена точка $O(0,0)$.

8.2. $x \geq 0$, $y \geq 0$; $x \leq 0$, $y \leq 0$ — соответственно первый и второй квадранты плоскости Oxy.

8.3. Замкнутый круг радиуса a: $x^2 + y^2 \leq a^2$.

8.4. Правая полуплоскость $x \geq 0$. **8.5.** Вся плоскость Oxy.

8.6. Внешность открытого круга радиуса a: $x^2 + y^2 > a^2$.

8.7. $y > -x$ — полуплоскость над биссектрисой второго и четвертого координатных углов.

8.8. Из плоскости Oxy исключена прямая $y = x$.

8.9. Семейство гипербол $y = \dfrac{C}{x}$.

8.10. Параллельные прямые $y = -x + C$.

8.11. Семейство парабол $y = C^2 + x^2$.

8.12. Пучок прямых $y = \dfrac{x}{C}$.

8.13. Семейство парабол $y = (1 + C)x^2$.

8.14. $z'_x = 3x^2 + 6xy, \quad z'_y = 3x^2 - 3y^2$.

8.15. $z'_x = -\dfrac{y^2}{(x-y)^2}, \quad z'_y = \dfrac{x^2}{(x-y)^2}$.

8.16. $z'_x = z'_y = \cos(x + y)$.

8.17. $z'_x = 2xy^3 - 3x^2y^2, \quad z'_y = 3x^2y^2 - 2x^3y$.

8.18. $z'_x = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \quad z'_y = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

8.19. $z'_x = ye^{xy}, \quad z'_y = xe^{xy}$.

8.20. $z'_x = \dfrac{1}{x + y^2}, \quad z'_y = \dfrac{2y}{x + y^2}$.

8.21. $z'_x = \dfrac{1}{2(x+\sqrt{xy})}, \quad z'_y = \dfrac{1}{2(y+\sqrt{xy})}.$

8.22. $z'_x = ye^{xy}(1+xy), \quad z'_y = xe^{xy}(1+xy).$

8.23. $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

8.24. $u'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, u'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, u'_z = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

8.25. $(-2,-4)$. **8.26.** $(-6,6)$. **8.27.** $(2,-2,-4)$. **8.28.** $(-2,6,-3)$.

8.30. $z''_{xx} = \dfrac{2}{1+2y}, \; z''_{xy} = -\dfrac{4x}{(1+2y)^2}, \; z''_{yy} = \dfrac{8x^2}{(1+2y)^3}.$

8.31. $z''_{xx} = 0, \; z''_{xy} = e^y, \; z''_{yy} = xe^y.$

8.32. $z''_{xx} = \dfrac{ye^{xy}(xy-2)-1}{(x+e^{xy})^2}, \; z''_{xy} = \dfrac{(x^2y+e^{xy})e^{xy}}{(x+e^{xy})^2}, \; z''_{yy} = \dfrac{x^3e^{xy}}{(x+e^{xy})^2}.$

8.33. $z''_{xx} = 2y(2y-1)x^{2y-2}, \; z''_{yy} = 4x^{2y}\ln^2 x,$

$z''_{xy} = 2x^{2y-1}(1+2y\ln x).$

8.34. $z''_{xx} = -\dfrac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2}, z''_{xy} = \dfrac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}, z''_{yy} = -\dfrac{2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}.$

8.35. $z''_{xx} = e^x(\sin y + 2\cos y + x\cos y), z''_{xy} = e^x(\cos y - \sin y - x\sin y),$ $z''_{yy} = -e^x(\sin y + x\cos y)$. **8.36.** $z_{\min} = -7$ в точке $M(1,2)$.

8.37. $z_{\max} = 1/27$ в точке $M(1/3, 1/3)$.

8.38. $z_{\max} = 1$ в точке $M(-1,1)$. **8.39**. Экстремума нет.

8.40. $z_{\min} = 0$ в точке $O(0,0)$. **8.41.** Экстремума нет.

8.42. $z_{\min} = -2/e$ в точке $M(-2,0)$. **8.43.** $R = 1$, $h = 2$.

8.44. $\Pi_{\max} = 176$ ед. при $x = 8$, $y = 4$. **8.45.** $u = 0,425x + 1,175$.

Глава 9

9.1. $(6, 3, 0, 9)$. **9.2.** $(-699, -129, -609, 495)$. **9.3.** $|\bar{a}| = \sqrt{29}$, $|\bar{b}| = \sqrt{34}$, $\varphi(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 90°$. **9.4.** 40. **9.5.** $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -\frac{4}{3}$, $\alpha_3 = \frac{3}{4}$, $\alpha_4 = -5$.

Глава 10

10.1. $C = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 2 & 3 \\ 14 & -2 & 5 & 0 \\ -5 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

10.2. а) Указание: имеют смысл следующие произведения матриц: AF, BA, BD, DC, CE, CG, GC, DE, DG, GE.

10.3. Собственные векторы $\bar{c}$ и $\bar{e}$, соответствующие собственные значения 5 и 2.

Глава 11

11.1. а) -8, **б)** -27, **в)** -186.

11.2. $M_{23} = -21$, $M_{14} = -1$, $M_{34} = -28$; $A_{32} = 80$, $A_{43} = -13$, $A_{24} = -21$.

11.3. $r_A = 2$, $r_B = 3$, $r_C = 3$.

11.4. а) линейно зависимы; б) линейно независимы.

11.5. $\Delta = 10$ — определитель, составленный из координат этих векторов, не равен нулю.

Глава 12

12.1. (2, 1). **12.2.** (1, 2, 3). **12.3.** (3, 0, −2).

12.4. Система несовместна. **12.5.** (1, 1, 1). **12.6.** (1, −1, 2, 0). **12.7.** Система несовместна. **12.8.** $(14x_4, 21x_4, x_4, x_4)$, где x_4 — свободная переменная. **12.9.** $\left(-x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}, x_3 - 2x_4 + 2, x_3, x_4\right)$,

где x_3 и x_4 — свободные переменные. **12.10.** Система несовместна.

12.11. $(-7, 15)$. **12.12.** $(-2, 1, -1)$. **12.13.** $(0, 1, -2)$.

12.14. $\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, 1\right)$. **12.15.** $\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, 1, 0\right)$, $\left(\frac{1}{7}, -\frac{4}{7}, 0, 1\right)$.

12.16. $(2, 1, 0, 0)$, $(-4, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$.

12.17. $(8, -6, 1, 0)$, $(-7, 5, 0, 1)$.

12.18. $(1, 0, -\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$, $(0, 1, 5, -7)$.

12.19. $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 4a \\ -a \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$; $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -2$; $a \neq 0$ и $b \neq 0$ — произвольные числа.

12.20. $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} -2a \\ a \\ a \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$; $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3$;

$\bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 6c \\ -7c \\ 5c \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = -3$; $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $c \neq 0$ — произвольные числа.

Глава 13

13.1. $S = 684$ кг, увеличение на 20%; $T = 1171{,}2$ ч, уменьшение на 4%; $P = 3720$ ден. ед., увеличение $\approx$ на 6,3%.

13.2. $\bar{P} = (4\,879\,200, 7\,623\,000, 4\,085\,984, 3\,214\,176, 3\,375\,904)$;
$\Delta P = (143, 118, 117{,}5, 115, 117{,}4)$.

13.3. $\bar{y} = (135, 34, 35, 40)$. **13.4.** $(70, 120, 30)$.

13.5. $\Delta\bar{x} = (24{,}5, 15{,}7, 28{,}7)$.

13.6. 1000 ед. и 1200 ед.

Глава 14

14.1. 36. **14.2.** Да. **14.3.** 588. **14.4.** а) 1/45, б) 0,01.

14.5. 0,5. **14.6.** 24/91. **14.7.** 0,47. **14.8.** 0,38. **14.9.** 0,025.

14.10. 25/39. **14.11.** 0,2. **14.12.** 0,28. **14.13.** 0,4.

14.14. 0,896. **14.15.** 0,47. **14.16.** 0,04.

14.17. 0,69. **14.18.** Выигрыш одной партии из двух.

14.19. а) 3/16; **б)** 13/16. **14.20.** 0,046. **14.21.** 0,078.

14.22. а) 0,4239; **б)** 0,5; **в)** 0,5. **14.23.** 95.

14.24. а) 44,5 млн р.; **б)** 40,5 млн р. **14.25.** 0,7698.

Глава 15

15.2. $0,0375$. **15.3.** 5010. **15.4.** $3,9$. **15.5.** $0,9$.

15.6. $3,1$; $1,29$; $-0,888$; $2,7777$. **15.7. а)** $5,6$; **б)** $0,62$.

15.8. $0,25$. **15.9. а)** 0; **б)** $0,5$; **в)** $0,5$; **г)** 0. **15.12.** $1/a$.

15.13. 25/18. **15.14.** 0; 4. **15.15.** $3x_0/2$. **15.16.** $\sqrt{3}$.

15.17. $(b+a)(b^2+a^2)/4$; $\dfrac{b^7-a^7}{7(b-a)} - \left[\dfrac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\right]^2$.

15.18. 12,6%. **15.19.** $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-(x-3)^2/32}$. **15.20.** 0,2.

15.21. 0,41; 0,23. **15.22.** 0,29. **15.23.** 9,84. **15.24.** (4,16; 6,64).

15.25. (18,57; 21,67). **15.26.** $-0,006$; $0,00004$.

15.27. $U_{\text{набл}} = 5$; $u_{\text{кр}} = 1,96$. Нулевая гипотеза отвергается.

15.28. $T_{\text{набл}} = 2$, $t_{0,05;0,15} = 2,13$. Оснований отвергнуть нулевую гипотезу нет.

15.29. $U_{\text{набл}} = 0,53$; $u_{\text{кр}} = 1,96$. Оснований отвергнуть нулевую гипотезу нет.

Глава 16

16.1. $y = Cx$. **16.2.** $x^2 + y^2 = C^2$. **16.3.** $y = Ce^{1/x}$.

16.4. $y = Ce^x$. **16.5.** $y = \dfrac{C+x}{1-Cx}$. **16.6.** $x^2 + y^2 = \ln(Cx^2)$.

16.7. $1 + y^2 = C(1 + x^2)$. **16.8.** $y^2 + x^2 - 2x = C$.

16.9. $y = C(x+1)e^{-x}$. **16.10.** $y = e^{\sqrt{x}-2}$. **16.11.** $y = \dfrac{4x}{3x-4}$.

16.12. $y^2 = 2\ln[\dfrac{\sqrt{e}}{2}(1 + e^x)]$. **16.13.** $y = \ln x$. **16.14.** $2y^2 = x^2 - 2$.

16.15. $2(\dfrac{1}{y} - 1) = \ln\dfrac{2x+1}{9}$. **16.16.** $y = (x + C)e^x$.

16.17. $y = Ce^x - x - 1$. **16.18.** $y = 3 + \dfrac{C}{x}$. **16.19.** $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$.

16.20. $y = Cx + x^2$. **16.21.** $y = Ce^{-x} + \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

16.22. $y = \left(1 + Ce^{x^2}\right)^{-1}$. **16.23.** $y = \dfrac{1}{x\ln Cx}$.

16.24. $y = \left(Ce^{2x} + x + \dfrac{1}{2}\right)^{-1/2}$. **16.25.** $y = -\left(\dfrac{1}{3x^5} + Cx^2\right)^{-1}$.

Глава 17

17.1. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. **17.2.** $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

17.3. $y = e^{2x}(C_1x + C_2)$. **17.4.** $y = e^{4x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

17.5. $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$. **17.6.** $y = C_1 + C_2e^{-4x}$.

17.7. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$. **17.8.** $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

17.9. $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. **17.10.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x$.

17.11. $y = e^{-x}(C_1x + C_2) + \dfrac{1}{4}e^x$. **17.12.** $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + 2$.

17.13. $y = C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\sin\sqrt{3}x + 3x$.

17.14. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + x - \dfrac{5}{6}$. **17.15.** $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \dfrac{1}{2}e^{2x}$.

17.16. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - xe^{2x}$. **17.17.** $y = e^{3x} - e^{2x}$.

17.18. $y = 2e^x - e^{2x}$. **17.19.** $y = e^{6x} - 2e^x + 2$.

17.20. $y = e^{3x} - 3e^x + x + 2$.

17.21. $y = e^{6x} - e^x + 2$.

17.22. $y = 2e^{2x} - e^{3x} + e^x$. **17.23.** $y = \frac{2}{3}e^{3x}(x-1) + x + \frac{2}{3}$.

17.24. $y = 4e^{-2x} + 2e^{-x} + e^x$.

Глава 18

18.2. а) $P(t) = e^{-2t}(C_1 \cos\sqrt{2}t + C_2 \sin\sqrt{2}t) + 1$; цена со временем стремится к равновесному значению $P_0 = 1$ с колебаниями около него.

б) $P(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 3$; цена со временем стремится к равновесному значению $P_0 = 3$ с колебаниями около него.

в) $P(t) = e^t(C_1 t + C_2) + 2$; цена резко изменяется во времени: при $C_1 > 0$ она возрастает, при $C_1 < 0$ — убывает.

18.3. Случай *в* описывает паническое состояние рынка, поскольку спрос растет с ценой и ее ростом.

Глава 20

20.1. $\bar{x}_{\text{опт}} = (2,25; 0,5)$, $L(\bar{x})_{\max} = 7,25$.

20.2. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0; 1)$, $L(\bar{x})_{\min} = -10$.

20.3. Нет решения.

20.4. Неограниченное решение.

20.5. $\bar{x}_{\text{опт}} = (2; 3)$, $L(\bar{x})_{\min} = 26$.

20.6. Множество решений. Одно из них $\bar{x}_{\text{опт}} = (3; 0)$, $L(\bar{x})_{\min} = 0$.

20.7. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0; 5)$, $L(\bar{x})_{\max} = 15$.

20.8. $\bar{x}_{\text{опт}} = (200; 400)$, $L(\bar{x})_{\min} = 2000$ р.

20.9. $\bar{x}_{\text{опт}} = (6; 1)$, $L(\bar{x})_{\max} = 7$, $\bar{x}_{\text{опт}} = (0; 3)$, $L(\bar{x})_{\min} = 3$.

20.10. $\bar{x}_{\text{опт}} = (2,25; 5,5)$, $L(\bar{x})_{\max} = 1775$ р.

20.11. $\bar{x}_{\text{опт}} = (400; 200)$, $L(\bar{x})_{\max} = 72\,000$ р.

Глава 21

21.1. $\bar{x}_{\text{опт}} = (1; 0; 0; 4)$, $L(\bar{x})_{\max} = -3$.

21.2. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0; 0; 3; 1)$, $L(\bar{x})_{\min} = 9$.

21.3. $\bar{x}_{\text{опт}} = (3; 0; 1; 3)$, $L(\bar{x})_{\max} = -2$.

21.4. Нет решения.

21.5. $\bar{x}_{\text{опт}} = (2 - t; 2t; 1 - t)$, $L(\bar{x})_{\max} = 3$.

21.6. $\bar{x}_{\text{опт}} = (4; 0; 0)$, $L(\bar{x})_{\min} = 4$.

21.7. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0; 3; 0; 0)$, $L(\bar{x})_{\max} = 3$.

21.8. $\bar{x}_{\text{опт}} = (1; 0; 0,6667)$, $L(\bar{x})_{\max} = 0,3333$.

21.9. $\bar{x}_{\text{опт}} = (2,5; 0,25; 0; 0)$, $L(\bar{x})_{\min} = 2,75$.

21.10. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0; 0; 4,5)$, $L(\bar{x})_{\max} = 18$.

21.11. $\bar{x}_{\text{опт}} = (7; 0; 2; 7)$, $L(\bar{x})_{\max} = 137$ усл. ед.

21.12. $\bar{x}_{\text{опт}} = (600; 100; 0)$, $L(\bar{x})_{\max} = 3800$ усл. ед.

21.13. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0; 225; 0; 150)$, $L(\bar{x})_{\max} = 1050$ усл. ед. Дополнительный доход составляет 85 усл. ед.

21.14. $\bar{x}_{\text{опт}} = (115; 110; 20)$, $L(\bar{x})_{\min} = 4020$ усл.ед.

21.15. 1) $\bar{x}_{\text{опт}} = (0; 0,0769; 0,0769)$, $L(\bar{x})_{\max} = 2,6923$ усл. ед.
2) $\bar{x}_{\text{опт}} = (0,0408; 0,0204; 0,0612)$, $L(\bar{x})_{\max} = 2,1428$ усл. ед.
3) $\bar{x}_{\text{опт}} = (0; 0; 0; 0,1250)$, $L(\bar{x})_{\max} = 1,8750$ усл. ед.
4) $\bar{x}_{\text{опт}} = (0; 0,0769; 0,0769)$, $L(\bar{x})_{\max} = 2,6923$ усл. ед.

Глава 22

22.1. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0{,}5; 1{,}5; 0; 0)$, $\bar{y}_{\text{опт}} = (0{,}5; 0{,}5)$,
$L(\bar{x})_{\min} = S(\bar{y})_{\max} = 0{,}5$.

22.2. $\bar{x}_{\text{опт}} = (2; 1; 0; 0)$, $\bar{y}_{\text{опт}} = (1; 1)$, $L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min} = 5$.

22.3. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0; 2; 0; 4)$, $\bar{y}_{\text{опт}} = (-1; 0)$,
$L(\bar{x})_{\min} = S(\bar{y})_{\max} = -2$.

22.4. $\bar{x}_{\text{опт}} = (6; 0; 14; 0)$, $\bar{y}_{\text{опт}} = (0,25; 0,75)$,
$L(\bar{x})_{\min} = S(\bar{y})_{\max} = 14$.

22.5. Нет решения.

22.6. $\bar{x}_{\text{опт}} = (2; 3)$, $\bar{y}_{\text{опт}} = (0,3333; 0,8333; 0)$,
$L(\bar{x})_{\min} = S(\bar{y})_{\max} = 9$.

22.7. $\bar{x}_{\text{опт}} = (0; 2,3333; 0,3333; 0)$,
$\bar{y}_{\text{опт}} = (3,3333; -5,3333)$,
$L(\bar{x})_{\min} = S(\bar{y})_{\max} = -4,6666$.

22.8. Нет решения.

Глава 23

23.1. $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 70 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 30 \end{pmatrix}$, $L(X)_{\min} = 240$.

23.2. $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 70 \\ 30 & 20 & 0 & 40 \end{pmatrix}$, $L(X)_{\min} = 1270$.

23.3. $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 90+10t & 10-10t & 0 \\ 0 & 70 & 0 \\ 30-10t & 10t & 40 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$, $L(X)_{\min} = 830$.

23.4. $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 90 & 40 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 110 & 0 & 20 \end{pmatrix}$, $L(X)_{\min} = 3210$.

23.5. $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L(X)_{\min} = 130.$

23.6. $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L(X)_{\min} = 52.$

23.7. $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 0 & 140 \\ 0 & 170 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 110 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L(X)_{\min} = 1800.$

23.8. $X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 1000 & 0 & 1000 \\ 0 & 2400 & 0 \\ 3000 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L(X)_{\min} = 8480.$

Глава 24

24.1. $\bar{x}_{\text{цел.}} = (2; 4), \quad L(\bar{x})_{\text{цел.}} = 68.$

24.2. $\bar{x}_{\text{цел.}} = (5; 0), \quad L(\bar{x}))_{\text{цел.}} = 10.$

24.3. $\bar{x}_{\text{цел.}} = (1; 1), \quad L(\bar{x})_{\text{цел.}} = 4.$

24.4. $\bar{x}_{\text{цел.}} = (1; 1), \quad L(\bar{x})_{\text{цел.}} = 5.$

24.5. $\bar{x}_{\text{цел.}} = (1; 2), \quad L(\bar{x})_{\text{цел.}} = 3.$

24.6. $\bar{x}_{\text{цел.}} = (2; 2; 1), \quad L(\bar{x})_{\text{цел.}} = 19.$

24.7. $\bar{x}_{\text{цел.}} = (0; 1; 2; 14), \quad L(\bar{x})_{\text{цел.}} = 42.$

24.8. $\bar{x}_{\text{цел.}} = (2; 2; 1), \quad L(\bar{x})_{\text{цел.}} = 190$ усл. ед.

24.9. $\bar{x}_{\text{цел.}} = (2; 7), \quad L(\bar{x})_{\text{цел.}} = 25$ т.

24.10. $X_{\text{цел.}} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L(X)_{\text{цел.}} = 2600.$

Глава 25

25.1. $\bar{x} = (0; 0)$, $L_{\min} = 0$, $\bar{x} = (\sqrt{5}; 2\sqrt{5})$, $L_{\max} = 5\sqrt{5}$.

25.2. $\bar{x} = (0; 0)$, $L_{\min} = 0$, $\bar{x} = (2; 4)$, $L_{\max} = 14$.

25.3. $\bar{x} = (4,5; 1,5)$, $L_{\min} = 2,5$, $\bar{x} = (0; 4)$, $L_{\max} = 40$.

25.4. $\bar{x} = (9/13; 32/13)$, $L_{\min} = 1300/169$,
$\bar{x} = (0; 0)$, $L_{\max} = 25$.

25.5. $\bar{x} = (4; 3)$, $L_{\min} = 0$, $\bar{x} = (13; 10,5)$, $L_{\max} = 137,25$.

25.6. $\bar{x} = (3; 2)$, $L_{\min} = 0$, $\bar{x} = (0; 6)$, $L_{\max} = 25$.

25.7. $\bar{x} = (2; 1)$, $L_{\min} = 0$, $\bar{x} = (5; 0)$, $L_{\max} = 10$.

25.8. $\bar{x} = (1; 4)$ и $\bar{x} = (4; 1)$, $L_{\min} = 17$, $\bar{x} = (7; 4/7)$,
$L_{\max} = 2417/49$.

25.9. $\bar{x} = (1; 5)$, $L_{\min} = -1/2$, $\bar{x} = (5; 1)$, $L_{\max} = 3/2$.

25.10. $\bar{x} = (2; 3)$, $L_{\min} = 3/5$, $\bar{x} = (4; 1)$, $L_{\max} = 11/5$.

25.11. $\bar{x} = (3; 1)$, $L_{\min} = 4$, $\bar{x} = (2; 8)$, $L_{\max} = 6,2$.

25.12. $\bar{x} = (-1/6, 13/6, 5/12)$, $L = -25/26$.

25.13. $\bar{x} = (1, 1, 1)$, $L_{\max} = 2$.

25.14. $\bar{x} = (1, 1, 1)$, $L = 2$.

25.15. $\bar{x} = (-\sqrt{2/3}; \sqrt{6}/6; -\sqrt{6}/6)$, $L = -\sqrt{6}$.

25.16. $\bar{x} = (99; 101)$, $L_{\min} = 20\,398$ ден. ед.

Глава 26

26.1. Оборудование заменить через 3 года.

26.2. Оборудование заменить через 4 года.

26.3. В первый населенный пункт направить 1 автолавку, во второй — 3, в третий — 1, при этом товарооборот будет максимальный, равный 64 тыс. р.

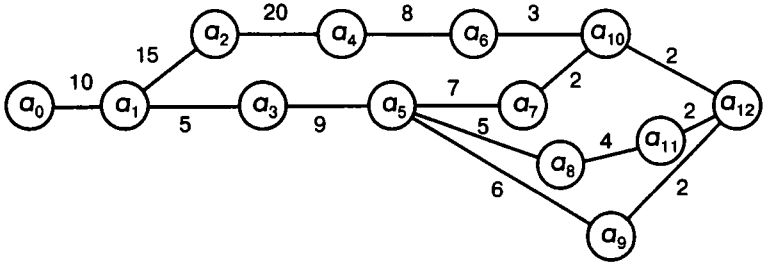
26.4. Инвестировать третьему заводу 50 млн р., четвертому заводу — 150 млн р., максимальный прирост выпуска продукции составит 146 млн р.

26.5. В первой области построить 2 предприятия, в третьей — 3, минимальные затраты составят 29 млн р.

26.6. $\bar{x}_{\text{опт}}$=(в,в,с,с,в,с), минимальные затраты равны 35 млн р.

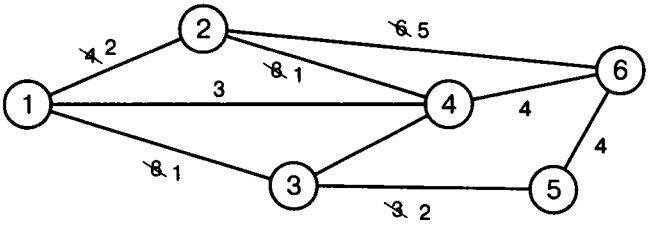
Глава 27

27.1. Критический путь $a_0 - a_1 - a_2 - a_4 - a_6 - a_{10} - a_{12}$ равен 58 дн.



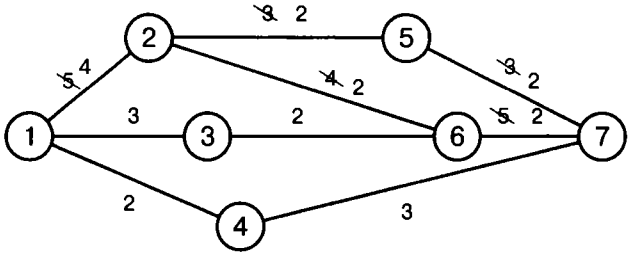
27.2. При нормальном режиме работ 2 критических пути: 1 – 2 – 6 и 1 – 2 – 4 – 6, длина пути 10 дн., стоимость работ 630 ден. ед.

При максимальном режиме работ 5 критических путей: 1 – 2 – 6, 1 – 2 – 4 – 6, 1 – 4 – 6, 1 – 3 – 4 – 6, 1 – 3 – 5 – 6, длина пути 7 дн., минимальная стоимость работ 770 ден. ед.



27.3. При нормальном режиме работ 1 критический путь $1-2-6-7$, длина пути 14 дн., стоимость работ 700 ден. ед.

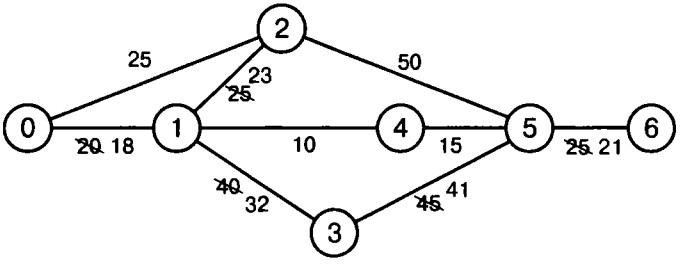
При максимальном режиме работ 3 критических пути: $1-2-6-7$, $1-2-5-7$, $1-4-7$, длина пути 8 дн., минимальная стоимость работ 820 ден. ед.



27.4. При нормальном режиме работ 1 критический путь $0-1-3-5-6$, длина пути 130 дн., стоимость работ 405 млн р.

При максимальном режиме работ 2 критических пути: $0-1-2-5-6$, $0-1-3-5-6$, длина пути 112 дн., минимальная стоимость работ 438,8 ден. ед.

Предприятие может вернуть кредит банку через 208 дн.



27.5. Кратчайший путь $A-1-3-4-B$ длиной 120.

27.6. Кратчайший путь $A-2-5-9-B$ длиной 10.

27.7. Минимальная длина 1800 м.

27.8. Каждая партия кассет должна заменяться через 1 год, а через 5 лет списываться.

Глава 28

28.1. $\bar{x}_{\text{опт}}(2/5; 3/5)$, $\bar{y}_{\text{опт}}(1/5; 4/5)$, $\nu = 22/5$.
28.2. $\bar{x}_{\text{опт}}(3/7; 4/7)$, $\bar{y}_{\text{опт}}(5/14; 0; 9/14)$, $\nu = 34/7$.
28.3. $\bar{x}_{\text{опт}}(5/8; 3/8; 0)$, $\bar{y}_{\text{опт}}(3/4; 1/4)$, $\nu = 7/4$.
28.4. $\bar{x}_{\text{опт}}(0; 5/9; 0; 4/9)$, $\bar{y}_{\text{опт}}(4/9; 5/9)$, $\nu = 58/9$.
28.5. $\bar{x}_{\text{опт}}(1/2; 1/2)$, $\bar{y}_{\text{опт}}(0; 0; 1/2; 1/2)$, $\nu = 5/2$.
28.6. $\bar{x}_{\text{опт}}(0; 6/7; 1/7)$, $\bar{y}_{\text{опт}}(0; 0; 5/7; 0; 2/7; 0)$, $\nu = 19/7$.
28.7. $\bar{x}_{\text{опт}}(1/3; 0; 2/3; 0)$, $\bar{y}_{\text{опт}}(0; 0; 0; 2/3; 1/3), \nu = 11/3$.
28.8.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

28.9. $\bar{x}_{\text{опт}}(0,5; 0,17; 0,33)$, $\nu = 1,835$.
28.10. Предпочтительным является план выпуска товаров широкого потребления $И_2$.
28.11. $\bar{x}_{\text{опт}}(0,53; 0,47)$, $\nu = 18\,266,4$ ден. ед.
28.12. Фирме целесообразно построить среднее предприятие.
28.13. Оптимальным решением фирмы является полная замена старого оборудования на новое того же типа.

Глава 29

29.1. $P_0 = 0,054$; $P_{\text{отк}} = 0,109$; $P_{\text{обс}} = 0,891$;
$\bar{n}_{\text{з}} = 2,673$; $A = 80,19$.
29.2. Среднее количество мест, не занятых автомобилями, 0,6;
$P_{\text{отк}} = 0,52$.
29.3. $P_0 = 0,0055$; $P_{\text{отк}} = 0,356$; $P_{\text{обс}} = 0,644$; $\bar{n}_{\text{з}} = 3,864$,
$A = 3,864$.
29.4. $P_0 = 0,11$; $P_{\text{оч}} = 0,29$; $\bar{L}_{\text{оч}} = 0,88$; $\bar{t}_{\text{оч}} = 3,52$;
$\bar{t}_{\text{смо}} = 11,52$; $z = 2,88$.
29.5. При $n = 3$: $P_0 = 0,016$; $P_{\text{отк}} = 0,576$; $P_{\text{обс}} = 0,424$.
При $n = 9$: $P_{\text{обс}} = 0,925$; $P_0 = 0,027$; $P_{\text{отк}} = 0,075$.
29.6. $\bar{L}_{\text{оч}} = 2,66$.
29.7. $P_0 = 0,5$; $P_{\text{отк}} = 0,0125$; $P_{\text{обс}} = 0,9875$; $A = 0,329$;
$\bar{n}_{\text{з}} = 0,658$, $\bar{L}_{\text{оч}} = 0,06$.

29.8. $P_{\text{отк}} = 0,21$; $P_{\text{обс}} = 0,79$; $\bar{n}_{\text{з}} = 1,58$.
29.9. $P_{\text{отк}} = 0,014$; $\bar{n}_{\text{з}} = 1,479$; $A = 0,493$.
29.10. $P_{\text{отк}} = 0,039$; $\bar{L}_{\text{оч}} = 0,039$; $\bar{t}_{\text{оч}} = 0,078$; $A = 0,48$; $\bar{t}_{\text{смо}} = 2,658$.
29.11. $P_{\text{отк}} = 0,656$.
29.12. $\bar{L}_{\text{оч}} = 7,73$; $\bar{t}_{\text{смо}} = 10,59$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Значения функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1093	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139

Окончание табл. 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 2

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,35	0,1368	0,70	0,2580	1,05	0,3531	1,40	0,4192
0,01	0,0040	0,36	0,1406	0,71	0,2611	1,06	0,3554	1,41	0,4207
0,02	0,0080	0,37	0,1443	0,72	0,2642	1,07	0,3577	1,42	0,4222
0,03	0,0120	0,38	0,1480	0,73	0,2673	1,08	0,3599	1,43	0,4236
0,04	0,0160	0,39	0,1517	0,74	0,2704	1,09	0,3621	1,44	0,4251
0,05	0,0199	0,40	0,1554	0,75	0,2734	1,10	0,3643	1,45	0,4265
0,06	0,0239	0,41	0,1591	0,76	0,2764	1,11	0,3665	1,46	0,4279
0,07	0,0279	0,42	0,1628	0,77	0,2794	1,12	0,3686	1,47	0,4292
0,08	0,0319	0,43	0,1664	0,78	0,2823	1,13	0,3708	1,48	0,4306
0,09	0,0359	0,44	0,1700	0,79	0,2852	1,14	0,3729	1,49	0,4319
0,10	0,0398	0,45	0,1736	0,80	0,2881	1,15	0,3749	1,50	0,4332
0,11	0,0438	0,46	0,1772	0,81	0,2910	1,16	0,3770	1,51	0,4345
0,12	0,0478	0,47	0,1808	0,82	0,2939	1,17	0,3790	1,52	0,4357
0,13	0,0517	0,48	0,1844	0,83	0,2967	1,18	0,3810	1,53	0,4370
0,14	0,0557	0,49	0,1879	0,84	0,2995	1,19	0,3830	1,54	0,4382
0,15	0,0596	0,50	0,1915	0,85	0,3023	1,20	0,3849	1,55	0,4394
0,16	0,0636	0,51	0,1950	0,86	0,3051	1,21	0,3869	1,56	0,4406
0,17	0,0675	0,52	0,1985	0,87	0,3078	1,22	0,3883	1,57	0,4418
0,18	0,0714	0,53	0,2019	0,88	0,3106	1,23	0,3907	1,58	0,4429
0,19	0,0753	0,54	0,2054	0,89	0,3133	1,24	0,3925	1,59	0,4441
0,20	0,0793	0,55	0,2088	0,90	0,3159	1,25	0,3944	1,60	0,4452
0,21	0,0832	0,56	0,2123	0,91	0,3186	1,26	0,3962	1,61	0,4463
0,22	0,0871	0,57	0,2157	0,92	0,3212	1,27	0,3980	1,62	0,4474
0,23	0,0910	0,58	0,2190	0,93	0,3238	1,28	0,3997	1,63	0,4484
0,24	0,0948	0,59	0,2224	0,94	0,3264	1,29	0,4015	1,64	0,4495
0,25	0,0987	0,60	0,2257	0,95	0,3289	1,30	0,4032	1,65	0,4505
0,26	0,1026	0,61	0,2291	0,96	0,3315	1,31	0,4049	1,66	0,4515
0,27	0,1064	0,62	0,2324	0,97	0,3340	1,32	0,4066	1,67	0,4525
0,28	0,1103	0,63	0,2357	0,98	0,3365	1,33	0,4082	1,68	0,4535
0,29	0,1141	0,64	0,2389	0,99	0,3389	1,34	0,4099	1,69	0,4545
0,30	0,1179	0,65	0,2422	1,00	0,3413	1,35	0,4115	1,70	0,4554
0,31	0,1217	0,66	0,2454	1,01	0,3438	1,36	0,4131	1,71	0,4564
0,32	0,1255	0,67	0,2486	1,02	0,3461	1,37	0,4147	1,72	0,4573
0,33	0,1293	0,68	0,2516	1,03	0,3485	1,38	0,4162	1,73	0,4582
0,34	0,1331	0,69	0,2549	1,04	0,3508	1,39	0,4177	1,74	0,4591

Окончание табл. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,75	0,4599	1,93	0,4732	2,22	0,4868	2,58	0,4951	2,94	0,4984
1,76	0,4608	1,94	0,4738	2,24	0,4875	2,60	0,4953	2,96	0,4985
1,77	0,4616	1,95	0,4744	2,26	0,4881	2,62	0,4956	2,98	0,4986
1,78	0,4625	1,96	0,4750	2,28	0,4887	2,64	0,4959	3,00	0,49865
1,79	0,4633	1,97	0,4756	2,30	0,4893	2,66	0,4961	3,20	0,49931
1,80	0,4641	1,98	0,4761	2,32	0,4898	2,68	0,4963	3,40	0,49966
1,81	0,4649	1,99	0,4767	2,34	0,4904	2,70	0,4965	3,60	0,499841
1,82	0,4656	2,00	0,4772	2,36	0,4909	2,72	0,4967	3,80	0,499928
1,83	0,4664	2,02	0,4783	2,38	0,4913	2,74	0,4969	4,00	0,499968
1,84	0,4671	2,04	0,4793	2,40	0,4918	2,76	0,4971	4,50	0,499997
1,85	0,4678	2,06	0,4803	2,42	0,4922	2,78	0,4973	5,00	0,499997
1,86	0,4686	2,08	0,4812	2,44	0,4927	2,80	0,4974		
1,87	0,4693	2,10	0,4821	2,46	0,4931	2,82	0,4976		
1,88	0,4699	2,12	0,4830	2,48	0,4934	2,84	0,4977		
1,89	0,4706	2,14	0,4838	2,50	0,4938	2,86	0,4979		
1,90	0,4713	2,16	0,4846	2,52	0,4941	2,88	0,4980		
1,91	0,4719	2,18	0,4854	2,54	0,4945	2,90	0,4981		
1,92	0,4726	2,20	0,4861	2,56	0,4948	2,92	0,4982		

Таблица 3

Распределение критерия Дарбина–Уотсона для положительной автокорреляции (для 5%-го уровня значимости)

n	$v = 1$		$v = 2$		$v = 3$		$v = 4$		$v = 5$	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,89
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80

Таблица 4

Критические точки распределения Фишера–Снедекора (v_1 — число степеней свободы большей дисперсии, v_2 — число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$												
v_2	v_1											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Таблица 5

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,2	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Таблица 6

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,1	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	0,001
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,37
Число степеней свободы k	**0,05**	**0,025**	**0,001**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бывшев В.А.* Введение в эконометрию. Ч. 2. М.: Финансовая акад. при Правительстве РФ, 2003.
2. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1998.
3. *Доугерти К.* Введение в эконометрику. М.: Инфра-М, 2001.
4. *Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике. 2-е изд. М.: Дело и сервис, 1999.
5. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.
6. *Красс М.С.* Математика для экономических специальностей. 4-е изд. М.: Дело, 2003.
7. *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. 4-е изд. М.: Дело, 2003.
8. *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Математика для экономистов. 2-е изд. СПб., 2005.
9. *Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О.* Теория массового обслуживания в экономической сфере. М.: ЮНИТИ, 1998.
10. *Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О.* Игровые методы в управлении экономикой. М.: Дело, 2001.
11. *Мэнкъю М., Грегори.* Макроэкономика. М.: Изд-во МГУ, 1994.
12. *Шипачев В.С.* Высшая математика. М.: Высшая школа, 1985.
13. *Шипачев В.С.* Задачи по высшей математике. М.: Высшая школа, 1985.
14. Эконометрика / Под ред. И.И. Елисеевой. М.: Финансы и статистика, 2002.
15. Экономико-математическое моделирование / Под ред. И.Н. Дрогобыцкого. М.: Экзамен, 2004.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная величина числа, 27
Автокорреляция, 590
Адекватность моделей, 620
Активное ограничение, 392
Алгебраическое дополнение, 192
Алгоритм симплексного метода, 397
Альтернативный оптимум задач линейного программирования, 388, 402
Аналитический способ задания функции, 39
Аппликата, 141
Аргумент, 38
  комплексного числа, 23
Асимметрия, 303, 317
Асимптота, 91
  гиперболы, 63

Базис, 167
Базисные неизвестные, 205
Балансовая переменная, 377
Балансовые соотношения, 230
Бесконечно большая последовательность, 31
    функция, 53
  малая последовательность, 30
    функция, 53
Бесконечные игры, 514
Бесконечный предел, 31
  промежуток, 30
Бином Ньютона, 84, 243

Варианта, 307
Вариационный ряд, 307
Вектор n-мерный, 162
  нулевой, 163
  столбец, 162
  строка, 162
Величина случайная, 270
  двумерная, 284–286
  дискретная, 269
  непрерывная, 290–291
Величины случайные 269
  зависимые, 287
  коррелированные, 288
  независимые, 287
  некоррелированные, 288
Вероятность, 244
  безусловная, 248
  попадания в интервал непрерывной случайной величины, 293
  условная, 248
Вертикальная асимптота, 91
Вещественная ось, 18–20
Вещественные числа, 16–18
Внутренняя точка выпуклой области, 380
Возрастающая последовательность, 34
  функция, 84
Вторая производная, 75
Временной ряд, 598
Второй замечательный предел, 51
Входящий поток, 548, 549

Выборка, 306
бесповторная, 306
повторная, 306
репрезентативная, 306
Выпуклая n-мерная область, 380
линейная комбинация, 381
Выпуклое программирование, 375
Выпуклость
вверх, 88
вниз, 88
Выходящий поток, 548

Геометрический смысл дифференциала, 70–71
дифференциального уравнения
второго порядка, 347
первого порядка, 336
определенного интеграла, 125
производной, 67
Геометрическое изображение функции двух переменных, 141
Гипербола, 63
Гиперплоскость, 214
Гистограмма, 311
Главные миноры матрицы квадратичной формы, 196
Глобальный экстремум, 452
Горизонтальная асимптота, 92
Градиент, 148
Граничная прямая, 382
Граничная точка выпуклой области, 380
Граф, 484
График функции, 84, 141
Графический способ задания функции, 40

Двойственная задача линейного программирования, 411
Дерево решений, 537
Детерминант, 189
Диагональ матрицы, 172
Динамическое программирование, 375, 463
Дисперсия внутригрупповая, 315
выборочная, 313
генеральная, 313
групповая, 315
дискретной случайной величины, 278
межгрупповая, 315
непрерывной случайной величины, 296
Дисциплина очереди, 552
Дифференциал функции, 70
применение в приближенных вычислениях, 71
Дифференциальное исчисление, 14, 73
Дифференциальное уравнение, 335
второго порядка, 347
допускающее понижение порядка, 349–352
задача Коши, 337, 348
краевая задача, 358
линейное, 352–353
неоднородное, 352, 356
общее решение, 356
однородное, 353
с постоянными коэффициентами, 352
характеристическое уравнение, 354
первого порядка, 336
линейное, 344
неполное, 342
общее решение, 344
с разделяющимися переменными, 340
экономические приложения, 360–368
Дифференцирование, 69
основные правила, 72
таблица основных производных, 72
Дифференцируемая функция, 69
Длина вектора, 164
частичного отрезка, 116
Допустимое решение, 383
Достаточные условия существования локального экстремума, 86, 153

Дробная часть числа, 443
Дробно-рациональная функция, 55
Дублирующая стратегия, 520

Евклидово пространство, 139

Зависимая переменная, 38
Закон больших чисел, 326
Закон инерции квадратичных форм, 187
Закрытая транспортная задача, 429
Замкнутая область, 380

Игра
с "природой", 532
с седловой точкой, 516
Индекс
детерминации, 572, 587
корреляции, 571, 587
Индексная строка, 399
Интеграл с переменным верхним пределом, 120
Интегральное исчисление, 14, 106
Интегрирование, 105
непосредственное, 108
по частям, 110
подстановкой, 108
рациональных функций, 112–114
трансцендентных функций, 114
тригонометрических функций, 113
Интегрируемая функция, 117
Интегрируемость функции, 118
Интенсивность движения очереди, 550
нагрузки, 550
потока заявок, 549
потока обслуживания, 550
Интервал
доверительный, 319
монотонности функции, 84–85
Иррациональные числа, 17
Исследование функций, 93—94
Источник заявок, 548

Календарный график, 483
Канал обслуживания, 548
Каноническая форма задачи линейного программирования, 377
Каноническое уравнение гиперболы, 63
параболы, 64
эллипса, 62
Касательная, 67
Квадратичная форма, 185
канонический и нормальный вид 186
Ключевая строка, 399
Ключевой столбец, 399
элемент, 399
Коллинеарные векторы, 166
Комплексная плоскость, 21
Комплексное число, 20
Компланарные векторы, 166
Конечные игры, 514
Конфликтные ситуации, 513
Координатная плоскость, 138
Координатное пространство, 139
Координаты
вектора, 162, 168
точки, 139
Коэффициент
корреляции, 287–288
регрессии, 289
Кривая
Гомперца, 614
Перла-Рида, 614
Криволинейная трапеция, 125
Критерий альтернативного оптимума, 404
Вальде, 532
Гурвица, 532
максимума, 532
продуктивности матрицы, 233
Сильвестра, 197
Сэвиджа, 533

Ленточный график Ганта, 483
Линейная зависимость векторов, 165
комбинация векторов, 165
Линейное программирование, 376

Линейные операторы, 182
Линейные операции над векторами, 163
свойства, 163
над матрицами, 173
свойства, 174
Линия второго порядка, 61
уровня, 144
Локальный максимум, 85, 149
минимум, 85
экстремум, 85

Максимальное значение функции, 94
Максимин, 515
Математическая модель экономической задачи, 376
Математическое ожидание дискретной случайной величины, 274
непрерывной случайной величины, 296
Математическое программирование, 374
Матрица, 171
вырожденная, 181, 195
единичная, 172
квадратичной формы, 185
квадратная, 172
невырожденная, 202
нулевая, 172
обратная, 181
перехода, 183
перехода системы, 328
полных затрат, 233
продуктивная, 233
расширенная, 201
рисков, 553
симметрическая, 175
системы уравнений, 200
транспонированная, 174
Медиана, 301
Метод
Гаусса, 205–209
Гомори, 445
Ирвина, 601
минимального тарифа, 431
множителей Лагранжа, 457
наименьших квадратов, 157–160
обратной матрицы, 201
потенциалов, 433
Минимакс, 516
Минимальная продолжительность операции, 494
Минимальное значение функции, 94
Минимизация сети, 502
Минор, 192
Мнимая единица, 20
Многочлен, 55
Множество, 14
действительных (вещественных) чисел, 16
значений (изменения) функции, 38
пустое, 15
Мода, 301
Модель
Леонтьева, 229
обмена (международной торговли), 236
Модифицированная игра, 526
Модуль
вектора, 164
числа, 22, 27
Момент
корреляционный, 287
начальный теоретический, 283
центральный теоретический, 284

Наклонная асимптота, 92
Натуральный логарифм, 52
Независимая переменная, 38
Неканоническая форма задачи линейного программирования, 377
Нелинейное программирование, 374, 451
Необходимые условия существования локального экстремума, 85, 151
Неограниченная
выпуклая область, 381
последовательность, 31
Неопределенный интеграл (см. также *Интегрирование*), 105

"неберущиеся" интегралы, 107
свойства, 105–106
таблица, 106–108
Непрерывность вещественных чисел, 18
функции в точке, 46
слева, справа, 47
на отрезке, 56
функции в интервале, 56
Неравенство, 18
Чебышева, 326
Несвязное множество, 503
Несимметричная двойственная задача, 412
Несобственный интеграл, 132
геометрический смысл, 133
расходящийся, 132
сходящийся, 132
Неубывающая функция, 84
Нормальный режим работы, 494

Область допустимых решений, 383
значений функции, 38
определения функции, 38, 40
решения системы, 383
Обратные тригонометрические функции, 42, 73
Обратный проход, 486
Общее уравнение прямой, 59
Общий член последовательности, 34
Объединение множеств, 15
Объем выборки, 306
Объем тела вращения, 126–127
Ограниченная выпуклая область, 380
Окрестность точки, 20
Окружность, уравнение, 40, 62
Операции
над вещественными числами, 17
свойства, 15
над векторами, 163
свойства, 163
над комплексными числами, 24
над матрицами, 174
свойства, 175
Опорное решение, 397
Определенный интеграл, 116
геометрические приложения, 124–129
основные свойства, 118–119
экономические приложения, 129–132
Определитель, 189
свойства, 190–192
системы линейных алгебраических уравнений, 202
Оптимальная стратегия, 514
Оптимальное решение задачи линейного программирования, 398
Ординарность потока, 549
Ориентированный граф, 483
Ортогональные векторы, 164
Ортогональный базис, 169
Ортонормированный базис, 170
Отбор
механический, 307
простой случайный, 307
серийный, 307
типический, 307
Открытая транспортная задача, 428, 436
Отрезок, 19
Отсутствие последействия, 549
Оценка несмещенная, 312
смещенная, 313
состоятельная, 313
точечная, 319
эффективная, 313

Парабола, 63
Парные игры, 514
Пассивное ограничение, 391
Паутинная модель рынка, 45
Первообразная, 104
Первый замечательный предел, 50
Переменная интегрирования, 105, 117
Пересечение гиперплоскостей, 379
выпуклых областей, 381
множеств, 15
Перестановка, 242
Платежная матрица, 515

Плотность распределения вероятностей, 293
Площадь криволинейной трапеции, 125
плоской фигуры, 124
Поверхность уровня, 148
Погрешность метода наименьших квадратов, 158
Подынтегральная функция, 105, 117
Поздний срок начала работы, 488
окончания операции, 488
Показательная функция, 142
Полигон, 311–312
Полная группа событий, 244
Полный резерв времени, 489
Полуось эллипса, 62
Полупространство n-мерного пространства, 379
Порядок матрицы, 179
Правило Лопиталя, 78
Предел последовательности, 29
функции в точке, 46
левый, правый, 47
Предельная себестоимость, 96
Предельные издержки, 96
Предельный доход, 99
Пределы интегрирования, 117
Принцип оптимальности Р. Беллмана, 463
Приращение
аргумента, 66
функции, 66
Произведение вектора на число, 163
вещественных чисел, 17
матриц, 175
матрицы на число, 173
последовательностей, 32
Производная (см. также *Дифференцирование*), 66
высшего порядка, 75
левая, правая, 68
применение в экономике, 96–101
сложной функции, 73
физический смысл, 68
Производственная функция, 144
Промежуток, 19
Промежуточная переменная, 58
Простейшие элементарные функции, 42
Прямой проход, 486
Путь, 484

Работа, 484
Равенство
векторов, 163
матриц, 172
Маркова, 329
Равновесная цена, 44
Разложение
вектора по базису, 167
функций по формуле Маклорена, 82
Размах варьирования, 309
Размер матрицы, 171
Размещение, 242
Ранг матрицы, 194
системы векторов, 167, 194
Ранний срок начала операции, 487
окончания работы, 488
Раскрытие неопределенностей, 78–80
Распределение
биномиальное, 272
нормальное, 300
Пирсона, 323
Пуассона, 273
равномерное, 298
Стьюдента, 323
Фишера, 324
Распределительная таблица, 428
Расстояние между точками, 139
Рациональная функция, 55
Рациональные числа, 17
Регрессия
средняя квадратическая, 289
множественная, 574
нелинейная, 563
Режим максимальной интенсивности, 494
Рекуррентное соотношение, 471
Решающая вершина, 539
Решение системы линейных алгебраических уравнений, 199

Свободный резерв времени, 489
Связное множество, 503
Связь между бесконечно большими
и бесконечно малыми
последовательностями, 32
функциями, 53
Сегмент, 19
Седловая точка матрицы, 516
Сепарабельная функция, 451
Сетевые модели, 375, 483
Симметричная двойственная
задача, 410
Симплексный метод, 397
Система линейных алгебраических
уравнений, 199
в матричной форме, 200–201
геометрический смысл, 213–214
однородная, 215
Система массового обслужива-
ния, 548
с неограниченным ожиданием,
548–551
с ожиданием и ограниченной
длиной очереди, 549, 553
с отказами, 548, 550
ограничений, 376
Скалярное произведение векторов,
164
свойства, 164
Сложная функция, 58
Случайная вершина, 539
Смешанная
двойственная задача, 412
стратегия, 516
Собственное значение матрицы,
180
Собственный вектор матрицы, 180
Событие, 484
достоверное, 241
невозможное, 241
случайное, 241
События независимые, 250
несовместные, 243
противоположные, 247
совместные, 243
Сочетания, 243
Способы задания функций, 38–40
Среднее квадратическое отклоне-
ние, 281
выборочное, 314
генеральное, 314
Средняя
выборочная, 313
генеральная, 313
Статистическая гипотеза, 320
Статистический критерий, 321
Стационарность потока, 549
Степенная функция, 42
Строгое неравенство, 18
Сумма
векторов, 163
матриц, 173
последовательностей, 32
Суперпозиция функции, 39
Сходимость по вероятности, 313
Сходящаяся последовательность, 30
свойства, 32

Табличный интеграл, 107
Теорема Лопиталя, 78
интегральная Лапласа, 261–262
локальная Лапласа, 260
о бесконечно малых
последовательностях, 32
функциях, 53
о замене переменной в неопреде-
ленном интеграле, 108
в определенном интеграле, 121
о смешанных производных
функции нескольких пере-
менных, 150
сложения вероятностей
несовместных событий, 246
совместных событий, 254
умножения вероятностей, 248
Теоремы двойственности, 412–413
Теория
игр, 513
графов, 483
Точка максимального интенсивного
режима, 494
нормального режима, 494
Транспортная задача, 429
Тренд, 602

линейный, 617
параболический, 617
Тригонометрические функции, 73

Убывание функций, достаточное условие, 84–85
Угловая точка выпуклой области, 380
Угловой коэффициент, 59
Угол между векторами, 165
Уравнение касательной, 70
линии на плоскости, 59
плоскости общее, 143
Уравнения прямых на плоскости, 59–60

Фокус
гиперболы, 63
параболы, 64
эллипса, 61
Формула
Бернулли, 259
интегрирования по частям
в неопределенном интеграле, 110
в определенном интеграле, 122
Маклорена, 81
Ньютона–Лейбница, 120
интегрирования по частям в
неопределенном интеграле, 110
в определенном интеграле, 122
полной вероятности, 255
Формулы
Байеса, 257
Крамера, 203
Фундаментальная система решений системы линейных алгебраических однородных уравнений, 215–217
Функция
Кобба–Дугласа, 144
нескольких переменных, 141
нечетная, 42
прибыли, 154
распределения, 290
эмпирическая, 309
четная, 42

Характеристическое уравнение для собственных чисел матрицы, 218–220

Целая часть числа, 31, 443
Целевая функция, 376
Целочисленное программирование, 441
Цена игры, 516
Цепи Маркова, 327
Цикл транспортной задачи, 434

Частная производная, 146
Частные производные высших порядков, 150
Частота, 307
относительная, 308
Число *e*, 34
Числовая ось (прямая), 18–20
последовательность, 28
Чистая стратегия, 516
Член последовательности, 29

Эквивалентные системы уравнений, 200
Эксцентриситет эллипса, 62
Эксцесс, 303, 317
Эластичность спроса, 97
Элемент
матрицы, 171
множества, 14
последовательности, 29
Элементарная функция, 42
Эллипс, 61–63

Учебник

Максим Семенович КРАСС,
Борис Павлович ЧУПРЫНОВ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Главный редактор *Ю.В. Луизо*
Зав. редакцией *Г.Г. Кобякова*
Художник *А.С. Кулемин*
Компьютерная подготовка оригинал-макета *Н.А. Кильдишева*
Корректор *Е.И. Андрианова*

Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.02.953.Д.009376.10.06
от 12.10.2006 г.

Подписано в печать 9.01.2008. Формат 70x100 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 45,0.
Тираж 2000 экз. Заказ № 426. Изд. № 115.

Издательство «Дело»
119571, Москва, пр-т Вернадского, 82

Коммерческий отдел — тел. 433-2510, 433-2502

com@delokniga.ru

www.delokniga.ru

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат»
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97

ISBN 978-5-7749-0500-3

9 785774 905003

ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ

И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ